Capítulo 1

Números Reales

1.1. Introducción

Llamaremos número real a cualquier fracción decimal.

Ejemplos: $-2,0$; $2,3333\ldots$; $2,25$; $-0{,}785$; $3,141592\ldots$; $2{,}7182818\ldots$; $-1{,}4142136\ldots$

Las fracciones decimales periódicas se llaman números racionales, así:

$$Q = \{x \ / \ x = \frac{p}{q}, \quad p, q \in Z, q \neq 0\}$$

Q : conjunto de números racionales
Z : conjunto de números enteros.

Las fracciones decimales no periódicas se llaman números irracionales.

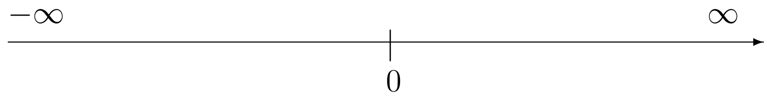
Ejemplos: $3,141592\ldots = \pi$; $2{,}7182818\ldots = e$; $-1{,}4142136\ldots = \sqrt{2}$.

La unión de los números racionales e irracionales se denomina conjunto de números reales, $\mathbb{R}$.

Todo número real que no es *racional* se dice que es *irracional*.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ constituye un cuerpo conmutativo (o campo), por lo tanto podemos trabajar con las leyes del álgebra elemental. El conjunto de los números reales es ordenado según su magnitud, es decir, tal que para cualquier par: $x, y \in \mathbb{R}$ solo es satisfecha una y sólo una de las siguientes relaciones: $x < y$, $x = y$, $x > y$.

Los números reales se pueden representar mediante los puntos de un eje numérico.



Por definición, las desigualdades $-\infty < x < +\infty$ se cumplen siempre para cualquier número real x. Así pues, entre todos los números reales y todos los puntos del eje numérico existe una correspondencia biunívoca.

Una propiedad importante es: entre dos números reales cualquiera existen siempre números racionales e irracionales, así,

> Todo número irracional se puede expresar, con el grado de precisión que se desee, por medio de números racionales.

1.2. Intervalos y Entornos

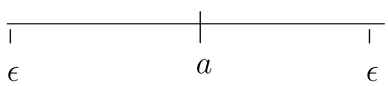
Un conjunto de números reales x que satisfacen:

i) $a < x < b \equiv (a, b)$ se denomina *intervalo abierto* (a y b son fijos).

ii) $a \leq x \leq b \equiv [a, b]$ se denomina *intervalo cerrado*.

iii) $a \leq x < b \ \underline{\vee} \ a < x \leq b \equiv [a, b) \ \underline{\vee} \ (a, b]$, se denomina intervalo *semiabierto*.

El intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ se denomina *entorno*-ϵ (o vecindad) del número a.

($\epsilon > 0$)  (centro a y radio ϵ).

El conjunto de números reales $x > M$ se llama *entorno* M del punto impropio $+\infty$.

El conjunto de números reales $x < M$ se llama *entorno* M del punto impropio $-\infty$.

1.3. Valor Absoluto / Módulo

El valor absoluto de un número x (denotado por $|x|$), satisface,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Algunas propiedades de los valores absolutos son:

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| \geq x$, $|xy| = |x|\,|y|$, $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$, $(y \neq 0)$.
3. $|x \pm y| \leq |x| + |y|$
4. $|x \pm y| \geq |x| - |y|$
5. $|x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$, $(a \geq 0)$
6. $|x| \geq \alpha \Leftrightarrow x \geq \alpha \;\veebar\; x \leq -\alpha$

Nota. El lector interesado encontrará más material en el texto de álgebra.

1.3.1. Problemas resueltos

1. Probar que si $0 < x < y \Rightarrow x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y$.

   Solución.
   Si $x < y \Rightarrow x + y < 2y \Rightarrow \frac{x+y}{2} < y$ (1)
   Si $0 < x < y \Rightarrow x^2 < xy \Rightarrow x < \sqrt{xy}$ (2)
   y como:

$$\begin{aligned} (x-y)^2 > 0 &\Rightarrow x^2 + y^2 > 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy > 4xy \\ &\Rightarrow (x+y)^2 > 4xy \Rightarrow x + y > 2\sqrt{xy} \\ &\Rightarrow \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} (3) \end{aligned}$$

   luego, por (1), (2) y (3), $x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y$.

2. Demuestre, dado $a \geq 0$ y $x > 0$, se tiene: $\sqrt{a} \leq \frac{ax^2+1}{2x}$ (acotación superior de raíces).

Solución.

De inmediato,

$$(\sqrt{ax^2} - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow ax^2 - 2\sqrt{a}x + 1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} \leq \frac{ax^2+1}{2x},$$

(la igualdad se cumple para $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$).

3. Demostrar que para todo $r \in Q^+$ que satisfaga $r^2 < 2$, siempre se puede hallar un número racional mayor $r + k$; $k > 0$ tal que $(r+k)^2 < 2$.

Solución.

Se puede suponer $k < 1 \Rightarrow k^2 < k$ y $(r+k)^2 = r^2 + 2rk + k^2 < r^2 + 2rk + k$, por lo tanto, basta con hacer $r^2 + 2rk + k = 2$, de donde $k = \frac{2-r^2}{2r+1}$.

4. Si r y s son números racionales con $s \neq 0$, y si x es irracional, entonces los siguientes números son todos irracionales: $x + r$, $x - r$, $r - x$, xs, $\frac{x}{s}$, $\frac{s}{x}$, $x \neq 0$.

Solución.

i) Supongamos que $(x + r) \in Q$, $x + r = p \Rightarrow x = p - r \Rightarrow x$ es racional ya que es la diferencia de dos números racionales, lo que contradice lo supuesto, luego $x + r$ es irracional.

ii) Supongamos $\frac{s}{x} \in Q$, $x \neq 0$, $\frac{s}{x} = t$, $t \neq 0$, así $x = \frac{s}{t}$, que es racional, lo que contradice lo supuesto, luego $\frac{s}{x}$ es irracional.
Las demás demostraciones son análogas.

5. Demuestre, $\forall n \in Z^+$, $(1 + \frac{r}{n})^n < (1 + \frac{r}{n+1})^{n+1}$, $r \in Z^+$.

Solución.

Considerando $a_1 = 1, a_2 = a_3 = \ldots = a_{n+1} = 1 + \frac{r}{n}$ y como:

$$
\begin{aligned}
\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i}{n+1} > \sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}} \quad &\Rightarrow \quad \frac{1+n(1+\frac{r}{n})}{n+1} > \sqrt[n+1]{(1+\frac{r}{n})^n} \\
&\Rightarrow \quad \frac{1+n+r}{n+1} > \sqrt[n+1]{(1+\frac{r}{n})^n} \\
&\Rightarrow \quad 1+\frac{r}{n+1} > \sqrt[n+1]{(1+\frac{r}{n})^n} \\
&\Rightarrow \quad (1+\frac{r}{n+1})^{n+1} > (1+\frac{r}{n})^n
\end{aligned}
$$

6. Demostrar: $|x+y| \leq |x|+|y|$.

Solución.

Sea $x+y \geq 0 \Rightarrow |x+y| = x+y \leq |x|+|y|$, ahora sea $x+y<0 \Rightarrow |x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) \leq |x|+|y|$.

7. Demostrar:

   i) $|x-y| \geq ||x|-|y||$

   ii) $|x+y| \geq ||x|-|y||$

Solución.

i) Sea $x-y=z$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad x = z+y \Rightarrow |x| = |z+y| \\
&\Rightarrow \quad |z+y| \leq |z|+|y| \Rightarrow |x| \leq |x-y|+|y| \\
&\Rightarrow \quad |x-y| \geq |x|-|y| \\
&\Rightarrow \quad -|x-y| \leq |y|-|x| \leq |y-x| = |x-y|
\end{aligned}
$$

y como $|x-y| \geq 0 \Rightarrow ||y|-|x|| \leq |x-y|$.

ii) Queda propuesto.

8. Demostrar que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Solución.

Supongamos que $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ es un número racional y que la fracción es irreducible, esto es, que p y q no tiene ningún factor común, y sea $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow p^2 = 2q^2$

entonces p^2 es divisible por 2 y luego p es divisible por 2, así $p = 2r$, $r \in Z \Rightarrow 4r^2 = 2q^2 \Rightarrow 2r^2 = q^2$. Luego q^2 es divisible por 2, y así resulta que q es también divisible por 2. Entonces p y q tienen un factor común, que es contrario a lo que habíamos supuesto, con lo que $\sqrt{2}$ es irracional.

9. Demostrar que $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ es un número irracional.

Solución.

Supongamos que $(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \in Q$, entonces $(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ es el cuociente de dos números racionales, de donde el número $\sqrt{2} = \frac{1}{2}[(\sqrt{3}+\sqrt{2}) - (\sqrt{3}-\sqrt{2})] \in Q$, lo que contradice la naturaleza irracional de $\sqrt{2}$ (ver problema anterior). Por lo tanto, la suposición es falsa y el número $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ es irracional.

10. Determine $\delta > 0$, para $|x-\sqrt{2}| < \delta$, $|y-\sqrt{3}| < \delta$ tal que $|(x+y)-(\sqrt{3}+\sqrt{2})| < 0,0005$.

Solución.

De inmediato:

$$|(x+y)-(\sqrt{3}+\sqrt{2})| = |(x-\sqrt{2})+(y-\sqrt{3})| \leq |x-\sqrt{2}|+|y-\sqrt{3}|,$$

luego, tomando $|x-\sqrt{2}| \leq \frac{0{,}0005}{2}$ y $|y-\sqrt{3}| < \frac{0{,}0005}{2}$ se tiene

$$|(x+y)-(\sqrt{3}+\sqrt{2})| < 0{,}0005$$

así, $\delta = \frac{0{,}005}{2}$.

11. Demuestre que $|x-x_0| < \text{mín}\left(1, \frac{\xi}{2(|y_0|+1)}\right)$ y $|y-y_0| < \frac{\xi}{2(|x_0|+1)}$, entonces $|xy - x_0y_0| < \xi$.

Solución.

Nótese que $a < \text{mín}(b,c) \Rightarrow a < b$ y $a < c$, luego:

$$|x-x_0| < \text{mín}\left(1, \frac{\xi}{2(|y_0|+1)}\right) \Rightarrow |x-x_0| < 1$$

y

$$|x-x_0| < \frac{\xi}{2(|y_0|+1)},$$

de donde:

$$|x - x_0| < 1 \Rightarrow |x| - |x_0| < |x - x_0| < 1 \Rightarrow |x| < 1 + |x_0| \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \text{luego,}\quad |xy - x_0y_0| &= |x(y-y_0) + y_0(x-x_0)| \leq \\ &\leq |x|\,|y-y_0| + |y_0|\,|x-x_0| \Rightarrow |xy - x_0y_0| \leq \\ &\leq (1+|x_0|)\tfrac{\xi}{2(|x_0|+1)} + |y_0|\tfrac{\xi}{2(|y_0|+1)} \end{aligned}$$

por (1.1) y las hipótesis

$$\Rightarrow |xy - x_0y_0| \leq \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2}\,\frac{|y_0|}{(|y_0|+1)};$$

pero,

$$\begin{aligned} |y_0| < |y_0| + 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{|y_0|}{|y_0|+1} < 1 \\ &\Rightarrow \quad |xy - x_0y_0| \leq \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} = \xi \end{aligned}$$

12. Determine δ_1 y δ_2, tales que:

$$|x - \sqrt{2}| < \delta_1 \quad \text{y} \quad |y - \sqrt{3}| < \delta_2 \Rightarrow |xy - \sqrt{2}\sqrt{3}| < 0{,}01$$

Solución.

Por problema anterior:

$$|xy - \sqrt{2}\sqrt{3}| \leq (1+\sqrt{2})|y - \sqrt{3} + \sqrt{3}|x - \sqrt{2}|, \quad \text{si} \quad |x - \sqrt{2}| < 1$$

pero como:

$$\sqrt{2} < 2 \quad \text{y} \quad \sqrt{3} < 2 \Rightarrow |xy - \sqrt{2}\sqrt{3}| \leq 3|y - \sqrt{3}| + 2|x - \sqrt{2}|$$

y como:

$$3|y - \sqrt{3}| + 2|x - \sqrt{2}| < 0{,}01,$$

se tiene:

$$\left.\begin{aligned} 3|y - \sqrt{3}| < \frac{0{,}01}{2} \quad &\Rightarrow \quad |y - \sqrt{3}| < \frac{0{,}01}{6} \\ 2|x - \sqrt{2}| < \frac{0{,}01}{2} \quad &\Rightarrow \quad |x - \sqrt{2}| < \frac{0{,}01}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow |xy - \sqrt{2}\sqrt{3}| < 0{,}01$$

Nótese que $|x - \sqrt{2}| < \dfrac{0{,}01}{4} \Rightarrow |x - \sqrt{2}| < |$ luego,

$$\delta_1 = \frac{0{,}01}{4} \qquad \text{y} \qquad \delta_2 = \frac{0{,}01}{6}.$$

13. Si $y_0 \neq 0$ y $|y - y_0| < \text{mín}\left(\dfrac{|y_0|}{2}\right), \dfrac{\xi}{2}|y_0|^2)$ entonces $|\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y_0}| < \xi; y \neq 0$.

Solución.

De inmediato

$$|y - y_0| < \frac{|y_0|}{2} \quad \text{y} \quad |y - y_0| < \frac{\xi}{2}|y_0|^2$$

y como

$$|y - y_0| = |y_0 - y|; |y_0| - |y| < |y_0 - y| < \frac{|y_0|}{2} \Rightarrow |y| > \frac{|y_0|}{2}$$

como $y_0 \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$, por tanto $\dfrac{1}{|y|} < \dfrac{2}{|y_0|}$, así:

$$|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}| = \frac{|y_0 - y|}{|y|\;|y_0|} < \frac{2}{|y_0|}\;\frac{1}{|y_0|}\;\frac{\xi|y_0|^2}{2} = \xi.$$

14. Demostrar que si $x, a \in \{\mathbb{R} - (-1, 1)\} \Rightarrow |\frac{1}{x} - \frac{1}{a}| \leq |x - a|$.

Solución.

$$|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}| = \frac{|a - x1}{|xa|};$$

como $x, a \in \{\mathbb{R} - (-1, 1)\} \Rightarrow |x| \geq 1$, $|a| \geq 1$, luego:

$$|xa| \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{|xa|} \leq 1 \Rightarrow \frac{|x - a|}{|xa|} \leq |x - a|.$$

15. Sustituir las interrogantes del siguiente enunciado por expresiones que encierren ξ, x_0, y_0 de tal manera que la conclusión sea válida.
Si $y_0 \neq 0$, $|y - y_0| <?$ y $|x - x_0| <?$ entonces $y \neq 0$ y $|\dfrac{x}{y} - \dfrac{x_0}{y_0}| < \xi$.

Solución.

$$\begin{aligned} \left|\frac{x}{y} - \frac{x_0}{y_0}\right| &= \left|\frac{y_0 x - x_0 y}{y y_0}\right| \\ &= \left|\frac{y_0(x - x_0) + x_0(y_0 - y)}{y y_0}\right| \leq \frac{|y_0|\;|x - x_0| + |x_0|\;|y - y_0|}{|y|\;|y_0|}. \end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned}|y-y_0| < \frac{|y_0|}{2} \quad &\Rightarrow \quad |y_0-y| < \frac{|y_0|}{2} \\ &\Rightarrow \quad |y_0|-|y| < |y_0-y| < \frac{|y_0|}{2} \\ &\Rightarrow \quad |y| > \frac{|y_0|}{2}\end{aligned}$$

Así,

$$\left|\frac{x}{y}-\frac{x_0}{y_0}\right| \leq \frac{2(|y_0|\ |x-x_0|+|x_0|\ |y-y_0|)}{|y_0|^2} = \frac{2}{|y_0|}|x-x_0| + \frac{2|x_0|}{|y_0|^2}|y-y_0|$$

de donde:

$$\left.\begin{array}{lcl} |y-y_0| & < & \dfrac{|y_0|^2\xi}{4|x_0|} \\ |x-x_0| & < & \dfrac{|y_0|\xi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\frac{x}{y}-\frac{x_0}{y_0}\right| < \xi$$

luego,

$$|y-y_0| < \text{mín}\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{|y_0|^2\xi}{4|x_0|}\right)$$

y

$$|x-x_0| < \frac{|y_0|\xi}{4},$$

además de

$$|y-y_0| < \frac{|y_0|}{2}$$

se tiene como $y_0 \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$.

16. Demostrar que si $|x-x_0| < \dfrac{\xi}{2}$ e $|y-y_0| < \dfrac{\xi}{2}$, entonces:

   a) $|(x+y)-(x_0+y_0) < \xi$
   b) $|(x-y)-(x_0-y_0) < \xi$.

Solución.

a) Como $|x-x_0| < \dfrac{\xi}{2}$ e $|y-y_0| < \dfrac{\xi}{2}$ sumando:

$$|x-x_0|+|y-y_0| < \xi \Rightarrow |x-x_0+y-y_0| < \xi$$

de donde

$$|(x+y)-(x_0+y_0)| < \xi.$$

b) Se sabe que $|y - y_0| = |y_0 - y| < \dfrac{\xi}{2}$; $|x - x_0| < \dfrac{\xi}{2}$, sumando:

$$\begin{aligned} &|x - x_0 + y_0 - y| < |x - x_0| + |y_0 - y| < \epsilon \Rightarrow \\ &|(x - y) - (x_0 - y_0)| < \xi \end{aligned}$$

17. Determinar los valores de x que satisfacen

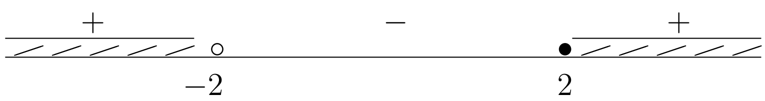
a) $\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right| = \dfrac{x-2}{x+2}$

b) $|x^2 - 4x + 3| = -(x^2 - 4x + 3)$

c) $|(x^2 + 4x + 9) + (2x - 3)| = |x^2 + 4x + 9| + |2x - 3|$

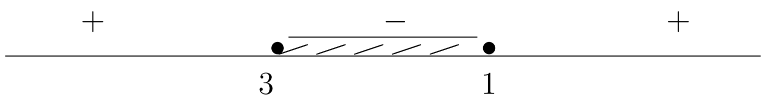
Solución.

a) La igualdad es válida para $\dfrac{x-2}{x+2} \geq 0 \Rightarrow$



es decir, $x < -2 \veebar x \geq 2$.

b) Análogamente, cuando $x^2 - 4x + 3 \leq 0 \Rightarrow$



es decir, $1 \leq x \leq 3$.

c) La igualdad $|a+b| = |a| + |b|$ es válida si y sólo si ambos sumandos tienen el mismo signo, y como

$$x^2 + 4x + 9 > 0, \quad \forall\ x \ \ (a > 0, \Delta < 0),$$

esto obliga a:

$$2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}.$$

18. Hallar las raíces de las ecuaciones siguientes:

   a) $x^2 + |x| - 6 = 0$

   b) $|\cos x| = \cos x + 1$

   c) $|\operatorname{sen} x| = \operatorname{sen} x + 3$

   Solución.

   a)
   $$|x|^2 + |x| - 6 = 0 \Rightarrow (|x| + 3)(|x| - 2) = 0 \Rightarrow |x| = -3,$$
   no da solución $\vee$ $|x| = 2 \Rightarrow x = \pm 2$.

   b) Como $-1 \leq \cos x \leq 1$, esta ecuación solo se cumplirá sii $-1 \leq \cos x \leq 0$, por lo tanto:
   $$-\cos x = \cos x + 1$$
   de donde
   $$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}; \quad k \in Z.$$

   c) No tiene raíces ya que $|\operatorname{sen} x| \leq 1 \neq \operatorname{sen} x + 3$, $\forall\, x$.

19. Para $n > 1$, demostrar $2(\sqrt{n} - 1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1$.

   Solución.

   Previo,
   $$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$
   y $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, luego:
   $$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$
   análogamente Ud. puede demostrar
   $$\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$
   así:
   $$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

de donde para $n = 2, 3, \dots, n$ se obtiene:

$2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} < \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} - 2\sqrt{1}$

$2\sqrt{4} - 2\sqrt{3} < \dfrac{1}{\sqrt{3}} < 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$

$2\sqrt{5} - 2\sqrt{4} < \dfrac{1}{\sqrt{4}} < 2\sqrt{4} - 2\sqrt{3}$

. . . .

$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$

y sumando obtenemos:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 2 \Rightarrow$$

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1, \text{ pero como}$$

$$\sqrt{n+1} > \sqrt{n} \text{ y } 3 > 2\sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{n} - 2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1$$

20. Si (a, b) y (c, d) son entornos respectivos de α y β, demuéstrese que:

i) $(a + c, b + d)$ es un entorno de $\alpha + \beta$

ii) $(\lambda a, \lambda b)$ es un entorno de $\lambda\alpha$, $\forall\ \lambda > 0$.

iii) $(a - d, b - c)$ es un entorno de $\alpha - \beta$

iv) (ac, bd) es un entorno de $\alpha\beta$, si $c > 0$

v) Si $c > 0$, entonces $(\dfrac{a}{d}, \dfrac{b}{c})$ es un entorno de $\dfrac{\alpha}{\beta}$, $c, d, \beta \neq 0$.

Solución.

i) Como $a < \alpha < b$ y $c < \beta < d$, entonces $a + c < \alpha + \beta < b + d$

ii) $a < \alpha < b = a\lambda < \alpha\lambda < b\lambda\ \forall\ \lambda > 0$

iii) iv) v) Igualmente inmediatas.

21. *a*) Si $x > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, demuestre que $\dfrac{a+x}{b+x}$ está entre 1 y $\dfrac{a}{b}$.

b) Con más generalidad, si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones distintas con $b > 0$ y $d > 0$, demuéstrese que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Solución.

a) Supongamos $a > b \Rightarrow a + x > b + x$ como
$b + x > 0 \Rightarrow 1 < \dfrac{a+x}{b+x}$ (1);
$a > b \Rightarrow ax > bx$
$ax + ab > bx + ab \Rightarrow a(b + x) > b(a + x) \Rightarrow \dfrac{a+x}{b+x} < \dfrac{a}{b}$ (2)
Así, por (1) y (2) se tiene lo pedido.

b) Resulta análogo.

22. Demostrar que el conjunto de todos los números racionales de la forma $\frac{p^2}{q^2}$ donde $p, q \in Z$, $(q \neq 0)$ es denso en el conjunto de todos los números reales positivos.

Solución.
Sea p para un q dado, tal que:
$p^2 \leq xq^2 < (p + 1)^2$ (1)
$\Rightarrow \dfrac{p^2}{q^2} \leq x < \dfrac{p^2 + 2p + 1}{q^2} \Rightarrow 0 \leq x - \dfrac{p^2}{q^2} < \dfrac{2p+1}{q^2}$

pero de (1):

$p \leq \sqrt{x}q \Rightarrow 0 \leq x - \dfrac{p^2}{q^2} < \dfrac{2p+1}{q^2} \leq \dfrac{2\sqrt{x}q}{q^2} + \dfrac{1}{q^2}$

Así,

$$0 \leq x - \frac{p^2}{q^2} \leq \frac{2\sqrt{x}}{q} + \frac{1}{q^2}$$

, con lo que, para un valor x fijo, la diferencia entre x y $\frac{p^2}{q^2}$ se puede hacer tan pequeña como se quiera al tomar q suficientemente grande.

23. Encuentre los valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades:

a) $[x] \leq \dfrac{x}{2}$, se denota por $[x]$ la parte entera de x, es decir, $[x]$ es el entero para el que se cumple $x-1 < [x] \leq x$.

b) $\operatorname{sen} x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\dfrac{x-a}{x+a} \geq 0$

d) $\left[\frac{x^2+1}{x(x+2}\right] = 0$

Solución.

a) Primera condición: $x - 1 \leq \dfrac{x}{2} \Rightarrow x \leq 2$.
Si $x = 2 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow 2 \leq 1$ falso.
Si $1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} \Rightarrow x \geq 2$ contradicción.
Si $0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{x}{2}$, así $0 \leq x < 1$.
Análogamente para $-1 \leq x < 0$, $-2 \leq x < -1, \ldots$ con lo que $[x] \leq \dfrac{x}{2}$, $\forall\, x \in (-\infty, 1)$.

b) $\operatorname{sen} x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, la igualdad se verifica para $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$, $x_2 = \dfrac{3\pi}{4}$, de inmediato $\operatorname{sen} x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow\ \forall\, x \in [2k\pi + \dfrac{\pi}{4}, 2k\pi + \dfrac{3\pi}{4}]$; $k \in Z$.

c) Si $a > 0 \Rightarrow \begin{array}{ccccc} + & \circ & - & \bullet & + \\ \hline & -a & & a & \end{array} \Rightarrow (-\infty, -a) \cup [a, +\infty)$

Si $a < 0 \Rightarrow \begin{array}{ccccc} + & \bullet & - & \circ & + \\ \hline & a & & -a & \end{array} \Rightarrow (-\infty, a) \cup [-a, +\infty)$[1]

Si $a = 0 \Rightarrow \forall\, x, x \neq 0$.

d) $\left[\dfrac{x^2+1}{x(x+2}\right] = 0 \Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{x^2+1}{x(x+2)} < 1$

e) I) $\dfrac{x^2+1}{x(x+2)} \geq 0 \Rightarrow x(x+2) > 0$, pues $x^2 + 1 \geq 1 > 0$, luego $x < -2 \ \vee\ x > 0$ (1)

[1]Ver solución de estas inecuaciones en Ejercicios de Algebra I por el mismo autor.

II) $\dfrac{x^2+1}{x(x+2)} < 1 \Rightarrow \dfrac{1-2x}{x(x+2)} < 0 \Rightarrow -2 < x < 0 \ \vee \ x > \frac{1}{2}$ (2)

Finalmente de (1) y (2) $\Rightarrow x > \dfrac{1}{2}$

24. Demuéstrese que si $a \leq x \leq b$, entonces $|x| \leq |a| + |b|$

Solución.

De inmediato:

$$b \leq |a| + |b| \quad \text{y} \quad -a \leq |a| + |b| \Rightarrow -(|a| + |b|) \leq a$$

entonces si:

$$a \leq x \leq b \Rightarrow -(|a| + |b|) \leq x \leq |a| + |b| \Rightarrow |x| \leq |a| + |b|$$

25. Demostrar:

a) $x^2 + x + y^2 \geq 0$

b) $x^{2n} + x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 + \ldots + y^{2n} \geq 0$

c) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 \geq 0$

¿Cuándo se cumple la igualdad?

Solución.

a) De inmediato $x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$, la igualdad se verifica para $x = y = 0$.

b) Análogamente: $x^{2n} + x^{2n-1}y + \ldots + y^{2n} = \frac{x^{2n+1} - y^{2n+1}}{x-y} > 0$, $(x \neq y)$. Si

$$x = y \Rightarrow x^{2n} + x^{2n-1}y + \ldots + y^{2n} = (2n+1)x^{2n} > 0$$

la igualdad se verifica si $x = y = 0$.

c) $$\begin{aligned} x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 &= (x^2 - x + 1)(x^2 - 2x + 1) \\ &= [(x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}](x-1)^2 > 0 \end{aligned}$$

la igualdad se verifica solamente para $x = 1$.

26. Demostrar:

a) $|x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| \geq a_3 - a_1$ si $a_3 > a_2 > a_1$. ¿Para qué valores de x se cumple la igualdad?

b) Encuéntrese el valor máximo de y para el que se tiene, $\forall\, x$ que:

$$|x-a_1|+|x-a_2|+\ldots+|x-a_n|\geq y$$

si $a_1<a_2<\ldots<a_n$. ¿En qué condiciones se cumple la igualdad?

Solución.

a) $|x-a_1|+|a_2-x|\geq|a_2-a_1|$
$|x-a_2|+|a_3-x|\geq|a_3-a_2|$
$|x-a_3|+|a_1-x|\geq|a_1-a_3|$,
sumando miembro a miembro:
$2(|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|)\geq|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+|a_1-a_3|$
$=a_2-a_1+a_3-a_2-(a_1-a_3)=2(a_3-a_1)=a_3-a_1$
La igualdad se cumple para $x=a_2$.

b) Análogamente, si n es par, $n=2p$ entonces, $p\in\mathbb{N}$.
$y=(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_{p+1})-(a_1+a_2+\ldots+a_p)$
y la igualdad se verifica para $a_p\leq x\leq a_{p+1}$.
Si n es impar, $n=2p-1$
$y=(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_{p+1})-(a_1+a_2+\ldots+a_{p-1})$
y la igualdad se cumple para $x=a_p$.

1.4. Problemas Propuestos

1. Hallar la parte entera de
$x=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{250000}}$

Respuesta. Ver problema resuelto N° 19. $[x]=998$.

2. Demostrar las siguientes desigualdades:

a) $n!<(\dfrac{n+1}{2})^n;\ n\geq 2$

b) $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{m}<\dfrac{1}{\sqrt{m}}+\dfrac{1}{\sqrt{m+1}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{m-1}$

c) $2(\sqrt{n+1}-1) < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$

d) $x > 0$, $x^3 + \dfrac{1}{x^3} \geq x^2 + \dfrac{1}{x^2}$; para que valor de x se mantiene la igualdad.

3. Demostrar que:

   a) $n \in \mathbb{N}$, $x \geq -1$ entonces $(1+x)^n \geq 1 + nx$

   b) $n \in \mathbb{N}$, $0 < n < 1$, $x \geq -1$ entonces $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

   c) $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+}$

4. Demostrar para $-1 < \alpha < 0$.

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^{\alpha} < \frac{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

5. Dados $ab, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, demostrar que $Q(x) = ax^2 + 2bx + c$ tiene como su menor valor a $\frac{ac-b^2}{a}$ cuando $x = -\frac{b}{a}$. ¿En que condiciones alcanza su mayor valor? Suponiendo que ahora $Q(x) \geq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, ¿que puede decir de los coeficientes a, b y c?.

6. Hallar el conjunto solución de:

   a) $x^2 - 3x + 2 < 0$; ¿Cuál es el valor mínimo de $f(x) = x^2 - 3x + 2$

   b) $(x-a)(x-b)(x-c) > 0$; $a < b < c$

   c) $|1-x| - x \geq 0$

   d) $|x + \frac{1}{x}| \leq 6$

   e) $x < x^2$

   f) $\sqrt{x^2+1} \geq 2x + 1$

   g) $|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12$

   h) $|\frac{x-1}{x+1}| = \frac{x-1}{x+1}$

   i) $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$

   j) $|(x^4-4) - (x^2+2)| = |x^4-4| - |x^2+2|$

   k) $|x^2 - x - 6| = |x+2|\ |x-3|$

   l) $|3x-5| - |2x+3| > 0$

   m) $|x| + x < |$

   n) $|x^2 - 5x| > |x^2| - |5x|$

ñ) $|x^2 - x| + x > 1$

Respuesta.

a) $(1, 2)$, $-\frac{1}{4}$

b) $(a, b) \cup (c, +\infty)$

c) $(-\infty, \frac{1}{2}]$

d) $(3-\sqrt{8}, 3+\sqrt{8}) \cup (-3-\sqrt{8}, -3+\sqrt{8})$

e) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

f) $(-\infty, 0]$

g) $(3, 4)$

h) $(-\infty, -1) \cup ([1, +\infty)$

i) $(\frac{5}{2}, 3)$

j) $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

k) $(-\infty, +\infty)$

l) $(-\infty, \frac{2}{5}) \cup (8, +\infty)$

m) $(-\infty, \frac{1}{2})$

n) $(-\infty, 0) \cup (0, 5)$
Sugerencia: se cumple la desigualdad $|x - y| > |x| - |y|$ cuando x e y tienen signos opuestos o cuando $|x| < |y|$.

o) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

7. Demostrar que:

$$|\sum_{k=1}^{n} c_k x_k - \sum_{k=1}^{n} c_k a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |c_k| \, |x_k - a_k|$$

8. *a)* $|(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y) - (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)| \leq |x - a| + |y - b|$

   b) $|\operatorname{sen}^2 3x - \operatorname{sen}^2 3a| \leq 6|x - a|$

9. Si a y b son reales tal que $a < b$, entonces existe $q \in Q$ tal que $a < q < b$.

10. Demuestre que el conjunto S de los irracionales es denso en $\mathbb{R}$.

11. Demostrar que para todo número racional positivo r que satisfaga la condición $r^2 > 2$, siempre se puede hallar un número racional más pequeño $r - k$, $(k > 0)$ para el cual $(r - k)^2 > 2$.

12. Hallar todos los valores racionales de x para los cuales $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ sea un número racional.

13. Sean a, b, c, d racionales. Demuestre que:

    $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Rightarrow a = c \wedge b = d.$

    Demuestre que si a y b son racionales no ambos nulos, entonces existen racionales c y d tales que:

    $$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = 1$$

14. Sea $r \in \mathbb{R}$, dado $\epsilon > 0$, demuestre que existe un racional q, tal que:

    $$|q - r| < \epsilon.$$

15. Si α y β son racionales positivos con: $\alpha < \beta$. Demuestre que existe un racional positivo q tal que $\alpha < q^2 < \beta$.

16. Probar que $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$ es irracional para todo $n \in \mathbb{N}$.

17. Sean a y b enteros positivos. Probar que $\sqrt{2}$ siempre se encuentra entre las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{a+2b}{a+b}$. ¿Cuál está más cerca de $\sqrt{2}$?

18. Sean a y b reales positivos, demuestre que existe un número natural n tal que: $na > b$.

19. Demostrar la desigualdad de Cauchy

    $$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)$$