QUINTA EDICIÓN

Matemáticas aplicadas
a la Administración y a la Economía

ARYA | LARDNER | IBARRA

PEARSON

MATEMÁTICAS APLICADAS
a la administración y a la economía

Quinta edición

Jagdish C. Arya
Robin W. Lardner
Departament of Mathematics, Simon Fraser University

Con la colaboración de

Víctor Hugo Ibarra Mercado
Universidad Anáhuac-México Norte

TRADUCCIÓN Y REVISIÓN TÉCNICA:
Víctor Hugo Ibarra Mercado
Universidad Anáhuac-México Norte

Prentice Hall

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

ARYA, JAGDISH C. y LARDNER, ROBIN W.

Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía. Quinta edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2009

ISBN: 978-607-442-302-0
Área: Universitarios

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 832

Edición en español
Editor: Rubén Fuerte Rivera
e-mail: ruben.fuerte@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Felipe Hernández Carrasco
Supervisor de producción: José D. Hernández Garduño

Edición en inglés:
Editor-in-chief: Tim Bozik
Senior editor: Steve Conmy
Executive editor: Priscilla McGeehon
Senior managing editor: Jeanne Hoeting
Production editor: Nicholas Romanelli
Design director: Florence Dara Silverman
Interior design: Patricia McGowan
Prepress buyer: Paula Massenaro
Manufacturing buyer: Lori Bulwin

QUINTA EDICIÓN VERSIÓN IMPRESA, 2009
QUINTA EDICIÓN E-BOOK, 2009

ISBN VERSIÓN IMPRESA 978-607-442-302-0
ISBN E-BOOK 978-607-442-305-1

PRIMERA IMPRESIÓN
Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 12 11 10 09

Prentice Hall
es una marca de

PEARSON

www.pearsoneducacion.net ISBN 978-607-442-302-0

A

Niki y Shanti

Contenido

PARTE DOS
MATEMÁTICAS FINITAS

Prefacio a la nueva edición

En esta versión se conservó y reforzó la orientación de las aplicaciones a la administración y la economía, sin descuidar aplicaciones generales a otras áreas, tales como ciencias sociales, biológicas y físicas, a fin de que la obra pueda seguir siendo útil a una amplia gama de estudiantes.

Las aplicaciones referidas a estas áreas se han integrado por completo en el desarrollo de la obra; a veces una aplicación particular se utiliza para motivar ciertos conceptos matemáticos; en otros casos, determinado resultado matemático se aplica, ya sea de inmediato o en una sección subsecuente, a un problema concreto, digamos, de análisis empresarial. Por lo general, las aplicaciones se ofrecen en estrecha cercanía con el tratamiento del concepto matemático específico en cuestión. No obstante, cabe aclarar que las matemáticas de esta obra se presentan inicialmente en un estilo "limpio", es decir, fuera del contexto de cualquier aplicación particular. Sólo después de establecer cada resultado en un nivel puramente algebraico, se aplica éste a un problema práctico.

Aunque se conservaron las características principales del libro, que han hecho de esta obra una de las preferidas por muchos profesores y alumnos, los cambios más importantes realizados son los siguientes.

- Se revisaron y actualizaron las lecturas de inicio de capítulo. En ellas se presentan casos prácticos probados en el salón de clases.
- Para que la obra tuviera una mayor unidad, ahora en *todos* los capítulos se presenta un caso práctico como lectura inicial. Una vez que se estudia el material del mismo, la solución del caso se presenta al término del capítulo, y se concluye con algunas preguntas que tienen la finalidad de estimular el intercambio de ideas entre profesores y alumnos, así como conducir a un análisis más profundo del tema, o bien, sirven de introducción para el material que se estudiará en los siguientes capítulos.

- Prácticamente todos los ejercicios de la sección *Problemas de repaso del capítulo* se actualizaron y, al igual que con los ejercicios de cada sección, la solución de los problemas con número impar se incluye al final del texto.
- En varios ejercicios de la sección *Problemas de repaso del capítulo* se presentan conceptos nuevos, cuyo estudio amplía lo expuesto en el texto. Se recomienda resolver estos problemas con la finalidad de ampliar la teoría expuesta; sin embargo, si se omite la resolución de éstos, se puede continuar con los siguientes temas sin mayor dificultad.
- Con base en los excelentes comentarios y observaciones de muchos usuarios de esta obra, se hizo una revisión cuidadosa de todo el libro, con la finalidad de enmendar las erratas de la versión anterior.

Como antes, el libro está orientado a la enseñanza de las aplicaciones y a la utilización de las matemáticas más que a las matemáticas puras. No se hace hincapié en las demostraciones de los teoremas ni se da a éstas un lugar predominante en el desarrollo del texto. Por lo regular, después de enunciar un teorema, procedemos a ilustrarlo y a analizar su importancia con varios ejemplos, y luego se da la demostración. Las demostraciones más difíciles se han omitido por completo.

Este relativo desinterés por los pormenores matemáticos da a los estudiantes el tiempo necesario para mejorar sus habilidades en el uso de diversas técnicas. Según nuestra experiencia, los estudiantes que aprenden a dominar las técnicas por lo común desarrollan una intuición razonablemente clara del proceso, y la carencia de un completo rigor matemático no constituye una grave deficiencia.

Distribución del contenido

El libro se divide en tres partes. La Parte Uno presenta el álgebra previa al cálculo; la Parte Dos, las matemáticas finitas; y la Parte Tres, el cálculo propiamente dicho. Las partes Dos y Tres son casi totalmente independientes entres sí y pueden estudiarse en orden distinto.

El álgebra previa al cálculo abarca los primeros seis capítulos del libro. En los primeros tres de ellos presentamos un repaso bastante detallado del álgebra de nivel intermedio y de la solución de ecuaciones y desigualdades en una variable. El resto de la primera parte consta de un capítulo sobre funciones, y otro sobre exponenciales y logaritmos.

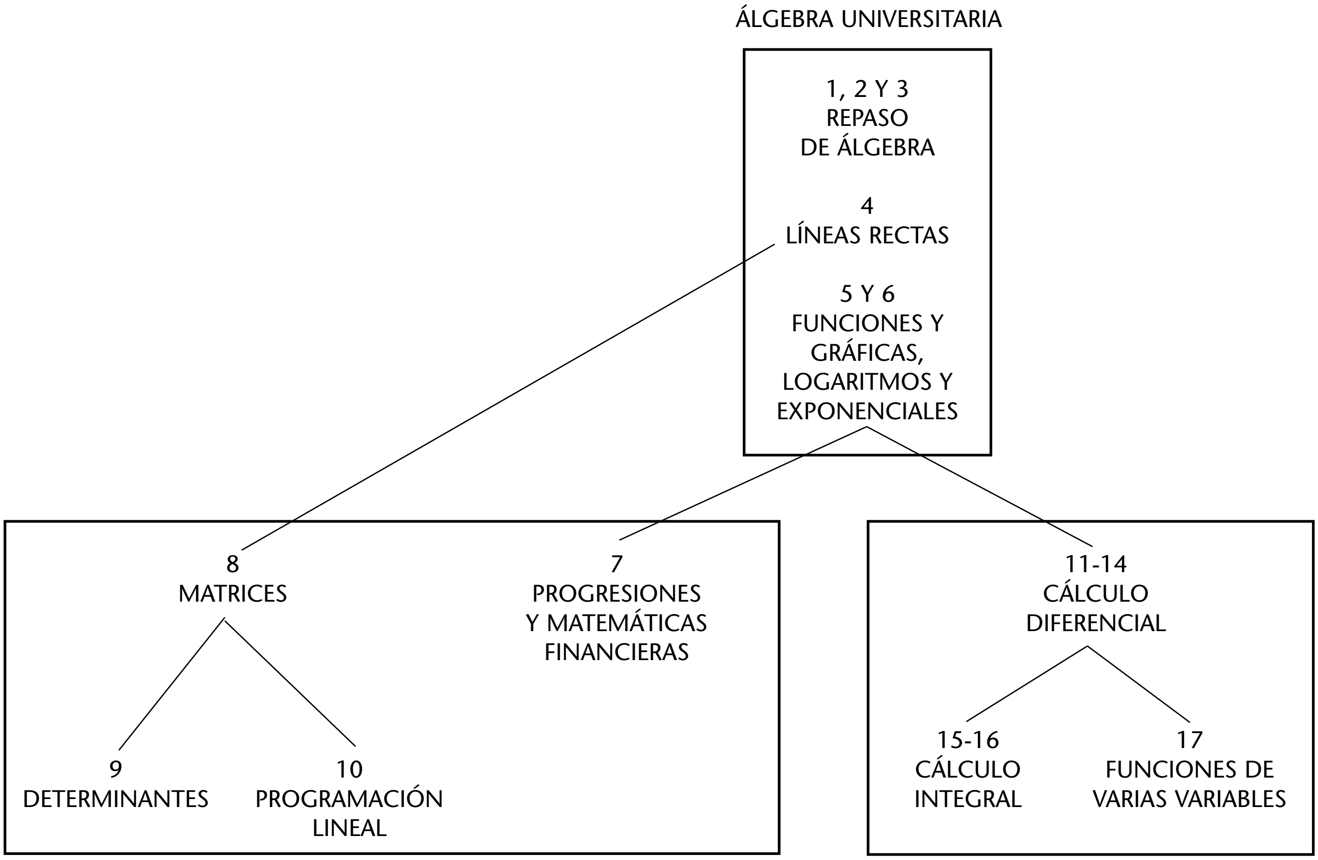
La parte del libro dedicada a las matemáticas finitas se compone por sí misma en dos partes casi independientes: el capítulo 7, sobre matemáticas financieras; y los capítulos 8, 9 y 10 sobre matrices, determinantes y programación lineal. El capítulo 10, dedicado a la programación lineal, exige conocer un poco lo tratado en el capítulo 8, pero no requiere lo referente al capítulo 9.

Los capítulos 11 al 14 tratan el cálculo diferencial en una variable. Los primeros dos temas de estos dos capítulos explican las antiderivadas y se ofrece una opción sobre cómo enfocar la integración. Después de exponer el método de sustitución, de inmediato se presentan las tablas de integrales, de modo que el profesor que desee pasar rápidamente a las aplicaciones pueda hacerlo.

Por otro lado, si el profesor desea dedicar más tiempo a las técnicas de integración, puede posponer la sección sobre las tablas y tratar primero la sección final del capítulo 15. El segundo de estos capítulos estudia la integral definida y sus aplicaciones al cálculo de áreas, análisis gerencial y ecuaciones diferenciales.

El capítulo final constituye una introducción al cálculo diferencial de funciones de variables.

Seleccionando capítulos y/o secciones de capítulos en forma apropiada, el libro puede adaptarse a una gran variedad de cursos. Por ejemplo, puede impartirse adecuadamente con cursos de álgebra superior, álgebra y matemáticas finitas, álgebra y cálculo o matemáticas finitas y cálculo, si se seleccionan los capítulos pertinentes. El siguiente diagrama ilustra la estructura del libro en cuanto a requisitos previos de conocimientos.



Por último, queremos manifestar nuestro agradecimiento al incontable número de personas que nos han hecho invaluables comentarios sobre las versiones anteriores del texto. Los cambios realizados en esta *nueva edición* están significativamente influidos por esta información. Consideramos de gran valor las aportaciones de nuestros usuarios, por lo cual, reiteramos la invitación para que nos hagan llegar sus comentarios o sugerencias a la dirección de correo electrónico *editorialmx@pearsoned.com*

CAPÍTULO 1

Álgebra

Álgebra y algunos cálculos mentales

Una compañera nos sorprendió cuando, en una clase, necesitábamos calcular el área de un cuadrado de 75 cm por lado y ella de inmediato respondió que el área era de 5625 cm^2. El profesor intrigado le preguntó que cómo había hecho la operación tan rápido; a lo que ella contestó diciendo que al 7 le sumó 1, cuyo resultado es 8, multiplicó éste (el 8) por 7 obteniendo 56 y colocó el número 25 después del 56. Así obtuvo la respuesta. Nuestra compañera agregó que este método lo había aprendido de su papá, quien le comentó que sólo servía para números que terminaran en 5. El profesor se quedó pensativo probando con varios números y, después de un rato, nos explicó lo siguiente:

"Este caso, realizar una operación con rapidez, se puede explicar con el apoyo del álgebra". "Veamos —dijo—, para representar un número que termine en 5, indicamos con d el número de decenas y así formamos el número:

$$10d + 5$$

Al elevar este número al cuadrado —recuerden la forma de elevar un binomio al cuadrado—, obtenemos:

$$(10d + 5)^2 = 100d + 100d + 25$$

Si factorizamos los primeros dos términos del lado derecho, cuyo factor común es $100d$, tenemos:

$$(10d + 5)^2 = 100d(d + 1) + 25$$

Con esto podemos entender la 'regla' para elevar con rapidez al cuadrado un número que termine en 5. Para ilustrar el uso de esta regla, apliquémosla al ejemplo siguiente:

Elevemos $(35)^2$.

a) Nos fijamos en el número de decenas, en este caso, tres.

b) Éste lo multiplicamos por el dígito que es uno mayor a él; cuatro.

c) Formamos el número que inicia con el resultado anterior, 12, y termina con 25; es decir, 1225".

El profesor terminó comentando sobre la utilidad del álgebra y de todo lo que nos puede ayudar en nuestra vida profesional.

Con ayuda de esta regla, realice las siguientes operaciones:

1. 25^2 **2.** 65^2 **3.** 95^2

4. 115^2 **5.** 7.5^2 **6.** 105^2

Objetivo del capítulo

Este capítulo revisa las técnicas fundamentales de álgebra. Está dirigido a los estudiantes que, por una u otra razones, lo necesiten para refrescar sus habilidades algebraicas básicas.

TEMARIO

■ 1-1 LOS NÚMEROS REALES

Empezaremos dando un breve esbozo de la estructura de los números reales. Los números 1, 2, 3, etc., se denominan **números naturales**. Si sumamos o multiplicamos dos números naturales cualesquiera, el resultado siempre es un número natural. Por ejemplo, $8 + 5 = 13$ y $8 \times 5 = 40$; la suma 13 y el producto 40 son números naturales. En cambio, si restamos o dividimos dos números naturales, el resultado *no* siempre es un número natural. Por ejemplo, $8 - 5 = 3$ y $8 \div 2 = 4$ son números naturales; pero $5 - 8$ y $2 \div 7$ no son números naturales. Así, dentro del sistema de números naturales, siempre podemos sumar y multiplicar, pero no siempre podemos restar o dividir.

Con la finalidad de superar la limitación de la sustracción, extendemos el sistema de los números naturales al sistema de los **números enteros**. Los enteros incluyen los números naturales, los negativos de cada número natural y el número cero (0). De este modo, podemos representar el sistema de los enteros mediante

$$\ldots, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots$$

Es claro que los números naturales también son enteros. Si sumamos, multiplicamos o restamos dos enteros cualesquiera, el resultado también es un entero. Por ejemplo, $-3 + 8 = 5$, $(-3)(5) = -15$ y $3 - 8 = -5$ son enteros. Pero aún no podemos dividir un entero entre otro y obtener un entero como resultado. Por ejemplo, vemos que: $8 \div (-2) = -4$ es un entero, pero $-8 \div 3$ no lo es. Por tanto, dentro del sistema de los enteros, podemos sumar, multiplicar y restar pero no siempre podemos dividir.

Para superar la limitación de la división, extendemos el sistema de los enteros al sistema de los **números racionales**. Este sistema consiste de todas las fracciones a/b, donde a y b son enteros con $b \neq 0$.

Un número es racional si podemos expresarlo como la razón de dos enteros con denominador distinto de cero. Así $\frac{8}{3}$, $-\frac{5}{7}$, $\frac{0}{3}$ y $6 = \frac{6}{1}$ son ejemplos de números racionales. Podemos sumar, multiplicar, restar y dividir cualesquiera dos números racionales (exceptuando la división entre cero)* y el resultado siempre es un número racional. De esta manera las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética: adición, multiplicación, sustracción y división son posibles dentro del sistema de los números racionales.

Cuando un número racional se expresa como un decimal, los decimales terminan o presentan un patrón que se repite indefinidamente. Por ejemplo, $\frac{1}{4} = 0.25$ y $\frac{93}{80} = 1.1625$ corresponden a decimales que terminan, mientras que $\frac{1}{6} = 0.1666\ldots$ y $\frac{4}{7} = 0.5714285714285\ldots$ corresponden a decimales con patrones que se repiten.

También existen algunos números de uso común que no son racionales (es decir, que no pueden expresarse como la razón de dos enteros). Por ejemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y π no son números racionales. Tales números se denominan **números irracionales**. La diferencia esencial entre los números racionales y los irracionales se advierte en sus expresiones decimales. Cuando un número irracional se presenta por me-

*Véase el parágrafo final de esta sección.

dio de decimales, los decimales continúan indefinidamente sin presentar ningún patrón repetitivo. Por ejemplo, con diez cifras decimales $\sqrt{2} = 1.4142135623...$ y $\pi = 3.1415926535...$ No importa con cuántos decimales expresemos estos números, nunca presentarán un patrón repetitivo, en contraste con los patrones que ocurren en el caso de los números racionales.

☛ **1.** ¿Qué tipo de número es cada uno de los siguientes?:

a) $\dfrac{-3}{2}$

b) $(-\sqrt{2})^2$

c) $\dfrac{\pi}{2}$

El término **número real** se utiliza para indicar un número que es racional o irracional. El sistema de los números reales consta de todas las posibles expresiones decimales. Aquellos decimales que terminan o se repiten corresponden a los números racionales, mientras que los restantes corresponden a los números irracionales. ☛ **1**

Geométricamente, los números reales se pueden representar por los puntos sobre una línea recta denominada **recta numérica**. Con la finalidad de hacer esto, seleccionemos un punto arbitrario O sobre la línea que represente al número cero. Los números positivos se representan entonces por los puntos a la derecha de O y los negativos por los puntos a la izquierda de O. Si A_1 es un punto a la derecha de O tal que OA_1 tiene longitud unitaria, entonces A_1 representa al número 1. Los enteros 2, 3, . . . , n, . . . están representados por los puntos $A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$, están a la derecha de O y son tales que

$$OA_2 = 2OA_1, \quad OA_3 = 3OA_1, \quad \ldots, \quad OA_n = nOA_1, \quad \ldots$$

De manera similar, si $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$, son los puntos a la izquierda de O tales que las distancias $OB_1, OB_2, OB_3, \ldots$, son iguales a las distancias $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n, \ldots$, respectivamente, entonces los puntos $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n, \ldots$, representan a los números negativos $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$ En esta forma, todos los enteros pueden representarse mediante puntos sobre la recta numérica. (Véase la figura 1).

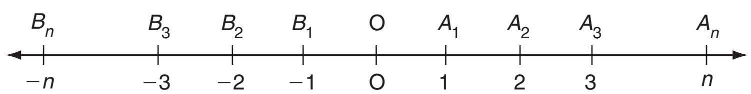


FIGURA 1

Los números racionales pueden representarse por puntos sobre la recta numérica que están situados un número apropiado de unidades fraccionarias a partir de O. Por ejemplo, el número $\frac{9}{2}$ está representado por el punto situado cuatro unidades y media a la derecha de O y $-\frac{7}{3}$ está representado por el punto que está situado dos unidades y un tercio a la izquierda de O. De manera similar, todo número racional puede representarse por un punto sobre la línea.

Se deduce que todo número *irracional* también puede representarse por un punto sobre la recta numérica. En consecuencia, todos los números reales, tantos los racionales como los irracionales, pueden representarse por tales puntos. Más aún, cada punto sobre la recta numérica corresponde a uno y sólo un número real. Debido a esto, es bastante común el uso de la palabra *punto* con el significado de *número real*.

Respuesta *a*) racional, real; *b*) natural, entero, racional, real; *c*) irracional, real.

Propiedades de los números reales

Cuando dos números reales se suman, el resultado siempre es un número real; de manera similar, cuando dos números reales se multiplican, también el resultado es un número real. Estas dos operaciones de adición y multiplicación son fundamentales en el sistema de los números reales y poseen ciertas propiedades que en breve enunciaremos. Estas propiedades por sí mismas parecen ser más bien elementales, quizás aun obvias, pero *son vitales para entender las diversas manipulaciones algebraicas que efectuaremos después*.

PROPIEDADES CONMUTATIVAS Si a y b son dos números reales cualesquiera, entonces,

$$a + b = b + a \quad \text{y} \quad ab = ba$$

Por ejemplo, $3 + 7 = 7 + 3$, $3 + (-7) = (-7) + 3$, $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$ y $(3)(-7) = (-7)(3)$. Estas propiedades establecen que no importa el orden en el cual dos números son sumados o multiplicados (obtenemos el mismo resultado con cualquier orden que sigamos). Se conocen como **propiedades conmutativas de la adición** y **de la multiplicación**, respectivamente.

PROPIEDADES ASOCIATIVAS Si a, b y c son tres números reales cualesquiera, entonces,

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{y} \quad (ab)c = a(bc)$$

Por ejemplo, $(2 + 3) + 7 = 2 + (3 + 7) = 12$ y $(2 \cdot 3) \cdot 7 = 2 \cdot (3 \cdot 7) = 42$. Estas propiedades se conocen como **propiedades asociativas de la adición** y **de la multiplicación**, respectivamente. Establecen que, si tres números se suman (o se multiplican) a la vez, no importa cuáles dos de ellos se sumen (o se multipliquen) en primer término. Obtenemos la misma respuesta en ambos casos.

En virtud de estas propiedades, es innecesario escribir los paréntesis en las expresiones anteriores. Podemos escribir $a + b + c$ para indicar la suma de a, b y c y abc para su producto sin ninguna ambigüedad.

PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS Si a, b y c son números reales cualesquiera, entonces,

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{y} \quad (b + c)a = ba + ca$$

Por ejemplo, $2(3 + 7) = 2(3) + 2(7) = 6 + 14 = 20$. Esto es sin duda cierto porque $2(3 + 7) = 2 \cdot 10 = 20$. Por otra parte, $(-2)[3 + (-7)] = (-2)(3) + (-2)(-7) = -6 + 14 = 8$. Podemos evaluar la expresión dada directamente, obteniendo la misma respuesta: $(-2)[3 + (-7)] = (-2)(-4) = 8$.

La segunda forma de la propiedad distributiva en realidad se sigue de la primera, dado que, por la propiedad conmutativa

$$(b + c)a = a(b + c) \qquad \text{y también} \qquad ba + ca = ab + ac$$

☛ **2.** ¿Cuáles propiedades de los números reales son utilizadas en cada una de las siguientes igualdades?
a) $2 + 3 \cdot 4 = 2 + 4 \cdot 3$
b) $2 + 3 \cdot 4 = 3 \cdot 4 + 2$
c) $2 + (3 + 4) = (3 + 4) + 2$
d) $2 + (3 + 4) = 4 + (2 + 3)$
e) $3x + 3x = (3 + 3)x$
f) $3x + xy = x(3 + y)$

Puesto que los segundos miembros son iguales uno a otro en virtud de la primera propiedad distributiva, los lados de la izquierda deben ser iguales.

Las propiedades distributivas son particularmente importantes en los cálculos algebraicos. Como veremos, éstas sustentan muchas operaciones incluidas en la simplificación de expresiones y, si se leen "hacia atrás", esto es, de derecha a izquierda, forman la base para los métodos de factorización. ☛ **2**

Los ejemplos siguientes ilustran algunos usos elementales de estas propiedades de los números reales al simplificar las expresiones algebraicas.

EJEMPLO 1

a) $x(y + 2) = xy + x(2)$ (propiedad distributiva)
$= xy + 2x$ (propiedad conmutativa)

b) $2x + 3x = (2 + 3)x$ (propiedad distributiva)
$= 5x$

c) $2(3x) = (2 \cdot 3)x$ (propiedad asociativa)
$= 6x$

d) $(2x)(3x) = [(2x) \cdot 3]x$ (propiedad asociativa)
$= [3 \cdot (2x)]x$ (propiedad conmutativa)
$= [(3 \cdot 2)x]x$ (propiedad asociativa)
$= (6x)x$
$= 6(x \cdot x)$ (propiedad asociativa)
$= 6x^2$

donde x^2 denota $x \cdot x$.

Esta respuesta final pudo obtenerse agrupando los términos semejantes en el producto original: los números 2 y 3 multiplicados dan 6 y las dos x multiplicadas dan x^2. La parte siguiente ilustra este procedimiento.

e) $[5(3ab)]\,(2a) = (5 \cdot 3 \cdot 2)(a \cdot a)b = 30a^2b$

Esta respuesta puede justificarse mediante una sucesión de pasos que emplean las leyes asociativa y conmutativa, como en la parte *d*).

f) $2x + (3y + x) = 2x + (x + 3y)$ (propiedad conmutativa)
$= (2x + x) + 3y$ (propiedad asociativa)
$= (2x + 1x) + 3y$
$= (2 + 1)x + 3y$ (propiedad distributiva)
$= 3x + 3y$

Respuesta *a*) conmutativa;
b) conmutativa;
c) conmutativa;
d) ambas, conmutativa y asociativa;
e) distributiva;
f) ambas, distributiva y conmutativa.

g) $2x(4y + 3x) = (2x)(4y) + (2x)(3x)$ (propiedad distributiva)

$= (2 \cdot 4)(x \cdot y) + (2 \cdot 3)(x \cdot x)$ [propiedades asociativa y conmutativa como en la parte *a*)]

$= 8xy + 6x^2$

La propiedad distributiva puede usarse en el caso en que más de dos cantidades se sumen dentro de los paréntesis. Esto es,

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

etcétera.

EJEMPLO 2

$$\begin{aligned} 4(x + 3y + 4z) &= 4x + 4(3y) + 4(4z) && \text{(propiedad distributiva)} \\ &= 4x + (4 \cdot 3)y + (4 \cdot 4)z && \text{(propiedad asociativa)} \\ &= 4x + 12y + 16z \end{aligned}$$

ELEMENTOS IDENTIDAD Si a es un número real cualquiera, entonces,

$$\boxed{a + 0 = a \quad \text{y} \quad a \cdot 1 = a}$$

Es decir, si 0 se suma a a, el resultado aún es a y si a se multiplica por 1, el resultado de nuevo es a. Por esta razón, los números 0 y 1 a menudo se conocen como **elementos identidad** para la adición y la multiplicación, respectivamente, porque no alteran número alguno bajo sus respectivas operaciones.

INVERSOS Si a es un número real arbitrario, entonces existe un único número real denominado el **negativo de *a*** (denotado por $-a$) tal que

$$\boxed{a + (-a) = 0}$$

Si *a no es cero*, entonces también existe un único número real denominado el **recíproco de *a*** (denotado por a^{-1}) tal que

$$\boxed{a \cdot a^{-1} = 1}$$

Observe la similitud entre las dos definiciones: cuando $-a$ se suma a a, el resultado es el elemento identidad para la adición y cuando a^{-1} se multiplica por a, el resultado es el elemento identidad para la multiplicación. A menudo nos referiremos a $-a$ como el **inverso aditivo de *a*** y a a^{-1} como el **inverso multiplicativo de *a***. (Algunas veces a^{-1} se denomina simplemente **inverso de *a***).

☛ **3.** ¿Cuáles propiedades de los números reales se utilizan en cada una de las igualdades siguientes?
a) $x + 3x = 1x + 3x = (1 + 3)\,x = 4x$
b) $(2 + 1) + (-1) = 2 + [1 + (-1)] = 2 + 0 = 2$
c) $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

Respuesta *a*) propiedad del elemento idéntico multiplicativo y propiedad distributiva;
b) propiedad asociativa, inverso aditivo y neutro aditivo;
c) idéntico multiplicativo y definición de $\frac{1}{a}$

EJEMPLO 3

a) El inverso aditivo de 3 es -3 dado que $3 + (-3) = 0$. El inverso aditivo de -3 es 3 puesto que $(-3) + 3 = 0$. Como el inverso aditivo de -3 se denota por $-(-3)$, se sigue que $-(-3) = 3$. En realidad, un resultado correspondiente vale para cualquier número real a:

$$\boxed{-(-a) = a}$$

b) El inverso multiplicativo de 3 es 3^{-1} dado que $3 \cdot 3^{-1} = 1$. El inverso multiplicativo de 3^{-1} sería denotado por $(3^{-1})^{-1}$ y estaría definido por el requerimiento de que $3^{-1} \cdot (3^{-1})^{-1} = 1$. Pero dado que $3^{-1} \cdot 3 = 1$, se sigue que $(3^{-1})^{-1}$ es igual a 3.

De nuevo este resultado puede generalizarse para cualquier número real a distinto de cero:

$$\boxed{(a^{-1})^{-1} = a}$$

(*El inverso del inverso de* a *es igual a* a).

Una vez que hemos definido los inversos aditivo y multiplicativo de a, podemos definir lo que entenderemos por las operaciones de *sustracción* y *división*. Definimos $a - b$ como el número $a + (-b)$, es decir, a más el negativo de b. De manera similar, definimos $a \div b$ como el número ab^{-1}, es decir, a multiplicado por el recíproco de b. La expresión $a \div b$ está definida sólo cuando $b \neq 0$. También se indica por la fracción a/b y tenemos que

$$\boxed{\text{Definición de } \frac{a}{b}: \qquad \frac{a}{b} = ab^{-1} \qquad (1)}$$

Haciendo $a = 1$ en la ecuación (1), resulta que

$$\boxed{\frac{1}{b} = 1 \cdot b^{-1} = b^{-1}}$$

De aquí, la fracción $1/b$ significa lo mismo que el inverso multiplicativo b^{-1}. Por ejemplo, $3^{-1} = \frac{1}{3}$. Por tanto, se sigue de la ecuación (1) que

$$\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$$

dado que $b^{-1} = 1/b$. ☛ **3**

EJEMPLO 4

a) $\dfrac{7}{(\frac{1}{3})} = 7\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$ (Ecuación (1), con $a = 7$ y $b = \frac{1}{3}$)

$= 7(3^{-1})^{-1} = 7(3) = 21$

Este resultado se extiende a cualesquiera pares de números reales a y b ($b \neq 0$):

$$\frac{a}{1/b} = ab$$

b) Para cualquier número real, $(-1)b = -b$. Esto se debe a que

$$\begin{aligned} b + (-1)b &= 1 \cdot b + (-1)b \\ &= [1 + (-1)]b \qquad \text{(propiedad distributiva)} \\ &= 0 \cdot b = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $(-1)b$ debe ser el inverso aditivo de b, es decir $-b$.

c) $a(-b) = a[(-1)/b]$ [por la parte b)]
$= (-1)(ab)$ (usando las propiedades asociativa y conmutativa)
$= -(ab)$

Por ejemplo, $3(-7) = -(3 \cdot 7) = -21$

d) $3(x - 2y) = 3[x + (-2y)]$ (definición de sustracción)
$= 3x + 3(-2y)$ (propiedad distributiva)
$= 3x - [3(2y)]$ [de la parte c)]
$= 3x - [(3 \cdot 2)y]$ (propiedad asociativa)
$= 3x - 6y$

En general, la propiedad distributiva se extiende a expresiones con signos negativos. Por ejemplo,

$$a(b - c) = ab - ac$$

De esa manera podemos resolver este ejemplo en forma directa.

$$3(x - 2y) = 3x - 3(2y) = 3x - 6y$$

Observe que cuando una expresión dentro de paréntesis debe multiplicarse por una cantidad negativa, todo término dentro del paréntesis cambia de signo.

$$-(a + b) = (-1)(a + b) = (-1)a + (-1)b = -a - b$$

EJEMPLO 5

$$\begin{aligned} -2(x - 3y) &= (-2)x - (-2)(3y) \\ &= -2x + 6y \end{aligned}$$

Note que tanto x como $-3y$ que están dentro de los paréntesis cambian de signo, quedando como $-2x$ y $+6y$, respectivamente.

☛ **4.** ¿Están definidas las expresiones siguientes?

a) $\dfrac{a}{b + (3b - 4b)}$

b) $\dfrac{b + (3b - 4b)}{a}$

Respuesta *a*) no;
b) sí, siempre y cuando $a \neq 0$

Observación sobre la división entre cero. La afirmación $a/b = c$ es cierta si y sólo si la proposición inversa $a = b \cdot c$ es válida. Consideremos una fracción en la cual el denominador b es cero, tal como $\frac{3}{0}$. Ésta no puede ser igual a ningún número real c porque la afirmación inversa $3 = 0 \cdot c$ no puede ser válida para ningún real c. Por tanto $\frac{3}{0}$ no está bien definido. Asimismo, $\frac{0}{0}$ no es un número real bien definido porque la proposición inversa $0 = 0 \cdot c$ es válida para cada número real c. Así, concluimos que cualquier fracción con denominador cero no es un número real bien definido o, en forma equivalente, que **la división entre cero es una operación que carece de sentido**. Por ejemplo, $x/x = 1$ es cierto sólo si $x \neq 0$. ☛ **4**

EJERCICIOS 1-1

1. Establezca si cada una de las siguientes igualdades es válida o no. Reemplace cada proposición falsa por una que sea correcta.

a) $3x + 4x = 7x$ **b)** $(3x)(4x) = 7x$

c) $2(5 - 4y) = 10 - 4y$

d) $-(x + y) = -x + y$

e) $5x - (2 - 3x) = 2x - 2$

f) $5 - 2x = 3x$

g) $-3(x - 2y) = -3x - 6y$

h) $(-a)(-b)(-c) \div (-d) = -(abc \div d)$

i) $a \div (b \div c) = (ac) \div b$

j) $a - (b - c) = (a + c) - b$

k) $(-x)(-y) = -xy$

l) $\dfrac{-a}{-b} = \dfrac{a}{b}$

m) $\dfrac{0}{x} = 0$ para todos los números reales x

(2-60) Simplifique las siguientes expresiones.

2. $5 - (-3)$ **3.** $-7 - (-3)$

4. $5(-3)$ **5.** $(-3)(-7)$

6. $8 \div (-2)$ **7.** $(-9) \div (-3)$

8. $-(2 - 6)$ **9.** $-(-4 - 3)$

10. $(3)(-2)(-4)$ **11.** $(-5)(-3)(-2)$

12. $3(1 - 4)$ **13.** $2(-2 - 3)$

14. $-2(-4 - 2)$ **15.** $-4(3 - 6)$

16. $-6 - 2(-3 - 2)$ **17.** $3(x + 2y)$

18. $4(2x + z)$ **19.** $2(2x - y)$

20. $3(4z - 2x)$ **21.** $-(x - 6)$

22. $-(-x - 3)$ **23.** $3(x - 4)$

24. $2(-x - 3)$ **25.** $-2(-x - 2)$

26. $-4(x - 6)$ **27.** $-x(y - 6)$

28. $-x(-y - 6)$ **29.** $2(x - y) + 4x$

30. $3y + 4(x + 2y)$ **31.** $-2z - 3(x - 2z)$

32. $-4x - 2(3z - 2x)$ **33.** $(x + y) + 4(x - y)$

34. $3(y - 2x) - 2(2x - 2y)$ **35.** $5(7x - 2y) - 4(3y - 2x)$

36. $4(8z - 2t) - 3(-t - 4z)$ **37.** $x(-y)(-z)$

38. $(-x)(-y)(-z)$ **39.** $(-2)(-x)(x + 3)$

40. $(-x)(-y)(2 - 3z)$ **41.** $2(-a)(3 - a)$

42. $(-37\,p)(2q)(q - p)$ **43.** $x(-2)(-x - 4)$

44. $(-2x)(-3)(-y - 4)$ **45.** $-x(x - 2) + 2(x - 1)$

46. $-2(-3x)(-2y + 1) - (-y)(4 - 5x)$

47. $2x + 5 - 2(x + 2)$ **48.** $3x - t - 2(x - t)$

49. $2(x - y) - x$ **50.** $4x(x + y) - x^2$

51. $4[2(x + 1) - 3]$ **52.** $x[3(x - 2) - 2x + 1]$

53. $x[-3(-4 + 5) + 3]$

54. $4[x(2 - 5) - 2(1 - 2x)]$ **55.** $x^{-1}(x + 2)$

56. $x^{-1}(2x - 1)$ **57.** $(-2x)^{-1}(3x - 1)$

58. $(-3x)^{-1}(6 + 2x)$ **59.** $(xy)^{-1}(x + y)$

60. $(-xy)^{-1}(2x - 3y)$

■ 1-2 FRACCIONES

En la sección 1-1, vimos que la fracción a/b está definida como el producto de a y el inverso de b:

$$\frac{a}{b} = ab^{-1} \qquad (b \neq 0)$$

En particular,

$$\frac{1}{b} = b^{-1}$$

Con base en la definición anterior es posible deducir todas las propiedades que se usan al manejar fracciones. En esta sección nos detendremos un poco a examinar este tipo de operaciones.*

Multiplicación de fracciones

El producto de dos fracciones se obtiene multiplicando en primer término los dos numeradores y luego los dos denominadores.

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}}$$

EJEMPLO 1

a) $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 9} = \frac{10}{27}$

b) $\left(\frac{2x}{3}\right)\left(\frac{4}{y}\right) = \frac{(2x)4}{3 \cdot y} = \frac{8x}{3y}$

c) $3x\left(\frac{4}{5y}\right) = \left(\frac{3x}{1}\right)\left(\frac{4}{5y}\right) = \frac{(3x) \cdot 4}{1 \cdot (5y)} = \frac{12x}{5y}$ ☛ **5**

☛ **5.** Evalúe *a*) $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{3}$ *b*) $\frac{x}{2} \cdot \frac{7}{5}$

Respuesta *a*) $\frac{14}{9}$; *b*) $\frac{7x}{10}$

División de fracciones

Con el propósito de dividir una fracción entre otra, la segunda fracción se invierte y después se multiplica por la primera. En otras palabras,

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right) \div \left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{ad}{bc}}$$

*Las demostraciones de las propiedades que aparecen en recuadros se dan como una serie de teoremas al final de esta sección.

EJEMPLO 2

$$a)\ \left(\frac{3}{5}\right) \div \left(\frac{7}{9}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{9}{7}\right) = \frac{27}{35}$$

$$b)\ \left(\frac{3x}{2}\right) \div \left(\frac{4}{y}\right) = \left(\frac{3x}{2}\right)\left(\frac{y}{4}\right) = \frac{3xy}{8}$$

$$c)\ 5y \div \left(\frac{6}{5x}\right) = \left(\frac{5y}{1}\right)\left(\frac{5x}{6}\right) = \frac{25xy}{6}$$

$$d)\ \left(\frac{3}{2x}\right) \div (2y) = \left(\frac{3}{2x}\right) \div \left(\frac{2y}{1}\right) = \left(\frac{3}{2x}\right)\left(\frac{1}{2y}\right) = \frac{3}{4xy}$$

$$e)\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = 1 \div \left(\frac{a}{b}\right) = 1 \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$$

☛ **6.** Evalúe

a) $\frac{2}{3} \div \frac{3}{2}$; *b)* $\frac{x}{2} \div \frac{7}{5}$

(Es decir, el recíproco de cualquier fracción se obtiene intercambiando el numerador y el denominador de la fracción). ☛ **6**

En vista de este último resultado, podemos reescribir la regla anterior para la división: *para dividir entre una fracción, debe multiplicar por su recíproco*.

Cancelación de factores comunes

El numerador y el denominador de cualquier fracción pueden multiplicarse o dividirse por un número real cualquiera *distinto de cero*, sin alterar el valor de la fracción.

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \quad (c \neq 0)$$

EJEMPLO 3

(a) $\frac{a}{b} = \frac{2a}{2b}$

(b) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{-12}{-20} = \cdots$

(c) $\frac{5x}{6} = \frac{10x^2}{12x}$ (con tal que $x \neq 0$)

Esta propiedad de las fracciones puede usarse con la finalidad de reducir una fracción a su **mínima expresión**, lo que significa dividir el numerador y el denominador entre todos los factores comunes. (Esto se llama también **simplificación de la fracción**).

Respuesta *a)* $\frac{4}{9}$; *b)* $\frac{5x}{14}$

EJEMPLO 4

$$a)\ \frac{70}{84} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{\cancel{2} \cdot 5 \cdot \cancel{7}}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cancel{7}} = \frac{5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}$$

Observe que tanto el numerador como el denominador se escriben primero en términos de sus factores primos y, luego, el numerador y el denominador se dividen entre aquellos factores que son comunes a ambos números, como el 2 y el 7. (Este proceso algunas veces se denomina *cancelación*).

$$b)\ \frac{6x^2y}{8xy^2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot y \cdot y} = \frac{\cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot \cancel{y}}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{x} \cdot y \cdot \cancel{y}} = \frac{3x}{4y} \qquad (xy \neq 0)$$

En este ejemplo, el numerador y el denominador fueron divididos entre $2xy$ en la simplificación.

$$c)\ \frac{2x(x+1)}{4y(x+1)} = \frac{x}{2y} \qquad (x + 1 \neq 0)$$

☛ **7.** Evalúe

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{15}{4}$; *b*) $\frac{x}{2} \div \frac{3x}{8y}$

Aquí el factor común $2(x + 1)$ fue cancelado del numerador y del denominador. ☛ **7**

Adición y sustracción de fracciones

Cuando dos fracciones tienen un común denominador, pueden sumarse simplemente sumando sus numeradores.

$$\boxed{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}}$$

Una regla similar se aplica a la sustracción:

$$\boxed{\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}}$$

EJEMPLO 5

$$a)\ \frac{5}{12} + \frac{11}{12} = \frac{5+11}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$b)\ \frac{3}{2x} - \frac{5}{2x} = \frac{3-5}{2x} = \frac{-2}{2x} = -\frac{1}{x}$$

(Note la cancelación de factores comunes al llegar a las respuestas finales).

Cuando dos fracciones con denominadores distintos deben sumarse o restarse, las fracciones deben en primer lugar reescribirse con el mismo denominador.

Respuesta *a*) $\frac{5}{2}$; *b*) $\frac{4y}{3}$

☛ **8.** En cada caso, ¿cuál es mínimo común denominador?

a) $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$; *b*) $\frac{1}{2xy}$ y $\frac{x}{8y}$

Respuesta *a*) 6; *b*) $8xy$

EJEMPLO 6 Simplifique:

a) $\frac{5}{6} + \frac{1}{2}$ *b*) $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$

Solución

a) Podemos escribir $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$. Entonces ambas fracciones tienen el mismo denominador, de modo que podemos sumarlas.

$$\frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5+3}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

b) En la parte *a*), multiplicamos el numerador y el denominador de $\frac{1}{2}$ por 3 para obtener un denominador igual al de la otra fracción. En esta parte, ambas fracciones deben modificarse para que tengan un factor común. Escribimos

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12} \quad \text{y} \quad \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

Por tanto,

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{10-9}{12} = \frac{1}{12}$$

En general, cuando sumamos o restamos fracciones con denominadores diferentes, primero reemplazamos cada fracción por una equivalente que tenga un denominador común. Con el propósito de mantener los números tan pequeños como sea posible, elegimos el más pequeño de tales denominadores comunes, denominado el **mínimo común denominador** (m.c.d.). Aún obtendríamos la respuesta correcta utilizando un denominador común más grande, pero es preferible usar el mínimo denominador posible. Por ejemplo, en la parte *b*) del ejemplo 6, pudimos emplear 24 como un denominador común:

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{20}{24} - \frac{18}{24} = \frac{20-18}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

La respuesta final es la misma, pero habríamos tenido que trabajar con números más grandes.

Para calcular el m.c.d. de dos o más fracciones, los denominadores deben escribirse en términos de sus factores primos. El m.c.d. se forma entonces tomando todos los factores primos que aparezcan en cualquiera de los denominadores. Cada uno de tales denominadores debe incluirse tantas veces como ocurra en cualquiera de los denominadores. Por ejemplo, el m.c.d. de $\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{4}$, se encuentra escribiendo los denominadores en la forma $6 = 2 \cdot 3$ y $4 = 2 \cdot 2$. Los factores primos que ocurren son 2 y 3, pero 2 aparece dos veces en un denominador. De modo que el m.c.d. es $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Como un segundo ejemplo, consideremos el m.c.d. de $5/12x$ y $7/10x^2y$. Escribimos

$$12x = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \quad \text{y} \quad 10x^2y = 2 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y$$

Tomando cada factor el mayor número de veces que aparezca, tenemos que

$$\text{m.c.d.} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y = 60x^2y$$ ☛ **8**

EJEMPLO 7 Simplifique:

a) $\dfrac{x}{6} + \dfrac{3y}{4}$ *b*) $\dfrac{1}{9x} - \dfrac{1}{6}$ *c*) $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d}$

d) $\dfrac{4a}{5b - \dfrac{b}{3}}$ *e*) $3x \div \left(\dfrac{1}{3x^2} - \dfrac{3}{4xy}\right)$

Solución

a) El m.c.d. es 12

$$\frac{x}{6} = \frac{2x}{12} \quad \text{y} \quad \frac{3y}{4} = \frac{3(3y)}{12} = \frac{9y}{12}$$

Por tanto,

$$\frac{x}{6} + \frac{3y}{4} = \frac{2x}{12} + \frac{9y}{12} = \frac{2x + 9y}{12}$$

b) El m.c.d. en este caso es $18x$, de modo que

$$\frac{1}{9x} = \frac{2}{18x} \quad \text{y} \quad \frac{1}{6} = \frac{3x}{18x}$$

Entonces,

$$\frac{1}{9x} - \frac{1}{6} = \frac{2}{18x} - \frac{3x}{18x} = \frac{2 - 3x}{18x}$$

c) El m.c.d. es cd

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad}{cd} + \frac{bc}{cd} = \frac{ad + bc}{cd}$$ ☛ **9**

☛ **9.** Evalúe y simplifique

a) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{4}$; *b*) $\dfrac{x}{2y} - \dfrac{7x}{8y}$

d) Aquí tenemos una fracción cuyo denominador a su vez incluye una fracción. Primero simplificamos el denominador:

$$5b - \frac{b}{3} = \frac{15b - b}{3} = \frac{14b}{3}$$

Entonces la expresión dada es

$$\frac{4a}{14b/3} = 4a\left(\frac{14b}{3}\right)^{-1} = 4a\left(\frac{3}{14b}\right) = \frac{6a}{7b}$$

e) Primero simplificamos la expresión que se encuentra entre paréntesis. El mínimo común denominador es $12x^2y$.

$$\frac{1}{3x^2} - \frac{3}{4xy} = \frac{4y}{12x^2y} - \frac{9x}{12x^2y} = \frac{4y - 9x}{12x^2y}$$

Respuesta *a*) $\dfrac{23}{12}$; *b*) $-\dfrac{3x}{8y}$

Por tanto la expresión dada es igual a

$$3x \div \left(\frac{4y - 9x}{12x^2y}\right) = \frac{3x}{1} \cdot \frac{12x^2y}{4y - 9x} = \frac{36x^3y}{4y - 9x}$$

(en donde $x^3 = x \cdot x^2 = x \cdot x \cdot x$).

Demostraciones de los teoremas

Concluimos esta sección demostrando las propiedades básicas de las fracciones que hemos utilizado en los ejemplos anteriores.

TEOREMA 1

$$\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{d}\right) = \frac{1}{bd}$$

DEMOSTRACIÓN Por definición, $\left(\frac{1}{b}\right) = b^{-1}$ y $\left(\frac{1}{d}\right) = d^{-1}$, de modo que

$$\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{d}\right) = b^{-1}\, d^{-1}$$

Como,

$$\begin{aligned}(b^{-1}\, d^{-1})\,(bd) &= (b^{-1}\, b) \cdot (d^{-1}\, d) \qquad \text{(usando las propiedades asociativa y conmutativa)}\\ &= 1 \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

Por tanto, $b^{-1}\, d^{-1}$ debe ser el inverso multiplicativo de db, es decir,

$$b^{-1}\, d^{-1} = \frac{1}{bd}$$

como se requería.

Observación Este resultado puede reescribirse en la forma $(bd)^{-1} = b^{-1}\, d^{-1}$.

TEOREMA 2

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$$

DEMOSTRACIÓN

$$\frac{a}{b} = ab^{-1} = a\left(\frac{1}{b}\right)$$

y también

$$\frac{c}{d} = c\left(\frac{1}{d}\right)$$

Por tanto, usando las propiedades conmutativa y asociativa, podemos escribir

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) &= a\left(\frac{1}{b}\right)\cdot c\left(\frac{1}{d}\right) = ac\cdot\left(\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{d}\right)\\ &= ac\left(\frac{1}{bd}\right) \qquad \text{(por el teorema 1)}\\ &= \frac{ac}{bd}\end{aligned}$$

como se pedía.

TEOREMA 3

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

DEMOSTRACIÓN Por definición, $a/b = ab^{-1}$. Por tanto, por el teorema 1,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = (ab^{-1})^{-1} = a^{-1}(b^{-1})^{-1}.$$

Pero $(b^{-1})^{-1} = b$, de modo que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = a^{-1}b = ba^{-1} = \frac{b}{a}$$

como se requería.

TEOREMA 4

$$\left(\frac{a}{b}\right) \div \left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{d}{c}\right)$$

DEMOSTRACIÓN Por definición, $x \div y = xy^{-1}$. Por tanto, tenemos las igualdades:

$$\left(\frac{a}{b}\right) \div \left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{d}{c}\right) \quad \text{(por el teorema 3)}$$

TEOREMA 5

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \qquad (c \neq 0)$$

DEMOSTRACIÓN Para cualquier $c \neq 0$, la fracción $c/c = 1$, puesto que, por definición $c/c = cc^{-1}$. Por tanto, por el teorema 2,

$$\frac{ac}{bc} = \left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{c}\right) = \frac{a}{b}\cdot 1 = \frac{a}{b}$$

como se pedía.

TEOREMA 6

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c} \qquad (c \neq 0)$$

DEMOSTRACIÓN Por definición,

$$\frac{a}{c} = ac^{-1} \qquad \text{y} \qquad \frac{b}{c} = bc^{-1}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + \frac{b}{c} &= ac^{-1} + bc^{-1} = (a + b)c^{-1} \qquad \text{(por la propiedad distributiva)} \\ &= \frac{a + b}{c} \end{aligned}$$

como se requería.

EJERCICIOS 1-2

1. Establezca si cada una de las igualdades siguientes es válida o no. Reemplace cada proposición falsa por una verdadera.

a) $\frac{3}{x} + \frac{4}{x} = \frac{7}{x}$

b) $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = \frac{x}{7}$

c) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$

d) $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \frac{ace}{bdf}$

e) $\left(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}\right) \div \frac{e}{f} = \frac{adf}{bce}$

f) $\frac{a}{b} \div \left(\frac{c}{d} \div \frac{e}{f}\right) = \frac{adf}{bce}$

g) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a + b}$

h) $\frac{\cancel{x}}{\cancel{x} + y} = \frac{1}{1 + y}$

i) $\frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} = \frac{6 \cdot 9 + 7 \cdot 8}{7 \cdot 9}$

j) $\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{2 + 4 + 6 + 8 + 10} = \frac{1}{2}$

(2-58) Evalúe cada una de las siguientes expresiones. Escriba las respuestas en los términos más simples.

2. $\frac{2}{9} \cdot \frac{6}{5}$

3. $\left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{15}{4}\right)$

4. $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{4}{9}$

5. $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{10}{7}$

6. $\left(\frac{3x}{25}\right)\left(\frac{25}{9x}\right)$

7. $\left(\frac{14x}{15y}\right)\left(\frac{25y}{24}\right)$

8. $7x^2\left(\frac{6y}{21x}\right)$

9. $\left(-\frac{2x}{3y}\right)(-5xy)$

10. $\left(\frac{18}{11}\right) \div \left(\frac{8}{33}\right)$

11. $\left(\frac{14}{3}\right) \div \left(\frac{6}{15}\right)$

12. $\frac{4}{9} \div \left(\frac{2}{3} \cdot 8\right)$

13. $\left(\frac{12}{25} \cdot \frac{15}{7}\right) \div \frac{20}{7}$

14. $\left(\frac{7x}{10}\right) \div \left(\frac{21x}{5}\right)$

15. $(2x) \div \left(\frac{3xy}{5}\right)$

16. $4 \div \left(\frac{8}{9x}\right)$

17. $\left(\frac{3}{8x}\right) \div \left(\frac{4x}{15}\right)$

18. $\left(\frac{3x^2}{20} \cdot 4y\right) \div \left(\frac{6xy}{25}\right)$

19. $\left(\frac{5x}{2} \cdot \frac{3y}{4}\right) \div \left(\frac{x^2y}{12}\right)$

20. $8xy \div \left(\frac{2x}{3} \cdot \frac{2x}{5y}\right)$

21. $6x^2 \div \left(\frac{4x}{y} \cdot \frac{3y^2}{2}\right)$

22. $\left(\frac{8}{9t} \div \frac{1}{3st}\right) \cdot \frac{s}{4}$

23. $\left(\frac{3}{4xy} \div \frac{x}{y}\right) \cdot \frac{2xy}{9}$

24. $\left(\frac{2}{x} \div \frac{z}{2}\right) \div \frac{4}{z}$

25. $\left(\frac{2xt}{3} \div \frac{x}{4t}\right) \div \frac{2t}{3}$

26. $\frac{2}{z} \div \left(\frac{z}{2} \div \frac{4}{z}\right)$

27. $\frac{2xt}{3} \div \left(\frac{x}{4t} \div \frac{2t}{3}\right)$

28. $\frac{1}{6} - \frac{1}{2}$

29. $\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$

30. $\frac{4x}{5} - \frac{x}{10}$

31. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}$

32. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3}$

33. $\frac{y}{2x} + \frac{1}{3x}$

34. $\frac{a}{6b} - \frac{a}{2b}$

35. $\frac{a}{6b} + \frac{2a}{9b}$

36. $\frac{7}{6x} + \frac{3}{4x^2}$

37. $\frac{3y}{10x^2} - \frac{1}{6x}$

38. $\frac{x}{p^2} + \frac{y}{pq}$

39. $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

40. $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$

41. $\frac{x^2}{3y} + 4y$

42. $\frac{1}{6} + \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right)$

43. $\frac{1}{6} - \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)$

44. $\frac{a}{3b} - 2\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{2a}\right)$

45. $\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \div \left(\frac{6}{x}\right)$

46. $\left(\frac{x}{9y} + \frac{1}{6xy}\right) \div \left(\frac{1}{3xy}\right)$

47. $\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5}\right) \div \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)$

48. $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{12}\right) \cdot \left(\frac{7}{10} + \frac{1}{4}\right)$

49. $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}}$

50. $\dfrac{\frac{8}{5} + \frac{2}{3}}{2 + \frac{4}{7}}$

51. $\dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}$

52. $\dfrac{2 - \frac{3}{4}}{3 + \frac{1}{8}}$

53. $\dfrac{7x - \dfrac{2x}{3}}{15y - \dfrac{y}{3}}$

54. $\dfrac{\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{3x}}{\dfrac{1}{4y} - \dfrac{1}{5y}}$

55. $\dfrac{\left(\dfrac{2a}{3b}\right)\left(\dfrac{4b}{5}\right) + a}{2b + \dfrac{b}{15}}$

56. $\dfrac{\left(\dfrac{5p}{2q}\right)\left(\dfrac{p}{3}\right) + \dfrac{p^2}{8q}}{4p + \dfrac{p}{12}}$

57. $\left(\frac{a}{b} + \frac{2a}{3b}\right) \div \left[\left(\frac{3x}{8}\right) \div \left(\frac{x}{9}\right) + \frac{1}{4}\right]$

58. $\left(\frac{xy}{6}\right) \div \left[\left(\frac{2}{3}\right) \div \left(\frac{x}{6}\right) - \frac{3x}{4}\right]$

■ 1-3 EXPONENTES

Si m es un *entero positivo*, entonces a^m (léase a a la *potencia* m o la *m-ésima potencia de a*) se define como el producto de m factores a multiplicados a la vez. Por lo que

$$a^m = a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$$

En este producto, el factor a aparece m veces. Por ejemplo,

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \qquad \text{(cuatro factores de 2)}$$
$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243 \qquad \text{(cinco factores de 3)}$$

En la expresión a^m, m se llama la **potencia** o **exponente** y a la **base**. Así en 2^4 (la cuarta potencia de 2), 2 es la base y 4 es la potencia o exponente; en 3^5, 3 es la base y 5 el exponente. Esta definición de a^m cuando el exponente es un entero positivo es válida para todos los valores reales de a.

Observe el patrón en la tabla 1, en la cual se dan varias potencias de 5 en orden decreciente. Tratemos de completar la tabla. Notemos que cada vez que el exponente disminuye en 1, el número de la derecha se *divide* entre 5.

Esto sugiere que la tabla se completaría continuando la división entre 5 con cada reducción del exponente. De esta manera, llegamos a las igualdades siguientes:

TABLA 1

5^4	625
5^3	125
5^2	25
5^1	5
5^0	?
5^{-1}	?
5^{-2}	?
5^{-3}	?
5^{-4}	?

$$5^1 = 5 \qquad 5^0 = 1 \qquad 5^{-1} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5^1}$$

$$5^{-2} = \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} \qquad 5^{-3} = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} \qquad 5^{-4} = \frac{1}{625} = \frac{1}{5^4}$$

Este patrón en forma natural nos conduce a la definición siguiente de a^m en el caso de que el exponente m sea cero o un número negativo.

DEFINICIÓN Si $a \neq 0$, entonces $a^0 = 1$ y si m es un entero *positivo* cualquiera (de modo que $-m$ es un entero *negativo*),

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Por ejemplo, $4^0 = 1$, $\left(\frac{3}{7}\right)^0 = 1$, $(-5)^0 = 1$, etc. Asimismo,

☛ **10.** Evalúe

a) $(-\frac{1}{5})^0$; *b*) $(-\frac{1}{2})^{-3}$

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} \quad \text{y} \quad (2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$$ ☛ **10**

De estas definiciones, es posible establecer una serie de propiedades denominadas las **leyes de los exponentes**, las cuales se enuncian a continuación.

Propiedad 1

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Esto es, *cuando dos potencias de una base común se multiplican, el resultado es igual a la base elevada a la suma de los dos exponentes*. Este resultado vale para cualquier número real a, excepto en el caso de que m o n sea negativo, requerimos que $a \neq 0$.

EJEMPLO 1

a) $5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5$

Podemos verificar que esto sea correcto desarrollando las dos potencias del producto.

$$5^2 \cdot 5^3 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5$$

Respuesta *a*) 1; *b*) $-2^3 = -8$

☛ **11.** Simplifique
a) $4^3 \cdot 4^{-5}$; *b*) $x^4 \cdot x^{-6} \cdot x^2$

Respuesta *a*) $\frac{1}{16}$; *b*) 1

b) $x^5 \cdot x^{-3} = x^{5+(-3)} = x^2$

De nuevo, podemos verificar este resultado desarrollando las dos potencias.

$$x^5 \cdot x^{-3} = (x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x)\left(\frac{1}{x \cdot x \cdot x}\right) = x \cdot x = x^2 \quad ☛ \ \mathbf{11}$$

Propiedad 2

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a \neq 0)$$

Esto es, *cuando una potencia se divide entre otra con la misma base, el resultado es igual a la base elevada a un exponente que es la diferencia del exponente que está en el numerador y el exponente del denominador*.

EJEMPLO 2

☛ **12.** Simplifique
a) $3^3 \div 3^{-2}$; *b*) $x^4 \div (x^{-6} \cdot x^2)$

Respuesta *a*) $3^5 = 243$; *b*) x^8

a) $\frac{5^7}{5^3} = 5^{7-3} = 5^4$

b) $\frac{4^3}{4^{-2}} = 4^{3-(-2)} = 4^{3+2} = 4^5$

c) $\frac{3^{-2}}{3} = \frac{3^{-2}}{3^1} = 3^{-2-1} = 3^{-3}$

d) $\frac{x^2 \cdot x^{-4}}{x^{-3}} = \frac{x^{2-4}}{x^{-3}} = x^{2-4-(-3)} = x^1 = x$ ☛ **12**

Propiedad 3

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad (a \neq 0 \text{ si } m \text{ o } n \text{ es negativo o cero})$$

Es decir, *una potencia elevada a una potencia es igual a la base elevada al producto de los dos exponentes*.

EJEMPLO 3

a) $(3^3)^2 = 3^{3 \cdot 2} = 3^6$

☛ **13.** Simplifique
a) $3^3 \cdot (3^2)^{-2}$; *b*) $(x^4)^4 \div (x^{-3})^{-3}$

Respuesta *a*) $3^{-1} = \frac{1}{3}$; *b*) x^7

Podemos comprobar que esto es correcto, dado que

$$(3^3)^2 = 3^3 \cdot 3^3 = 3^{3+3} = 3^6$$

b) $(4^{-2})^{-4} = 4^{(-2)(-4)} = 4^8$

c) $x^5(x^{-2})^{-1} = x^5 \cdot x^{(-2)(-1)} = x^5 \cdot x^2 = x^{5+2} = x^7$

d) $\frac{(x^2)^{-2}}{(x^{-2})^{-2}} = \frac{x^{(2)(-2)}}{x^{(-2)(-2)}} = \frac{x^{-4}}{x^4} = x^{-4-4} = x^{-8}$

e) $\frac{1}{x^{-p}} = (x^{-p})^{-1} = x^{(-p)(-1)} = x^p$ ☛ **13**

En una expresión, tal como $3c^5$, la base es c, no $3c$. Si necesitamos que la base sea $3c$, debemos encerrarla entre paréntesis y escribir $(3c)^5$. Por ejemplo $3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24$, no es lo mismo que $(3 \cdot 2)^3 = 6^3 = 216$. Para el caso de que la base es un producto, tenemos la propiedad siguiente.

Propiedad 4

$$(ab)^m = a^m b^m \qquad (ab \neq 0 \text{ si } m \leq 0)$$

☛ **14.** Evalúe
a) $2 \cdot 2^3$ y $(2 \cdot 2)^3$
b) $3 \cdot 2^{-2}$ y $(3 \cdot 2)^{-2}$

Esto es, *el producto de dos números elevados a la m-ésima potencia es igual al producto de las m-ésimas potencias de los dos números.* ☛ **14**

EJEMPLO 4

a) $6^4 = (2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$

b) $(x^2y)^4 = (x^2)^4y^4 = x^8y^4$

c) $(3a^2b^{-3})^2 = 3^2(a^2)^2(b^{-3})^2 = 9a^4b^{-6}$

d) $\dfrac{(xy^3)^{-2}}{(x^2y)^{-4}} = \dfrac{x^{-2}(y^3)^{-2}}{(x^2)^{-4}y^{-4}} = \dfrac{x^{-2}y^{-6}}{x^{-8}y^{-4}} = \dfrac{x^{-2}}{x^{-8}} \cdot \dfrac{y^{-6}}{y^{-4}} = x^{-2-(-8)}y^{-6-(4)} = x^6y^{-2}$

Respuesta *a*) 16 y 64; *b*) $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{36}$

Propiedad 5

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \qquad (b \neq 0 \text{ y } a \neq 0 \text{ si } m \leq 0)$$

Es decir, *el cociente de dos números elevados a la m-ésima potencia es igual al cociente de las m-ésimas potencias de tales números.*

EJEMPLO 5

☛ **15.** Simplifique
a) $3^3 \cdot (3x)^{-2}$
b) $\left(\dfrac{x^4}{2}\right)^2 \div (4x^{-2})^{-2}$

a) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = \dfrac{3^4}{2^4}$ *b*) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^5 = \dfrac{x^5}{y^5} = x^5y^{-5}$

c) $x^3\left(\dfrac{y}{x^2}\right)^{-2} = x^3\dfrac{y^{-2}}{(x^2)^{-2}} = x^3\dfrac{y^{-2}}{x^{-4}} = x^{3-(-4)}y^{-2} = x^7y^{-2}$ ☛ **15**

EJEMPLO 6 Simplifique las expresiones siguientes, eliminando paréntesis y exponentes negativos.

a) $\dfrac{(ax)^5}{x^{-7}}$ *b*) $\dfrac{(x^{-2})^2}{(x^2z^3)^3}$ *c*) $x^4(2x - 3x^{-2})$

d) $(x^{-1} + y^{-1})^{-1}$ *e*) $\dfrac{x^{-1} + y^{-1}}{(xy)^{-1}}$

Respuesta *a*) $\dfrac{3}{x^2}$; *b*) $4x^4$

Solución

a) $\dfrac{(ax)^5}{x^{-7}} = \dfrac{a^5x^5}{x^{-7}} = a^5x^{5-(-7)} = a^5x^{12}$

☛ **16.** Sería *incorrecto por completo* en el ejemplo 6*d*) si hubiésemos escrito $(x^{-1} + y^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1} + (y^{-1})^{-1} = x + y$. ¿Puede ver por qué esto es incorrecto? Pruebe dando dos valores para x y y, tales como 2 y 4.

b) $$\frac{(x^{-2})^2}{(x^2z^3)^3} = \frac{x^{(-2)(2)}}{(x^2)^3(z^3)^3} = \frac{x^{-4}}{x^6z^9} = \frac{1}{x^{10}z^9}$$

Note que si deseamos evitar exponentes negativos, ambos factores deben dejarse en el denominador.

c) $$\begin{aligned} x^4(2x - 3x^{-2}) &= x^4(2x) - x^4(3x^{-2}) \\ &= 2x^{4+1} - 3x^{4-2} \\ &= 2x^5 - 3x^2 \end{aligned}$$

d) Primero debemos simplificar la expresión dentro de los paréntesis. El denominador común es xy.

$$x^{-1} + y^{-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} = \frac{y+x}{xy}$$

Ahora recordando que el recíproco de una fracción se obtiene intercambiando el numerador y el denominador. De modo que

$$(x^{-1} + y^{-1})^{-1} = \left(\frac{y+x}{xy}\right)^{-1} = \frac{xy}{y+x}$$

e) $$\frac{x^{-1} + y^{-1}}{(xy)^{-1}} = \frac{x^{-1} + y^{-1}}{x^{-1}y^{-1}} = \frac{x^{-1}}{x^{-1}y^{-1}} + \frac{y^{-1}}{x^{-1}y^{-1}} = \frac{1}{y^{-1}} + \frac{1}{x^{-1}} = y + x$$

Solución alterna

$$\begin{aligned} \frac{x^{-1} + y^{-1}}{(xy)^{-1}} &= (x^{-1} + y^{-1}) \cdot xy \\ &= x^{-1} \cdot xy + y^{-1} \cdot xy \qquad \text{(propiedad distributiva)} \\ &= 1 \cdot y + 1 \cdot x = y + x \end{aligned}$$

☛ **16**

EJERCICIOS 1-3

(1-61) Simplifique las expresiones siguientes. No use paréntesis ni exponentes negativos en la respuesta final.

1. $(2^5)^2$

2. $(3^4)^3$

3. $(a^3)^7$

4. $(x^4)^5$

5. $(-x^2)^5$

6. $(-x^5)^2$

7. $y^2 \cdot y^5$

8. $x^7 \cdot x^4$

9. $a^3 \cdot a^{-5}$

10. $b^{-2} \cdot b^6$

11. $(3x)^2x^{-7}$

12. $(4x)^{-2}x^4$

13. $(2x)^2(2x^{-1})^3$

14. $\frac{x^3}{2}(4x^{-1})^2$

15. $(x^2yz)^3(xy)^4$

16. $(3yz^2)^2(y^3z)^3$

17. $(x^{-2}y)^{-2}$

18. $(ab^{-3})^{-1}$

19. $(xy^2z^3)^{-1}(xyz)^3$

20. $(x^2pq^2)^2(xp^2)^{-1}$

21. $\frac{(2^4)^2}{4^2}$

22. $\frac{(3^3)^2}{3^5}$

23. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \div 3^{-4}$

24. $\left(\frac{1}{5}\right)^{3} \div 5^{-2}$

25. $\frac{x^5}{x^{-2}}$

26. $\frac{y^{-3}}{y^{-7}}$

27. $\frac{(x^2)^3}{x^4}$

28. $\frac{z^{-8}}{(z^2)^4}$

29. $\frac{(a^{-2})^6}{(a^4)^{-3}}$

30. $\frac{(b^{-7})^2}{(b^3)^3}$

31. $\frac{(-x^3)^2}{(-x)^{-3}}$

32. $\frac{(-y^{-1})^{-3}}{(-y^2)^{-2}}$

33. $\dfrac{(x^2y)^{-3}}{(xy)^2}$ **34.** $\dfrac{(ab^{-2})^{-1}}{a^{-2}b^{-1}}$

35. $\dfrac{(-2xy)^3}{x^3y}$ **36.** $\dfrac{(-ab^2c)^{-1}}{a^{-2}bc^{-1}}$

37. $\dfrac{(-3x)^2}{-3x^2}$ **38.** $\dfrac{(2x^2y)^{-1}}{(-2x^2y^3)^2}$

39. $\dfrac{(2a^{-1}b^2)^2}{(a^3b)^3}$ **40.** $\dfrac{(x^{-3}y^4)^3}{(-3x^2y^{-2})^2}$

41. $x^2(x^4 - 2x)$ **42.** $x^3(x^{-1} - x)$

43. $2x(x^5 + 3x^{-1})$ **44.** $3x^2(x^4 + 2x^{-3})$

45. $x^4(2x^2 - x - 3x^{-2})$ **46.** $2x^{-3}(x^5 - 3x^4 + x)$

47. $(2^{-1} + x^{-1})^{-1}$ **48.** $[(2x)^{-1} + (2y)^{-1}]^{-1}$

49. $(xy)^{-1}(x^{-1} + y^{-1})^{-1}$ **50.** $(a^{-2} + b^{-2})^{-1}$

51. $\left(\dfrac{7}{x}\right)\left(\dfrac{3}{14x}\right) + \left(\dfrac{3}{2x}\right)^2$ **52.** $x^{-3}\left(\dfrac{6}{5x}\right)^{-1} - \left(-\dfrac{1}{2x}\right)^2$

53. $\dfrac{3y}{10x^3} + \dfrac{2}{15xy}$ **54.** $\dfrac{5}{12x^{-3}} - \dfrac{2}{15x^{-2}}$

55. $\dfrac{1}{2x^{-2}} + \dfrac{1}{3x^{-2}}$ **56.** $\dfrac{1}{4y^{-4}} - \dfrac{1}{3y^{-4}}$

57. $\left(\dfrac{x^3y}{4}\right) \div \left(\dfrac{4}{x} \div \dfrac{6}{y^3}\right)$ **58.** $\dfrac{x^{-3}}{4x} - \dfrac{x}{6x^5}$

59. $y^{-5}\left(2xy \div \dfrac{x}{3y^2}\right)$ **60.** $\left(\dfrac{2}{x} + x^{-1}\right) \div \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{5x^{-2}}\right)$

61. $x^{-1} \div (x + x^{-1})^{-1}$

■ 1-4 EXPONENTES FRACCIONARIOS

Hemos definido a^m cuando m es cualquier entero, ahora extenderemos la definición al caso en que m es un número racional arbitrario. Nos gustaría hacer esta extensión en tal forma que las propiedades 1 a 5 de la sección 1-3 continúen siendo válidas, aun en el caso de que m y n no sean enteros.

En primer término, consideraremos la definición de $a^{1/n}$ cuando n es un entero distinto de cero. Para que la propiedad 3 continúe vigente cuando $m = 1/n$, debe ser válido que

$$(a^{1/n})^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

De este modo, si hacemos $b = a^{1/n}$, es necesario que $b^n = a$.

EJEMPLO 1

a) $8^{1/3} = 2$ ya que $2^3 = 8$

b) $(-243)^{1/5} = -3$ ya que $(-3)^5 = -243$

En el caso de que n sea un entero par, surgen dos dificultades con esta definición de $a^{1/n}$. Por ejemplo, sea $n = 2$ y $a = 4$. Entonces, $b = 4^{1/2}$ si $b^2 = 4$. Pero hay *dos* números cuyo cuadrado es igual a 4, es decir, $b = 2$ y $b = -2$. De modo que necesitamos decidir qué entenderemos cuando escribamos $b = 4^{1/2}$. En realidad, *definiremos* $4^{1/2}$ como $+2$.

En segundo lugar, suponga que a es negativo. En tal caso, $b = a^{1/2}$ si $b^2 = a$. Sin embargo, el cuadrado de cualquier número negativo (positivo, negativo o cero) nunca es negativo. Por ejemplo, $4^2 = 16$ y $(-3)^2 = 9$, y ambos son positivos. En consecuencia b^2 nunca es negativo para cualquier número real b, de modo que cuando $a < 0$, $a^{1/2}$ no existe en los números reales. Así, $(-1)^{1/2}$ o $(-\frac{4}{3})^{1/2}$ carecen de sentido como números reales. Adoptaremos la siguiente definición.

☛ **17.** Evalúe lo siguiente, si existen: *a*) $(-27)^{1/3}$
b) $(64)^{1/6}$ *c*) $\sqrt[5]{-32}$
d) $(-\frac{1}{16})^{1/4}$ *e*) $\sqrt[6]{-729}$
f) $\sqrt[101]{-1}$

DEFINICIÓN Si n es un entero positivo par (tal como 2, 4 o 6) y si a es un número real *no negativo*, entonces se dice que b es la **n-ésima raíz principal de a** si $b^n = a$ y $b \geq 0$. Así, la n-ésima raíz de a es el número *no negativo* el cual, al elevarse a la n-ésima potencia, da el número a. Denotamos la n-ésima raíz principal por $b = a^{1/n}$.

Si n es un entero positivo *impar* (tal como 1, 3 o 5) y si a es un número real *cualquiera*, entonces b es la *n-ésima raíz de a* si $b^n = a$, expresada una vez más como $a^{1/n}$. Es decir,

$$\boxed{b = a^{1/n} \text{ si } b^n = a; \quad b \geq 0 \text{ si } n \text{ es par.}}$$

Las raíces impares están definidas para todos los números reales a, pero las raíces pares sólo están definidas cuando a no es negativo.

EJEMPLO 2

a) $32^{1/5} = 2$ porque $2^5 = 32$

b) $(-216)^{1/3} = -6$ ya que $(-6)^3 = -216$

c) $16^{1/4} = 2$ porque $2^4 = 16$ y $2 > 0$

d) $(729)^{1/6} = 3$ ya que $3^6 = 729$ y $3 > 0$

e) $1^{1/n} = 1$ para todo entero positivo n, porque $1^n = 1$

f) $(-1)^{1/n} = -1$ para todo entero positivo impar n, debido a que $(-1)^n = -1$ cuando n es impar.

g) $(-81)^{1/4}$ no existe, porque los números negativos sólo tienen raíces n-ésimas cuando n es impar.

El símbolo $\sqrt[n]{a}$ también se utiliza en vez de $a^{1/n}$. El símbolo $\sqrt{\ }$ se denomina **signo radical** y $\sqrt[n]{a}$ a menudo se llama **radical**. Cuando $n = 2$, $a^{1/2}$ se denota simplemente por $\sqrt{a}$ más bien que por $\sqrt[2]{a}$: se llama la **raíz cuadrada** de a. También, $\sqrt[3]{a} = a^{1/3}$ es la tercera raíz de a, por lo regular se le llama **raíz cúbica**, $\sqrt[4]{a} = a^{1/4}$ es la raíz cuarta de a, etc. Los resultados en el ejemplo 2 pueden volverse a formular utilizando esta notación:

a) $\sqrt[5]{32} = 2$; *b*) $\sqrt[3]{-216} = -6$; *c*) $\sqrt[4]{16} = 2$

d) $\sqrt[6]{729} = 3$; *e*) $\sqrt[n]{1} = 1$ para n un entero positivo

f) $\sqrt[n]{-1} = -1$ para n un entero positivo impar

g) $\sqrt[4]{-81}$ no existe ☛ **17**

Respuesta *a*) –3; *b*) 2; *c*) –2; *d*) y *e*) no existen; *f*) –1

Ahora estamos en posición de definir $a^{m/n}$ para un exponente racional m/n.

DEFINICIÓN Sea n un enero positivo, m un entero distinto de cero y a un número real. Entonces,

$$a^{m/n} = (a^{1/n})^m$$

Es decir, *la* (m/n)*-ésima potencia de a es la m-ésima potencia de la raíz n-ésima de a*.

Observación Si n es par, a no debe ser negativo. Si m es negativo, a no debe ser cero.

EJEMPLO 3

a) $9^{3/2} = (9^{1/2})^3 = 3^3 = 27$

b) $4^{-1/2} = (4^{1/2})^{-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

c) $16^{-3/4} = (16^{1/4})^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

De la parte *b*) del ejemplo 3, podemos generalizar el resultado siguiente:

$$a^{-1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

Esto se sigue dado que

$$a^{-1/n} = (a^{1/n})^{-1} = \frac{1}{a^{1/n}}$$

TEOREMA Si $a^{m/n}$ existe, entonces,

$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n}$$

Es decir, *la* (m/n)*-ésima potencia de a es igual a la raíz n-ésima de la m-ésima potencia de a.*

Este teorema, el cual no probaremos, ofrece un método alternativo de calcular cualquier potencia fraccionaria.

EJEMPLO 4

a) $16^{3/4} = (16^{1/4})^3 = 2^3 = 8$, o $16^{3/4} = (16^3)^{1/4} = (4096)^{1/4} = 8$

b) $36^{3/2} = (36^{1/2})^3 = 6^3 = 216$, o $36^{3/2} = (36^3)^{1/2} = (46{,}656)^{1/2} = 216$

Observación Si m/n no está en su mínima expresión, entonces $(a^m)^{1/n}$ puede existir mientras que $a^{m/n}$ no. Por ejemplo, sea $m = 2$, $n = 4$ y $a = -9$. Entonces,

$$(a^m)^{1/n} = [(-9)^2]^{1/4} = 81^{1/4} = 3$$

pero $a^{m/n} = (-9)^{2/4} = [(-9)^{1/4}]^2$ no existe.

Según los ejemplos 3 y 4, es claro que cuando evaluamos $a^{m/n}$, es más fácil extraer la raíz n-ésima primero y después elevar a la m-ésima potencia; de esa manera

☛ **18.** Simplifique *a*) $3^{1/3} \cdot 3^{2/3}$
b) $3^{1/3} \cdot (3^{2/3})^{-2}$; *c*) $(x^{1/2})^3 \cdot \sqrt{x}$
d) $(x^{1/3})^{1/2} \div x^{7/6}$
e) $(8x)^{2/5} \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^{3/5}$

trabajamos con números más pequeños. En otras palabras, en la práctica calculamos $a^{m/n}$ usando la definición $(a^{1/n})$ en vez de $(a^m)^{1/n}$.

Con estas definiciones, es posible demostrar que las leyes de los exponentes, que se establecieron en la sección 1-3, también son válidas para exponentes fraccionarios. Las volvemos a escribir y las ilustramos con algunos ejemplos. Reenunciemos estas leyes, ya que son muy importantes.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	**2.** $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	**3.** $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(ab)^m = a^m b^m$	**5.** $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	

Al utilizar estas leyes, debemos recordar que tienen algunas restricciones: en cualquier potencia, si el exponente es negativo, la base no debe ser cero; y si el exponente contiene una raíz par, la base no debe ser negativa.

EJEMPLO 5

a) $5^3 \cdot 5^{7/2} = 5^{3+7/2} = 5^{13/2}$

b) $4^{-2} \cdot 4^{7/3} = 4^{-2+7/3} = 4^{1/3}$

c) $\frac{4^{7/2}}{(4)^{3/2}} = 4^{7/2-3/2} = 4^2 = 16$

d) $\frac{9^{1/2}}{9^{-2}} = 9^{1/2-(-2)} = 9^{5/2} = (9^{1/2})^5 = 3^5 = 243$

e) $\frac{x^{9/4}}{x^4} = x^{9/4-4} = x^{-7/4}$

f) $(5^3)^{7/6} = 5^{3(7/6)} = 5^{7/2}$

g) $(3^{-4/3})^{-6/5} = 3^{(-4/3)(-6/5)} = 3^{8/5}$

h) $a^{-m} = (a^m)^{-1} = \frac{1}{a^m}$ para cualquier número racional m

i) $(36)^{1/2} = (4 \cdot 9)^{1/2} = 4^{1/2} \cdot 9^{1/2} = 2 \cdot 3 = 6$

j) $(x^2 y)^{1/2} = (x^2)^{1/2} y^{1/2} = x^{2(1/2)} y^{1/2} = xy^{1/2}$

k) $(3a^{2/5}b^{-4})^{-1/2} = 3^{-1/2}(a^{2/5})^{-1/2}(b^{-4})^{-1/2} = 3^{-1/2}a^{-1/5}b^2$

l) $\sqrt[4]{ab} = (ab)^{1/4} = a^{1/4}b^{1/4} = \sqrt[4]{a}\,\sqrt[4]{b}$

m) $\sqrt{x/y} = \left(\frac{x}{y}\right)^{1/2} = \frac{x^{1/2}}{y^{1/2}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

n) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-2/3} = \frac{8^{-2/3}}{27^{-2/3}} = \frac{(8^{1/3})^{-2}}{(27^{1/3})^{-2}} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{9}{1}\right) = \frac{9}{4}$ ☛ **18**

Respuesta *a*) 3; *b*) 3^{-1}; *c*) x^2
d) x^{-1}; *e*) x

EJEMPLO 6 Encuentre m tal que $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{27} = 3^m$.

Solución Expresamos ambos lados como potencia de 3.

$$\frac{\sqrt[3]{9}}{27} = \frac{9^{1/3}}{3^3} = \frac{(3^2)^{1/3}}{3^3} = \frac{3^{2/3}}{3^3} = 3^{(2/3)-3} = 3^{-7/3}$$

Por tanto, $m = -\dfrac{7}{3}$

EJEMPLO 7 Evalúe: *a*) $\left(1\,\dfrac{64}{225}\right)^{1/2}$; *b*) $\left(\dfrac{64x^3}{7}\right)^{-2/3}$

Solución

$$a)\ \left(1\,\frac{64}{225}\right)^{1/2} = \left(\frac{289}{225}\right)^{1/2} = \left(\frac{17^2}{15^2}\right)^{1/2}$$

$$= \left[\left(\frac{17}{15}\right)^2\right]^{1/2} \qquad \text{(por la ley 5)}$$

$$= \left(\frac{17}{15}\right)^{2\cdot(1/2)} \qquad \text{(por la ley 3)}$$

$$= \left(\frac{17}{15}\right)^1 = 1\,\frac{2}{15}$$

$$b)\ \left(\frac{64x^3}{27}\right)^{-2/3} = \left(\frac{4^3x^3}{3^3}\right)^{-2/3} = \left[\left(\frac{4x}{3}\right)^3\right]^{-2/3} \qquad \text{(por la ley 5)}$$

$$= \left(\frac{4x}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{(4x/3)^2} \qquad \text{(por la ley 3)}$$

$$= \frac{1}{16x^2/9} = \frac{9}{16x^2}$$

EJEMPLO 8 Simplifique la siguiente expresión:

$$\frac{4^p \cdot 27^{p/3} \cdot 125^p \cdot 6^{2p}}{8^{p/3} \cdot 9^{3p/2} \cdot 10^{3p}}$$

Solución En expresiones tales como ésta, por lo general conviene escribir todas las bases en términos de sus factores primos.

$$\frac{4^p \cdot 27^{p/3} \cdot 125^p \cdot 6^{2p}}{8^{p/3} \cdot 9^{3p/2} \cdot 10^{3p}} = \frac{(2^2)^p \cdot (3^3)^{p/3} \cdot (5^3)^p \cdot (2\cdot 3)^{2p}}{(2^3)^{p/3} \cdot (3^2)^{3p/2} \cdot (2\cdot 5)^{3p}}$$

$$= \frac{2^{2p} \cdot 3^{3p/3} \cdot 5^{3p} \cdot 2^{2p} \cdot 3^{2p}}{2^{3\cdot(p/3)} \cdot 3^{2\cdot(3p/2)} \cdot 2^{3p} \cdot 5^{3p}} \qquad \text{(por las leyes 3 y 5)}$$

$$= \frac{(2^{2p} \cdot 2^{2p})(3^p \cdot 3^{2p}) \cdot 5^{3p}}{(2^p \cdot 2^{3p})(3^{3p}) \cdot 5^{3p}} \qquad \text{(combinando términos con bases iguales)}$$

$$= \frac{2^{4p} \cdot 3^{3p} \cdot 5^{3p}}{2^{4p} \cdot 3^{3p} \cdot 5^{3p}} = 1$$

EJEMPLO 9 Simplifique $(\sqrt{27} + \sqrt{75})/2\sqrt{12}$.

Solución Observemos que los tres radicales en esta expresión pueden simplificarse factorizando un cuadrado perfecto en cada uno de los números.

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$
$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$
$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

☛ **19.** Simplifique *a)* $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$
b) $\sqrt[3]{3} \div (\sqrt[3]{9})^2$
c) $\sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt{\sqrt{x}}$
d) $\sqrt{x}(\sqrt{x^3} + 3\sqrt{x})$

Por tanto,

$$\frac{\sqrt{27} + \sqrt{75}}{2\sqrt{12}} = \frac{3\sqrt{3} + 5\sqrt{3}}{2(2\sqrt{3})} = \frac{8\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{8}{4} = 2.$$

EJEMPLO 10 Simplifique: *a)* $\sqrt{x}(\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2})$; *b)* $\dfrac{\sqrt{x} + 2x}{\sqrt[3]{x}}$

Solución Exprese los radicales en términos de exponentes fraccionarios y luego utilice las propiedades distributivas y las leyes de los exponentes.

$$a)\quad \sqrt{x}(\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}) = x^{1/2}(x^{3/2} + x^{2/3})$$
$$= x^{1/2} \cdot x^{3/2} + x^{1/2} \cdot x^{2/3}$$
$$= x^2 + x^{7/6}$$

$$b)\quad \frac{\sqrt{x} + 2x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^{1/2} + 2x}{x^{1/3}}$$
$$= (x^{1/2} + 2x)x^{-1/3}$$
$$= x^{1/2} \cdot x^{-1/3} + 2x^1 \cdot x^{-1/3}$$
$$= x^{1/6} + 2x^{2/3}$$ ☛ **19**

Respuesta *a)* 4; *b)* 3^{-1}; *c)* x
d) $x^2 + 3x$

EJERCICIOS 1-4

(1-6) Encuentre m tal que las proposiciones siguientes sean verdaderas.

1. $8\sqrt[3]{2} = 2^m$

2. $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{8} = 2^m$

3. $\sqrt[3]{\dfrac{2}{8}} = 2^m$

4. $3\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3^m$

5. $\sqrt{\sqrt{2}} = 4^m$

6. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = 2^m$

(7-26) Evalúe las expresiones siguientes.

7. $\sqrt{81}$

8. $\sqrt[3]{27}$

9. $\sqrt{1\frac{9}{16}}$

10. $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$

11. $\sqrt[5]{-32}$

12. $\sqrt[3]{-0.125}$

13. $\sqrt{(-3)^2}$

14. $\sqrt{(-\frac{2}{5})^2}$

15. $(81)^{-3/4}$

16. $(\frac{8}{27})^{-4/3}$

17. $(0.16)^{-1/2}$

18. $(-0.16)^{3/4}$

19. $0.125^{-2/3}$

20. $0.0016^{3/4}$

21. $(9^{-3} \cdot 16^{3/2})^{1/6}$

22. $9^{3/4} \cdot 3^{-1/2}$

23. $16^{4/5} \cdot 8^{-2/5}$

24. $25^{1/3}(\frac{1}{5})^{-4/3}$

25. $(27)^{-2/3} \div (16)^{1/4}$

26. $-(\frac{1}{36})^{1/8} \div (6)^{-5/4}$

(27-56) Simplifique las expresiones siguientes.

27. $(16x^4)^{3/4}$

28. $\left(\dfrac{27x^3}{64}\right)^{2/3}$

29. $(32x^5y^{-10})^{1/5}$

30. $\sqrt[3]{\dfrac{8a^3}{27b^3}}$

31. $\sqrt[4]{x^{3/2} \cdot 16x^{1/2}}$

32. $(x^{1/3} \cdot x^{-2/5})^3$

33. $(x^{1/2} \cdot x^{-1/3})^2$

34. $(16x^{-4})^{-1/2} \div (8x^6)^{1/3}$

35. $\dfrac{x^{3/7}\,y^{2/5}}{x^{-1/7}\,y^{1/5}}$

36. $\dfrac{a^{4/9}b^{-3/4}}{a^{2/9}b^{-1/2}}$

37. $\left(\dfrac{p^{-1/5}q^{2/5}}{p^{-3/5}q^{-2/5}}\right)^{10}$

38. $\dfrac{(x^2y)^{-1/3}(xy)^{1/4}}{(xy^{-2})^{1/12}}$

39. $\dfrac{2x^{5/2}}{y^{3/4}} \div \dfrac{x^{2/3}}{3y^{2/5}}$

40. $(-2x^2y)^{1/5}(4^{-1}xy^{-2})^{-2/5}$

41. $3\sqrt{45} + \sqrt{20}$

42. $2\sqrt{24} - \sqrt{54}$

43. $2\sqrt{18} - \sqrt{32}$

44. $´8\sqrt{2} - 4\sqrt{8}$

45. $\sqrt{63} - \sqrt{175} + 4\sqrt{112}$

46. $\sqrt{112} - \sqrt{63} + \dfrac{224}{\sqrt{28}}$

47. $\dfrac{20}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{20} + \dfrac{50}{\sqrt{125}}$

48. $2\sqrt[3]{-16} - \sqrt[3]{-54}$

49. $a^{2/3} \cdot a^{-3/4} \cdot (a^2)^{-1/6} \cdot \dfrac{1}{(a^{1/12})^5}$

50. $a^{2/3} \cdot b^{-5/7} \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{7/8} \cdot \dfrac{a^{11/24}}{b^{23/56}}$

51. $\dfrac{2^{3m} \cdot 3^{2m} \cdot 5^m \cdot 6^m}{8^m \cdot 9^{3m/2} \cdot 10^m}$

52. $\dfrac{(x^{a+b})^2(y^{a+b})^2}{(xy)^{2a-b}}$

53. $\left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^c \cdot \left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^a \cdot \left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^b$

54. $\left(\dfrac{x^{a+b}}{x^{2b}}\right)\left(\dfrac{x^{b+c}}{x^{2c}}\right)\left(\dfrac{x^{c+a}}{x^{2a}}\right)$

55. $\dfrac{(27)^{2n/3} \cdot (8)^{-n/6}}{(18)^{-n/2}}$

56. $\dfrac{28^m \cdot 35^m \cdot 10^{3m}}{8^{5m/3} \cdot 49^m \cdot 25^{2m}}$

57. Establezca si las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas.

a) $\sqrt{5} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

b) $\sqrt{8} = \sqrt{2} + \sqrt{2}$

c) $\sqrt{21} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{3}$

d) $\sqrt{(-3)^2} = 3$

e) $\sqrt{-9} = -3$

f) $\sqrt{a^2} = a$ para todo real a

g) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ si $a > 0$ y $b > 0$

h) $a^m \cdot a^n = a^{mn}$

i) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m/n}$

j) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}} = a^{1/6}$

k) $\sqrt{a^2} = a$ si $a > 0$

■ 1-5 OPERACIONES ALGEBRAICAS

Cantidades del tipo $2x^2 - 3x + 7$, $5y^3 - y^2 + 6y + 2$ y $2x - 3/y + 4$ se denominan **expresiones algebraicas**. Los bloques de construcción de una expresión algebraica se llaman **términos**. Por ejemplo, la expresión $2x^2 - 3x + 7$ tiene tres términos, $2x^2$, $-3x$ y 7. La expresión $x^2y/3 - y/x$ tiene dos términos, $x^2y/3$ y y/x.

En el término $2x^2$, el factor 2 se denomina el **coeficiente numérico** (o simplemente el **coeficiente**). El factor x^2 se denomina la **parte literal** del término. En el término $-3x$, el coeficiente es -3 y la parte literal x. En el término $x^2y/3$, el coeficiente es $\frac{1}{3}$ y la parte literal es x^2y. El término 7 no tiene parte literal y se llama **término constante**. El coeficiente es 7.

Una expresión algebraica que contiene un solo término se denomina **monomio**. Una expresión que contiene exactamente dos términos se llama **binomio** y la que contiene precisamente tres términos se denomina **trinomio**. Los siguientes son unos cuantos ejemplos de expresiones de estos tipos.

Monomios: $2x^3$, $-5y^2$, $7/t$, 3, $2xy/z$

Binomios: $2x + 3$, $3x^2 - 5/y$, $6x^2y - 5zt$

Trinomios: $5x^2 + 7x - 1$, $2x^3 + 4x - 3/x$, $6y^2 - 5x + t$

En general una expresión que contiene más de un término se denomina **multinomio**.

Adición y sustracción de expresiones

Cuando 4 manzanas se suman a 3 manzanas obtenemos 7 manzanas. En la misma forma, $4x + 3x = 7x$. Esto es una simple consecuencia de la propiedad distributiva, dado que

$$4x + 3x = (4 + 3)x = 7x$$

Si usted compara con la sección 1-1 verá que aquí utilizamos la ley distributiva "hacia atrás", esto es, de derecha a izquierda. De una manera similar, podemos sumar cualesquiera dos expresiones cuyas partes literales sean iguales. Simplemente sumamos los dos coeficientes numéricos.

EJEMPLO 1

a) $2x + 9x = (2 + 9)x = 11x$

b) $4ab + 3ab = (4 + 3)ab = 7ab$

c) $\dfrac{2x}{y} + \dfrac{x}{2y} = 2 \cdot \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x}{y} = \left(2 + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{x}{y} = \dfrac{5x}{2y}$

Dos o más términos de una expresión algebraica se dice que son **semejantes** si tienen las mismas partes literales. Por ejemplo, $2x^2y$ y $5yx^2$ son semejantes dado que sus partes literales, x^2y y yx^2, son iguales. De manera similar, los tres términos $3x^2yz^3$, $-7x^2z^3y$ y $z^3x^2y/2$ son términos semejantes. En general, dos términos semejantes sólo pueden diferir en sus coeficientes numéricos o en el orden en que aparecen las variables.

Dos o más términos semejantes pueden sumarse o restarse usando la propiedad distributiva, como se ilustró en el ejemplo 1. A continuación ejemplos adicionales.

EJEMPLO 2

a) $2x^3 - 7x^3 = (2 - 7)x^3 = -5x^3$

b) $5x^2y - 3x^2y + 2yx^2 = (5 - 3 + 2)x^2y = 4x^2y$

Los términos que no son semejantes no pueden combinarse de la manera que acaba de verse. Así, los términos en la expresión $2x^2 + 5xy$ no pueden combinarse para dar un término individual.

Cuando sumamos dos o más expresiones algebraicas, reagrupamos los términos de tal manera que dos expresiones que sean semejantes aparezcan juntas. ☛ **20**

☛ **20.** Simplifique las expresiones siguientes:
a) $2ab^2 - 4ab^2a$
b) $x^3 + 2x - (2x^3 - 2x)$

Respuesta *a*) $-2ab^2$; *b*) $-x^3 + 4x$

EJEMPLO 3 Sume $5x^2y^3 - 7xy^2 + 3x - 1$ y $6 - 2x + 4xy^2 + 3y^3x^2$

Solución La suma requerida es

$$5x^2y^3 - 7xy^2 + 3x - 1 + (6 - 2x + 4xy^2 + 3y^3x^2)$$

$$= 5x^2y^3 - 7xy^2 + 3x - 1 + 6 - 2x + 4xy^2 + 3x^2y^3$$

Reagrupando los términos, de tal manera que los términos semejantes estén agrupados juntos, obtenemos la suma en la forma siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\underline{5x^2y^3 + 3x^2y^3} - \underline{7xy^2 + 4xy^2} + \underline{3x - 2x} - \underline{1 + 6} \\
&= (5 + 3)x^2y^3 + (-7 + 4)xy^2 + (3 - 2)x + (-1 + 6) \\
&= \quad 8x^2y_3 \quad + \quad (-3)xy^2 \quad + \quad 1x \quad + \ 5 \\
&= \quad 8x^2y^3 \quad - \quad 3xy^2 \quad + \quad x \quad + \ 5
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 4 Reste $3x^2 - 5xy + 7y^2$ a $7x^2 - 2xy + 4y^2 + 6$

Solución En este caso, buscamos

$$7x^2 - 2xy + 4y^2 + 6 - (3x^2 - 5xy + 7y^2)$$

Después de suprimir los paréntesis, cada término dentro de los paréntesis cambia de signo. En consecuencia, la expresión anterior es equivalente a la siguiente:

$$
\begin{aligned}
&7x^2 - 2xy + 4y^2 + 6 - 3x^2 + 5xy - 7y^2 \\
&= 7x^2 - 3x^2 - 2xy + 5xy + 4y^2 - 7y^2 + 6 \\
&= (7 - 3)x^2 + (-2 + 5)xy + (4 - 7)y^2 + 6 \\
&= \quad 4x^2 \quad + 3xy \quad + (-3)y^2 \quad + 6 \\
&= \quad 4x^2 \quad + 3xy \quad - 3y^2 \quad + 6
\end{aligned}
$$

Multiplicación de expresiones

La expresión $a(x + y)$ denota el producto de a y $x + y$. Para simplificar esta expresión suprimiendo los paréntesis, multiplicamos cada término dentro del paréntesis por el número que está afuera, en este caso a:

$$a(x + y) = ax + ay$$

Esto es simplemente por la propiedad distributiva. De manera similar, este método funciona siempre que una expresión algebraica se multiplique por cualquier monomio.

EJEMPLO 5

☛ **21.** Simplifique las expresiones siguientes eliminando los paréntesis:
a) $3(x - 2) + x(x - 3)$
b) $x^3 - 2x - 2x(x^2 - 1)$

a) $$\begin{aligned} -2(x - 3y + 7t^2) &= (-2)x - (-2)(3y) + (-2)(7t^2) \\ &= -2x + 6y - 14t^2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x^2y(x^2 + 3x - 5y^3) &= x^2y \cdot x^2 + x^2y \cdot 3x - x^2y \cdot 5y^3 \\ &= x^4y + 3x^3y - 5x^2y^4 \end{aligned}$$ ☛ **21**

Cuando multiplicamos dos expresiones algebraicas a la vez, la propiedad distributiva puede usarse más de una vez con la finalidad de suprimir los paréntesis. Consideremos el producto $(x + 2)(y + 3)$. Podemos emplear la propiedad distributivas para quitar los primeros paréntesis.

Respuesta *a*) $x^2 - 6$; *b*) $-x^3$

$$(x + 2)(y + 3) = x(y + 3) + 2(y + 3)$$

Para ver esto, sólo haga $y + 3 = b$. Entonces,

$$(x + 2)(y + 3) = (x + 2)b = x \cdot b + 2 \cdot b = x(y + 3) + 2(y + 3)$$

En general, las propiedades distributivas de la sección 1-1 funcionan con a, b, c reemplazadas por cualesquiera expresiones (como se hace con las otras propiedades de los números reales). Ahora usamos de nuevo esta propiedad para suprimir los paréntesis restantes.

$$x(y + 3) = xy + x \cdot 3 = xy + 3x$$

y asimismo

$$2(y + 3) = 2y + 2 \cdot 3 = 2y + 6$$

Por tanto, $(x + 2)(y + 3) = xy + 3x + 2y + 6$

En la figura 2 los cuatro términos (productos) de la derecha pueden obtenerse multiplicando cada uno de los términos de los primeros paréntesis sucesivamente por cada uno de los términos de los segundos paréntesis. Cada término de los primeros paréntesis está unido por un arco a cada término de los segundos paréntesis y el producto correspondiente también aparece. Los cuatro productos dan entonces el desarrollo completo de la expresión. ☛ **22**

☛ **22.** Utilice la propiedad distributiva (o método de los arcos) para eliminar los paréntesis:
a) $(x + 2)(x + 3)$
b) $(x^2 + 2)(x^2 - 2)$

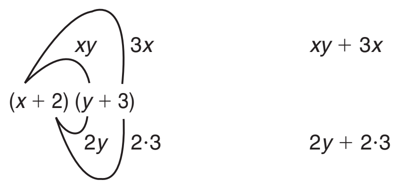


FIGURA 2

También pudo hacer lo que se pide con el método PIES de multiplicación de dos expresiones binomiales. (PIES se establece por "Primeros, Internos, Externos, Segundos"). Eso es equivalente al método de los arcos descrito aquí. Sin embargo, el método de arcos es mucho mejor ya que puede utilizarlo para multiplicar cualesquiera dos multinomios.

EJEMPLO 6 Desarrolle el producto $(3x - 4)(6x^2 - 5x + 2)$. (Esto significa suprimir los paréntesis).

Solución Usamos la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}(3x - 4)(6x^2 - 5x + 2) &= 3x(6x^2 - 5x + 2) - 4(6x^2 - 5x + 2)\\ &= (3x)(6x^2) - (3x)(5x) + (3x)(2)\\ &\quad + (-4)(6x^2) - (-4)(5x) + (-4)(2)\\ &= 18x^3 - 15x^2 + 6x - 24x^2 + 20x - 8\\ &= 18x^3 - 15x^2 - 24x^2 + 6x + 20x - 8\\ &\qquad \text{(agrupando términos semejantes)}\\ &= 18x^3 - (15 + 24)x^2 + (6 + 20)x - 8\\ &= 18x^3 - 39x^2 + 26x - 8\end{aligned}$$

Respuesta *a*) $x^2 + 5x + 6$
b) $x^4 - 4$

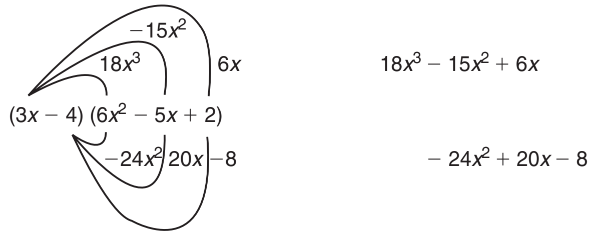


FIGURA 3

De forma alterna, podemos obtener la respuesta dibujando arcos que conecten cada término en el primer paréntesis con cada término dentro del segundo. En este caso, existen seis de tales arcos, dando lugar a seis productos en la expansión en el lado derecho. (Véase la figura 3).

EJEMPLO 7 Simplifique $3\{5x[2 - 3x] + 7[3 - 2(x - 4)]\}$

Solución Con el propósito de simplificar una expresión en la cual intervienen más de un conjunto de paréntesis, siempre empezamos con los paréntesis que están más adentro.

$$\begin{aligned}3\{5x[2 - 3x] + 7[3 - 2(x - 4)]\} &= 3\{5x[2 - 3x] + 7[3 - 2x + 8]\}\\ &= 3\{10x - 15x^2 + 21 - 14x + 56\}\\ &= 3\{-15x^2 + 10x - 14x + 21 + 56\}\\ &= 3\{-15x^2 - 4x + 77\}\\ &= -45x^2 - 12x + 231\end{aligned}$$

Existen ciertos tipos de productos especiales que aparecen con tanta frecuencia que pueden manejarse como fórmulas estándar. Inicialmente, consideremos el producto $(x + a)(a + b)$.

$$\begin{aligned}(x + a)(x + b) &= x(x + b) + a(x + b)\\ &= x^2 + bx + ax + ab\\ &= x^2 + (b + a)x + ab\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\boxed{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab. \qquad (1)}$$

EJEMPLO 8

a) Tomando $a = 2$ y $b = 7$ en la ecuación (1), tenemos que

$$(x + 2)(x + 7) = x^2 + (2 + 7)x + 2 \cdot 7 = x^2 + 9x + 14$$

b) $(x + 3)(x - 2) = (x + 3)(x + (-2))$

$$= x^2 + [3 + (-2)]x + 3(-2) = x^2 + x - 6$$

En la ecuación (1), si reemplazamos a b por a, obtenemos

$$(x + a)(x + a) = x^2 + (a + a)x + a \cdot a$$

o bien,

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \qquad (2)$$

Este resultado da el desarrollo del cuadrado de un binomio. *El cuadrado de la suma de dos términos es igual a la suma de los cuadrados de los dos términos más el doble de su producto.*

EJEMPLO 9

a) $(2x + 7)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(7) + 7^2 = 4x^2 + 28x + 49$

b) $\left(3x + \dfrac{4}{y}\right)^2 = \underline{(3x)^2 + 2(3x)\left(\dfrac{4}{y}\right) + \left(\dfrac{4}{y}\right)^2} = 9x^2 + \dfrac{24x}{y} + \dfrac{16}{y^2}$

Si reemplazamos a a por $-a$ en la fórmula (2), obtenemos otra fórmula.

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 \qquad (3)$$

Esto expresa *el cuadrado de la diferencia de dos términos como la suma de los cuadrados de los dos términos menos el doble de su producto.*

Por último, si reemplazamos a b por $-a$ en la ecuación (1), obtenemos

$$(x + a)(x - a) = x^2 + (a - a)x + a(-a) = x^2 + 0x - a^2$$

En consecuencia, tenemos que

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2 \qquad (4)$$

Este resultado establece que *el producto de la suma y la diferencia de dos términos es la diferencia de los cuadrados de los dos términos.*

☛ **23.** Utilice las fórmulas estándar (1) a (4) para eliminar los paréntesis:
a) $(x + 2)(x - 3)$
b) $(x^2 + y)(x^2 - y)$
c) $(x + x^{-1})^2$

EJEMPLO 10

a) $(2x + 3)(2x - 3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$

b) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1$

c) $(3x - 4y)(3x + 4y) = (3x)^2 - (4y)^2 = 9x^2 - 16y^2$ ☛ **23**

División de expresiones

En el teorema 6 de la sección 1-2 vimos que la ley distributiva se extiende a la división y tenemos las siguientes expresiones generales.

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Respuesta *a*) $x^2 - x - 6$
b) $x^4 - y^2$; *c*) $x^2 + 2 + x^{-2}$

Esta propiedad es útil cuando dividimos una expresión algebraica entre un monomio, dado que nos permite dividir cada término por separado entre el monomio.

EJEMPLO 11

$$a)\ \frac{2x^2 + 4x}{2x} = \frac{2x^2}{2x} + \frac{4x}{2x} = x + 2$$

Observe que dividimos cada término entre el factor común $2x$.

$$b)\ \frac{2x^3 - 5x^2y + 7x + 3}{x^2} = \frac{2x^3}{x^2} - \frac{5x^2y}{x^2} + \frac{7x}{x^2} + \frac{3}{x^2}$$

$$= 2x - 5y + \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2}$$

$$c)\ \frac{25t^3 + 12t^2 + 15t - 6}{3t} = \frac{25t^3}{3t} + \frac{12t^2}{3t} + \frac{15t}{3t} - \frac{6}{3t}$$

$$= \frac{25t^2}{3} + 4t + 5 - \frac{2}{t}$$

En una fracción, el número o expresión algebraica del numerador a menudo se denomina el **dividendo** (lo cual significa que es la cantidad que está siendo dividida) y el número o expresión por la que es dividido se llama **divisor**. En la parte *b*) del ejemplo 11, $2x^3 - 5x^2y + 7x + 3$ es el *dividendo* y x^2 es el *divisor,* mientras que en la parte *c*), $25t^3 + 12t^2 + 15t - 6$ es el *dividendo* y $3t$ el *divisor.*

Cuando queremos dividir una expresión algebraica entre un divisor que contiene más de un término, con frecuencia usamos un procedimiento denominado **división larga**. Describiremos este procedimiento para expresiones que sólo contienen potencias enteras no negativas de una sola variable. (Tales expresiones se conocen por **polinomios**).

EJEMPLO 12 Divida $23 - 11x^2 + 2x^3$ entre $2x - 3$

Solución Aquí $23 - 11x^2 + 2x^3$ es el dividendo y $2x - 3$ es el divisor. Antes de que empecemos la división, los términos en el dividendo y en el divisor deben arreglarse en orden decreciente de las potencias de x y llenar con coeficientes cero las potencias faltantes. En consecuencia, el dividendo debe escribirse como $2x^3 - 11x^2 + 0x + 23$.

$$\begin{array}{lcrl}
 & & x^2 - 4x - 6 & \leftarrow \ \textbf{Cociente} \\
\textbf{Divisor} & \rightarrow \ 2x - 3 & \overline{)2x^3 - 11x^2 + 0x + 23} & \leftarrow \ \textbf{Dividendo} \\
 & & \underline{2x^3 - 3x^2 \qquad\qquad} & \\
 & & - 8x^2 + 0x + 23 & \\
 & & \underline{- 8x^2 + 12x \qquad} & \\
 & & - 12x + 23 & \\
 & & \underline{- 12x + 18} & \\
 & & 5 & \leftarrow \ \textbf{Residuo}
\end{array}$$

☛ **24.** Por medio del uso de la división larga, simplifique $(3x^2 + 11x + 4) \div (x + 3)$

Los detalles de la división larga se acaban de mostrar y se explican de la manera siguiente: en primer lugar, dividimos $2x^3$ (el primer término en el dividendo) entre $2x$ (el primer término en el divisor), obteniendo $2x^3/2x = x^2$. Esto da el primer término del cociente. Multiplicamos el divisor, $2x - 3$, por el primer término del cociente, x^2, para obtener $2x^3 - 3x^2$. Restamos esto al dividendo, obtenemos la diferencia $-8x^2 + 0x + 23$. Para obtener el siguiente término del cociente, dividimos el primer término de esta diferencia, $-8x^2$, entre $2x$, el primer término del divisor. Esto da $-8x^2/2x = -4x$, el cual se convierte en el segundo término del cociente. Multiplicamos otra vez el divisor por este segundo término, $-4x$, con lo que obtenemos $-8x^2 + 12x$; restamos esto a $-8x^2 + 0x + 23$, los cuales nos dan la siguiente diferencia, $-12x + 23$. Continuamos este procedimiento hasta que obtengamos una diferencia cuya máxima potencia sea menor que la correspondiente al divisor. Llamamos a este última diferencia el **residuo**. La respuesta puede escribirse en la forma

Respuesta Cociente = $3x + 2$
residuo = -2

$$\frac{2x^3 - 11x^2 + 23}{2x - 3} = x^2 - 4x - 6 + \frac{5}{2x - 3}$$ ☛ **24**

En general, tenemos

$$\boxed{\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{Cociente} + \frac{\text{Residuo}}{\text{Divisor}}}$$

Observación Esta forma de escribir el resultado de la división larga es la misma que usamos en aritmética. Por ejemplo, consideremos la fracción 627/23, en la cual el dividendo es 627 y el divisor es 23. Por división larga ordinaria encontramos que el cociente es 27 y el residuo es 6.

$$\begin{array}{rcrcl}
 & & 27 & & \\
\textbf{Divisor} & \rightarrow & 23\overline{)627} & \leftarrow & \textbf{Divisor} \\
 & & \underline{46} & \leftarrow & \textbf{Cociente} \\
 & & 167 & & \\
 & & \underline{161} & \leftarrow & \textbf{Residuo} \\
 & & 6 & &
\end{array}$$

Por tanto, escribimos

$$\frac{627}{23} = 27 + \frac{6}{23}$$

Ahora, en vez de dividir 627 entre 23, intente dividir $6x^2 + 2x + 7$ entre $2x + 3$. Cuando $x = 10$ estas cantidades son lo mismo. Debe encontrar un cociente de $2x + 7$ y un residuo de 6. La división algebraica larga es un reflejo de la división aritmética.

Si multiplicamos ambos lados de este cálculo por 23, obtenemos el resultado

$$627 = (27 \cdot 23) + 6$$

☛ **25.** Verifique si es correcta la siguiente división larga:
$$\frac{3x^2 - 3x - 10}{x - 2} = 3x + 3 + \frac{4}{x - 2}$$

Respuesta Debe verificar que $3x^2 - 3x - 10 = (3x + 3)(x - 2) + 4$. Esto no es correcto. (El residuo debe ser -4)

Este es un ejemplo del resultado general

$$\boxed{\text{Dividendo} = (\text{Cociente})(\text{Divisor}) + \text{Residuo}}$$

Este es un resultado útil, porque nos permite verificar la respuesta de cualquier división larga. Podemos utilizar este resultado para comprobar el ejemplo 12.

$$2x^3 - 11x^2 + 23 = (x^2 - 4x - 6)(2x - 3) + 5$$

$$\text{Dividendo} = (\text{Cociente})(\text{Divisor}) + \text{Residuo}$$ ☛ **25**

EJERCICIOS 1-5

(1-56) En los ejercicios siguientes, efectúe la operación indicada y simplifique.

1. $(5a + 7b - 3) + (3b - 2a + 9)$

2. $(3x^2 - 5x + 7) + (-2 + 6x - 7x^2 + x^3)$

3. $(2\sqrt{a} + 5\sqrt{b}) + (3\sqrt{a} - 2\sqrt{b})$

4. $(4xy + 5x^2y - 6x^3) + (3y^3 - 6xy^2 + 7xy + x^3 - 2x^2y)$

5. $(7t^2 + 6t - 1) - (3t - 5t^2 + 4 - t^3)$

6. $(x^2 + 3xy + 4y^2) - (2x^2 - xy + 3y^2 - 5)$

7. $(2\sqrt{x} + \sqrt{2y}) - (\sqrt{x} - 2\sqrt{2y})$

8. $(5\sqrt{xy} - 3) - (2 - 4\sqrt{xy})$

9. $4(2x + 3y) + 2(5y + 3x)$

10. $2(x - 4y) + 3(2x + 3y)$

11. $-(x - 7y) - 2(2y - 5x)$

12. $3(x^2 - 2xy + y^2) - (2xy - x^2 + 2y^2)$

13. $x(2x^2 + 3xy + y^2) - y(5x^2 - 2xy + y^2)$

14. $a^2b(a^3 + 5ab - b^3) + 2ab(a^4 - 2a^2b + b^3a)$

15. $(x - 3)(y + 2)$

16. $(x + 4)(y - 5)$

17. $(2x + 1)(3y - 4)$

18. $(5x - 2)(2y - 5)$

19. $(a + 2)(3a - 4)$

20. $(x + 3y)(2x + y)$

21. $(x + 3)(2x^2 - 5x + 7)$

22. $(a - 2b)(a^2 - 2ab + b^2)$

23. $(x + 4)(x - 4)$

24. $(y^2 - 2)(y^2 + 2)$

25. $(2t + 5x)(2t - 5x)$

26. $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

27. $(\sqrt{x} + 3\sqrt{y})(\sqrt{x} - 3\sqrt{y})$

28. $(5\sqrt{x} + 2y)(5\sqrt{x} - 2y)$

29. $(x + y - z)(x + y + z)$

30. $(x - 2y + z)(x + 2y + z)$

31. $(x^2 - 1)(x^3 + 2)$

32. $(y^2 + 2y)(y^3 - 2y^2 + 1)$

33. $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)(x^3 + 2x)$

34. $\left(2xy - \frac{x}{y}\right)\left(xy^2 + \frac{2y}{x}\right)$

35. $(y + 6)^2$

36. $(x - 5)^2$

37. $(2x + 3y)^2$

38. $(4x - 5y)^2$

39. $(\sqrt{2x} - \sqrt{3y})^2$

40. $(\sqrt{x} + 2\sqrt{y})^2$

41. $(2x + 3y)^2 + (2x - 3y)^2$

42. $3[(x + y)^2 - (x - y)^2]$

43. $xy[(x + y)^2 + (x - y)^2]$

44. $(3a - b)^2 + 3(a + b)^2$

45. $3\{x^2 - 5[x + 2(3 - 5x)]\}$

46. $2\{a^2 - 2a[3a - 5(a^2 - 2)]\} + 7a^2 - 3a + 6$

47. $2a\{(a + 2)(3a - 1) - [a + 2(a - 1)(a + 3)]\}$

48. $(a + 3b)(a^2 - 3ab + b^2) - (a + b)^2(a + 2b)$

49. $\dfrac{4x^3 - 3x^2}{2x}$

50. $\dfrac{15x^5 - 25x^3}{5x^2}$

51. $\dfrac{x^3 + 7x^2 - 5x + 4}{x^2}$

52. $\dfrac{y^4 + 6y^3 - 7y^2 + 9y - 3}{3y^2}$

53. $\dfrac{t^2 - 2t + 7}{\sqrt{t}}$

54. $\dfrac{t^3 + 2t^2 - 3t + 1}{t\sqrt{t}}$

55. $\dfrac{6x^2y - 8xy^2}{2xy} + \dfrac{x^3y^2 + 2x^2y^3}{x^2y^2}$

56. $\dfrac{3x^4 - 9x^2y^2}{3x^3y} - \dfrac{4x^3 - 8xy^2}{2x^2y}$

(57-64) Simplifique por medio de la división larga:

57. $(x^2 - 5x + 6) \div (x - 2)$

58. $(6x^2 + x - 1) \div (3x - 1)$

59. $(t^2 + 1) \div (t - 1)$

60. $(6x^2 - 5x + 1) \div (2x - 3)$

61. $(x^3 + 2x^2 + x + 5) \div (x + 2)$

62. $x^3 \div (x + 1)$

63. $(2x^3 - 3x^2 + 4x + 6) \div (2x + 1)$

64. $(6x^3 + 11x^2 - 19x + 5) \div (3x - 2)$

■ 1-6 FACTORIZACIÓN

Si el producto de dos enteros a y b es c, es decir, $c = a \cdot b$, entonces a y b se llaman **factores** de c. En otras palabras, un entero a es un factor de otro entero c si a divide exactamente c. Por ejemplo, 2 y 3 son factores de 6; 2, 3, 4 y 6 son factores de 12; etcétera.

Esta terminología también se emplea para expresiones algebraicas. Si dos (o más) expresiones algebraicas se multiplican a la vez, estas expresiones se dice que son *factores* de la expresión que se obtuvo como producto. Por ejemplo, la expresión $2xy$ se obtuvo multiplicando 2, x y y, de modo que 2, x y y son los factores de $2xy$. Más aún, por ejemplo, $2y$ es un factor de $2xy$ ya que $2xy$ puede obtenerse multiplicando $2y$ por x.

De manera similar, x es un factor de la expresión $2x^2 + 3x$ puesto que podemos escribir $2x^2 + 3x = x(2x + 3)$ y x^2 es un factor de $6x^2 + 9x^3$ ya que podemos escribir $6x^2 + 9x^3 = x^2(6 + 9x)$.

El proceso de escribir una expresión dada como el producto de sus factores se llama **factorización** de la expresión. En esta sección, examinaremos ciertos métodos mediante los cuales podemos factorizar expresiones algebraicas.

La primera etapa en la factorización de una expresión algebraica es extraer todos los monomios que sean comunes a todos los términos. El ejemplo siguiente ilustra esto.

EJEMPLO 1 Factorice todos los monomios comunes de las expresiones siguientes.

a) $x^2 + 2xy^2$

b) $2x^2y + 6xy^2$

c) $6ab^2c^3 + 6a^2b^2c^2 + 18a^3bc^2$

☛ **26.** Saque todos lo factores comunes de
a) $12ab - 8a^2b$
b) $4xyz - 6x^2z + 12xy^2$
c) $x(3x - 1)^2 - y(3x - 1)^2$

Solución

a) Escribamos cada término en la expresión dada en términos de sus factores básicos.

$$x^2 = x \cdot x \quad 2xy^2 = 2 \cdot x \cdot y \cdot y$$

Observando las dos listas de factores básicos, advertimos que x es el único factor común a ambos términos. De modo que escribimos

$$x^2 + 2xy^2 = x \cdot x + x \cdot 2y^2 = x(x + 2y^2)$$

Note cómo la propiedad distributiva se utiliza para extraer el factor común, x.

b) Expresando cada término en términos de sus factores básicos, tenemos

$$2x^2y = 2 \cdot x \cdot x \cdot y \quad \text{y} \quad 6xy^2 = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y \cdot y$$

Los factores 2, x y y, aparecen en ambas listas, por lo que el factor común es $2xy$. Esto da

$$2x^2y + 6xy^2 = 2xy \cdot x + 2xy \cdot 3y = 2xy(x + 3y)$$

de nuevo, usando la propiedad distributiva.

c) Primero factorizamos los términos:

$$6ab^2c^3 = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c$$
$$6a^2b^2c^2 = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c$$
$$18a^3bc^2 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot c \cdot c$$

El factor común de estos tres términos es $2 \cdot 3 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot c = 6abc^2$

$$\begin{aligned} 6ab^2c^3 + 6a^2b^2c^2 + 18a^3bc^2 &= 6abc^2 \cdot bc + 6abc^2 \cdot ab + 6abc^2 \cdot 3a^2 \\ &= 6abc^2(bc + ab + 3a^2) \end{aligned}$$ ☛ **26**

Respuesta *a*) $4ab(3 - 2a)$
b) $2x(2yz - 3xz + 6y^2)$
c) $(3x - 1)^2(x - y)$

Ahora abordaremos el problema de extraer factores que son expresiones binomiales de expresiones algebraicas de diversos tipos. Algunas de las fórmulas establecidas en la sección 1-5 son útiles en la factorización, en particular la fórmula siguiente.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \tag{1}$$

Esta fórmula puede usarse para factorizar cualquier expresión que sea reducible a la *diferencia de dos cuadrados.*

EJEMPLO 2 Factorice completamente: *a*) $x^2y^4 - 9$; *b*) $5x^4 - 80y^4$

Solución *a*) La expresión dada puede escribirse como

$$(xy^2)^2 - 3^2$$

que es una diferencia de dos cuadrados. Usando la fórmula (1) con $a = xy^2$ y $b = 3$, tenemos

$$x^2y^4 - 9 = (xy^2)^2 - 3^2 = (xy^2 - 3)(xy^2 + 3)$$

Ninguna de las expresiones entre paréntesis en el lado derecho puede factorizarse aún más.

b) Antes que todo, verifiquemos si podemos factorizar algún monomio de $5x^4 - 80y^4$. En este caso, dado que el término es divisible entre 5, sacamos el factor común 5.

$$5x^4 - 80y^4 = 5(x^4 - 16y^4)$$

La expresión $x^4 - 16y^4$ es una diferencia de cuadrados.

$$\begin{aligned} 5x^4 - 80y^4 &= 5[(x^2)^2 - (4y^2)^2] \\ &= 5[(x^2 - 4y^2)(x^2 + 4y^2)] \\ &= 5[(x^2 - 4y^2)(x^2 + 4y^2) \end{aligned}$$

La factorización no está completa, porque $x^2 - 4y^2 = x^2 - (2y)^2$ puede factorizarse aun como $(x - 2y)(x + 2y)$. En consecuencia, nos falta un paso.

☛ **27.** Utilice la fórmula para la diferencia de cuadrados, para factorizar $2x^2 - 4$

$$\begin{aligned} 5x^4 - 80y^4 &= 5(x^2 - 4y^2)(x^2 + 4y^2) \\ &= 5(x - 2y)(x + 2y)(x^2 + 4y^2) \end{aligned}$$ ☛ **27**

Observaciones 1. La fórmula (1) nos permite factorizar cualquier expresión que tenga la forma de una diferencia de cuadrados. No existe una fórmula correspondiente para expresar la suma $a^2 + b^2$ como el producto de dos o más factores. Una expresión que contiene la *suma* de dos cuadrados, tal como $a^2 + b^2$ o $4x^2 + 9y^2$, no puede factorizarse.

Sin embargo, expresiones tales como $a^3 + b^3$, $a^4 + b^4$, etc., que contienen la suma de dos potencias más altas pueden factorizarse. Esto se examina después.

2. Podemos escribir

$$x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

Por lo regular es aceptable incluir números irracionales (como $\sqrt{2}$) en los factores. Sin embargo, preferimos no usar expresiones que incluyan a $\sqrt{x}$ como factores. Por ejemplo, como regla no escribiremos

$$x - 4 = (\sqrt{x})^2 - 2^2 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)$$

Una técnica útil al factorizar expresiones algebraicas que contienen un número par de términos es el **método de agrupamiento**. En este método, los términos se agrupan en parejas y los monomios comunes se extraen de cada par de términos. Esto a menudo revela un factor binomial común a todas las parejas. Este método es en particular útil para expresiones que contienen cuatro términos.

Respuesta $(\sqrt{2}x - 2)(\sqrt{2}x + 2)$ o bien $2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

EJEMPLO 3 Factorice $ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2$

Solución Podemos agrupar los términos de la expresión dada en aquellos que tienen a x^2 como factor y en aquellos que tienen a y^2 como factor:

$$(ax^2 + bx^2) + (ay^2 + by^2)$$

Cada término dentro de los primeros paréntesis es divisible entre x^2, y cada término en los segundos paréntesis es divisible entre y^2; por tanto, podemos escribir esta expresión como

$$x^2(a + b) + y^2(a + b)$$

Note que $(a + b)$ es común a ambos términos. Así,

$$x^2(a + b) + y^2(a + b) = (a + b)(x^2 + y^2)$$

De aquí que la expresión dada tenga los factores $(a + b)$ y $(x^2 + y^2)$

EJEMPLO 4 Factorice la expresión $2x^3y - 4x^2y^2 + 8xy - 16y^2$

Solución Observemos en primer lugar que los términos de esta expresión tienen un monomio como factor común $2y$, y podemos escribir

$$2x^3y - 4x^2y^2 + 8xy - 16y^2 = 2y(x^3 - 2x^2y + 4x - 8y)$$

Dentro de los paréntesis, agrupamos juntos los primeros dos términos y extraemos el factor común x^2; también agrupamos los dos últimos términos y sacamos el factor común 4.

$$\begin{aligned} \underbrace{x^3 - 2x^2y}_{x^2 \text{ es común}} + \underbrace{4x - 8y}_{4 \text{ es común}} &= x^2(x - 2y) + 4(x - 2y) \\ &= (x - 2y)\ (x^2 + 4) \end{aligned}$$

Observe que este mismo resultado pudo obtenerse agrupando el primer y el tercer término y el segundo con el cuarto.

$$\begin{aligned} \underbrace{x^3 + 4x}_{x \text{ es común}} - \underbrace{2x^2y - 8y}_{-2y \text{ es común}} &= x(x^2 + 4) - 2y(x^2 + 4) \\ &= (x^2 + 4)\ (x - 2y) \end{aligned}$$

Regresando a la expresión original, tenemos

$$2x^3y - 4x^2y^2 + 8xy - 16y^2 = 2y(x - 2y)(x^2 + 4)$$

No es posible factorizar aún más las expresiones de la derecha, de modo que aquí termina la factorización. ☛ **28**

☛ **28.** Por agrupación, factorice la expresión $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

Respuesta $(x + 2)(x^2 - 9) = (x + 2)(x - 3)(x + 3)$

Un tipo importante de factorización que aparece con frecuencia requiere hallar los factores de expresiones del tipo

$$x^2 + px + q$$

donde p y q son constantes. A menudo tales expresiones pueden escribirse como el producto de dos factores $(x + a)$ y $(x + b)$, siendo a y b dos números reales. Por ejemplo, puede comprobarse de inmediato que $x^2 + 3x + 2$ (en la cual $p = 3$ y $q = 2$) es igual al producto de $x + 1$ y $x + 2$:

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

En este caso, $a = 1$ y $b = 2$

En general, si p y q están dados; deseamos encontrar a y b tales que

$$x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$$

Pero vimos en la sección 1-5 que

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

y, por tanto,

$$x^2 + px + q = x^2 + (a + b)x + ab$$

Estas dos expresiones son iguales con tal que $a + b = p$ y $ab = q$. De modo que, con el propósito de determinar a y b, debemos encontrar dos números cuya suma sea igual a p y su producto igual a q. En términos de la expresión original $x^2 + px + q$, la suma $a + b$ es igual al coeficiente de x y el producto ab es igual al término constante.

El procedimiento para encontrar a y b consiste en examinar todos los posibles pares de enteros cuyo producto sea igual a q. Seleccionamos entonces el par (si es que existe) cuya suma sea el coeficiente de x.

EJEMPLO 5 Factorice $x^2 + 7x + 12$

Solución Aquí $p = 7$ y $q = 12$. Debemos encontrar dos números a y b tales que el producto de a y b sea 12 y cuya suma sea 7. Consideremos todas las posibles parejas que factorizan a 12.

$a = 1$	$b = 12$	$a + b = 13$
$a = -1$	$b = -12$	$a + b = -13$
$a = 2$	$b = 6$	$a + b = 8$
$a = -2$	$b = -6$	$a + b = -8$
$a = 3$	$b = 4$	$a + b = 7$
$a = -3$	$b = -4$	$a + b = -7$

De la lista anterior, advertimos que la elección adecuada es $a = 3$ y $b = 4$. Por tanto,

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

Observación La elección $a = 4$ y $b = 3$ da exactamente la misma pareja de factores.

EJEMPLO 6 Factorice (a) $x^2 - 5x + 6$; (b) $3x^2 - 3x - 6$

Solución

a) La factorización de $x^2 - 5x + 6$ se logra, si encontramos dos factores de $+6$ (el término constante) cuya suma sea -5 (el coeficiente de x). Los factores posibles de 6 son (1)(6), $(-1)(-6)$, (2)(3) y $(-2)(-3)$. Los dos factores de 6 cuya suma es -5 son -2 y -3. De esta manera, hacemos $a = -2$ y $b = -3$.

$$x^2 - 5x + 6 = (x + a)(x + b) = [x + (-2)][x + (-3)] = (x - 2)(x - 3)$$

b) Observemos en primer lugar que un factor común es 3:

$$3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2)$$

Para factorizar $x^2 - x - 2$, debemos encontrar dos factores de -2 (el término constante) cuya suma sea -1 (el coeficiente de x). Los factores posibles de -2 son $1(-2)$ y $(-1)(2)$. Sólo los factores 1 y -2 suman -1, esto es, $1 + (-2) = -1$. En consecuencia,

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)[x + (-2)] = (x + 1)(x - 2)$$

Por tanto, nuestra expresión original puede factorizarse de la manera siguiente

$$3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2) = 3(x + 1)(x - 2)$$

EJEMPLO 7 Factorice $x^2 + 6x + 9$.

Solución Tenemos que $p = 6$ y $q = 9$. Es claro que los dos factores de 9 cuya suma es 6 son 3 y 3. Así, la expresión dada tiene factores $x + 3$ y $x + 3$; por tanto,

☛ **29.** Factorice
a) $4x^2 - 16x + 16$; *b*) $x^2 + x - 12$

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2$$ ☛ **29**

Consideremos ahora el problema de factorizar una expresión de la forma

$$mx^2 + px + q$$

en donde *m, p* y *q* son contantes distintas de cero y $m \neq 1$ o -1. En este caso, el primer paso consiste en encontrar dos factores del producto mq que tengan una suma igual a *p,* el coeficiente de *x*. Después expresamos *p* como la suma de esos dos factores. Esto transforma la expresión dada en la suma de cuatro términos. Éstos pueden considerarse de dos en dos y factorizarse por el método de agrupamiento. Este método se ilustra en los ejemplos 8 y 9.

Respuesta *a*) $4(x - 2)^2$
b) $(x - 3)(x + 4)$

EJEMPLO 8 Factorice $3x^2 + 11x + 6$

Solución En esta expresión, los coeficientes son $m = 3$, $p = 11$ y $q = 6$. El producto del coeficiente de x^2 y el término constante es $mq = 3(6) = 18$. Debemos encontrar dos factores de este producto 18 que tengan una suma igual a 11, el coeficiente de *x*. Es claro que, los dos factores adecuados son 9 y 2. En consecuencia, en la expresión dada, expresamos el coeficiente de *x,* 11, en la forma $9 + 2$ y escribimos

$$3x^2 + 11x + 6 = 3x^2 + (9 + 2)x + 6 = 3x^2 + 9x + 2x + 6$$

Podemos sacar a $3x$ como factor común de los dos primeros términos y 2 como factor común de los términos restantes.

$$3x^2 + 11x + 6 = 3x(x + 3) + 2(x + 3) = (x + 3)(3x + 2)$$

Obsérvese que, en el último paso, se extrajo $x + 3$ como factor común de los dos términos.

EJEMPLO 9 Factorice $6x^2 - 5x - 4$

Solución El producto del coeficiente de x^2 y del término constante es $6(-4) = -24$. Debemos encontrar dos factores de -24 que sumados den -5, el coeficiente de x. Sin duda, los dos factores de -24 cuya suma es -5 son 3 y -8. Por tanto, escribimos -5 como $-8 + 3$ en la expresión dada. Esto da la factorización siguiente:

$$\begin{aligned} 6x^2 - 5x - 4 &= 6x^2 + (-8 + 3)x - 4 \\ &= 6x^2 - 8x + 3x - 4 \\ &= 2x(3x - 4) + 1(3x - 4) \\ &= (3x - 4)(2x + 1) \end{aligned}$$ ☛ **30**

☛ **30.** Factorice *a*) $4x^2 - 9x + 2$ *b*) $6x^2 - x - 12$

EJEMPLO 10 Factorice $2(x + y)^2 - 5(x + y) + 3$

Solución Sea $z = x + y$. Entonces la expresión dada se transforma en

$$2z^2 - 5z + 3$$

El producto de los coeficientes externos es $2 \cdot 3 = 6$. Dos números cuyo producto es 6 y su suma es -5 son -2 y -3. De modo que escribimos

$$\begin{aligned} 2z^2 + 5z + 3 &= 2z^2 - 2z - 3z + 3 = 2z(z - 1) - 3(z - 1) \\ &= (2z - 3)(z - 1) = (2x + 2y - 3)(x + y - 1) \end{aligned}$$

después de reemplazar z con $x + y$ en el último paso.

Las dos fórmulas siguientes son útiles al factorizar una expresión la cual puede expresarse como una suma o como una diferencia de dos cubos.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \tag{2}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \tag{3}$$

Estas fórmulas pueden comprobarse multiplicando las dos expresiones de la derecha. De forma alterna pueden determinarse por medio de la división larga de $(a^3 \pm b^3) \div (a \pm b)$. (Véanse los ejercicios del 57 al 64 en la sección 1-5).

EJEMPLO 11 Factorice $8x^3 + 27y^3$

Solución Usamos la fórmula (2).

$$\begin{aligned} 8x^2 + 27y^3 &= (2x)^3 + (3y)^3 \\ &= (2x + 3y)[(2x)^2 - (2x)(3y) + (3y)^2] \\ &= (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2) \end{aligned}$$

Respuesta *a*) $(x - 2)(4x - 1)$ *b*) $(2x - 3)(3x + 4)$

☛ **31.** Factorice $24x^4 + 3x$

Respuesta $3x(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$

Note que la expresión $4x^2 - 6xy + 9y^2$ no puede factorizarse aún más porque el producto del coeficiente de x^2 y el término constante es $4(9y^2) = 36y^2$, el cual no puede expresarse como el producto de dos factores cuya suma sea $-6y$, el coeficiente de x. ☛ **31**

EJEMPLO 12 Factorice la expresión

$$(m + n)^4(m - n) - (m - n)^4(m + n)$$

☛ **32.** Factorice $6(x + 2y)^{7/3}(3x - y)^{5/4} - 2(x + 2y)^{4/3}(3x - y)^{9/4}$

Respuesta $14y(x + 2y)^{4/3}(3x - y)^{5/4}$

Solución Primero haga $x = m + n$ y $y = m - n$. Entonces, la expresión dada es

$$x^4y - y^4x = xy(x^3 - y^3) = xy(x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Ahora, $x - y = m + n - (m - n) = 2n$ y

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= (m + n)^2 + (m + n)(m - n) + (m - n)^2 \\ &= (m^2 + 2mn + n^2) + (m^2 - n^2) + (m^2 - 2mn + n^2) \\ &= 3m^2 + n^2 \end{aligned}$$

Por tanto, la expresión dada se factoriza como

$$xy(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 2n(m + n)(m - n)(3m^2 + n^2)$$ ☛ **32**

Observación De acuerdo con las fórmulas (2) y (3), la suma y la diferencia de dos cubos siempre puede factorizarse. De hecho, toda expresión del tipo $a^n + b^n$ o $a^n - b^n$ puede factorizarse para todos los enteros $n \geq 2$ con la única excepción de la suma de dos cuadrados, $a^2 + b^2$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} a^4 - b^4 &= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) \\ a^5 + b^5 &= (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \\ a^4 + b^4 &= (a^2 + \sqrt{2}ab + b^2)(a^2 - \sqrt{2}ab + b^2) \end{aligned}$$

etcétera.

Resumen de factorización:

1. El primer paso al factorizar una expresión algebraica es extraer todos los monomios comunes.
2. Si observa entonces un factor que es la *diferencia de dos cuadrados,* la *diferencia de dos cubos* o la *suma de dos cubos,* utilice las fórmulas (1), (2) o (3) con el propósito de factorizar aún más.
3. Para factorizar una expresión con cuatro términos, deberá usar el *método de agrupamiento.*
4. Un trinomio del tipo $mx^2 + px + q$ a menudo puede factorizarse como el producto de dos factores del tipo $(ax + b)(cx + d)$, como ya se esbozó.

EJERCICIOS 1-6

(1-79) Factorice por completo las siguientes expresiones.

1. $3a + 6b$

2. $2x^2 + 10xy + 4x^3$

3. $4xy - 6yz$

4. $5x^2y + 10xy^2$

5. $2u + av - 2v - au$

6. $px - qy + py - qx$

7. $xy + 4x - 2y - 8$

8. $pq - 6q - 3p + 18$

9. $3x - py - 3y + px$

10. $2px - 3y + py - 6x$

11. $6xz - 16y - 24x + 4yz$

12. $15ac - 9ad - 30bc + 18bd$

13. $x^2 - 16$

14. $4y^2 - 25$

15. $3t^2 - 108a^2$

16. $5x^2 - 20y^2$

17. $x^3y - 25xy^3$

18. $x^5 - 4x^3y^2$

19. $x^2 + 3x + 2$

20. $x^2 + 5x + 6$

21. $x^2 + x - 2$

22. $x^2 - 7x + 12$

23. $x^2 - x - 2$

24. $x^2 - 8x + 12$

25. $x^2 - 15x + 54$

26. $x^2 - 14x + 48$

27. $x^2 - 12x + 11$

28. $x^2 - 9x + 20$

29. $2x^2 + 2x - 12$

30. $3x^2 - 6x + 3$

31. $5y^4 + 25y^3 - 70y^2$

32. $12x - 7x^2 + x^3$

33. $2x^2 + 5x + 3$

34. $6x^2 + 10x - 4$

35. $9 + 12x + 4x^2$

36. $9t^2 - 12t + 4$

37. $5x^2 - 17x + 6$

38. $2t^2 - 3t - 14$

39. $10x^2 - 11x - 6$

40. $2t^2 - 7t + 6$

41. $3q^2 + 20q + 32$

42. $10p^2 + 3p - 18$

43. $6x^3y + 4x^2y - 10xy$

44. $(x^3 - 9x) + (45 - 5x^2)$

45. $x^2 + 6xy + 5y^2$

46. $x^2 - 4xy - 5y^2$

47. $p^2 - pq - 20q^2$

48. $s^2 + 7st - 30t^2$

49. $2t^2 + tu - 6u^2$

50. $2x2 - 9xy + 10y^2$

51. $6a^2 + ab - 15b^2$

52. $18u^2 + 15uv - 12v^2$

53. $x^3 - 27$

54. $8t^3 + 125$

55. $27u^3 + 8v^3$

56. $128x^3 - 54$

57. $64x^4y^2 - 27xy^5$

58. $x^2y^2 - a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2$

59. $x^2y^2 - 9y^2 - 4x^2 + 36$

60. $5u^2v^2 - 20v^2 + 15u^2 - 60$

61. $x^2z^2 - 4z^2 + x^4 - 4x^2$

62. $ax^3 + by^3 + bx^3 + ay^3$

63. $x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$

64. $x^3y - 8 + 8y - x^3$

65. $(x + y)^3(3x - 2y)^4 + 2(x + y)^4(3x - 2y)^3$

66. $2(a - b)^2 (a + b)^3 - 5(a + b)^2 (a - b)^3$

67. $(x + y)^2 + 3(x + y) + 2$

68. $2(x + y)^2 + 5(x + y) + 2$

69. $3(a - b)^2 + 5(a - b) + 2$

70. $2(p - q)^2 - (p - q) - 1$

71. $3x^{2n} + 7x^n + 2$

72. $x^6 + y^6$

73. $x^6 - 8y^6$

74. $x^4 - 16y^4$

75. $(2x + 1)^2 - (x + 3)(x + 1)$

76. $5 + (2x + 3)^2 - (3x + 2)(x + 1)$

***77.** $x^4 + 4y^4$

***78.** $16a^4 + b^4$

***79.** $x^5 + y^5$

■ 1-7 FRACCIONES ALGEBRAICAS

El término **fracción algebraica** se emplea por lo general para indicar la razón de dos expresiones que contienen una o más variables, tales como las siguientes:

$$\frac{x^2 - 7x + 5}{2x + 3} \quad \text{y} \quad \frac{x^2y + xy^2}{x - y}$$

Con el propósito de que una expresión algebraica tenga sentido, se dará por hecho que la variable o variables no tomen valores que hagan que el denominador de la fracción sea cero. Así, en la fracción de la izquierda, $x \pm -\frac{3}{2}$, pues si $x = -\frac{3}{2}$, $2x + 3 = 2(-\frac{3}{2}) + 3 = -3 + 3 = 0$, y el denominador sería cero. De manera similar, en la fracción de la derecha, $y \neq x$.

En esta sección, estudiaremos métodos para simplificar fracciones algebraicas y examinaremos la adición, sustracción, multiplicación y división de dos o más de tales fracciones. La factorización desempeña un papel importante en tales operaciones, como se aclarará en los ejemplos siguientes. *Los principios básicos involucrados son los mismos que se describieron cuando se simplificaron fracciones en la sección 1-2.*

Simplificación de fracciones

EJEMPLO 1 Simplifique $\dfrac{4x^2 - 20x + 24}{6 + 10x - 4x^2}$

Solución En primer lugar, factorizamos por completo las expresiones que aparecen en el numerador y en el denominador. En este caso, tenemos

$$4x^2 - 20x + 24 = 4(x^2 - 5x + 6) = 2 \cdot 2(x - 2)(x - 3)$$

y asimismo

$$6 + 10x - 4x^2 = -2(2x^2 - 5x - 3) = -2(2x + 1)(x - 3)$$

Note que al factorizar el denominador, primero hicimos que el coeficiente de x^2 fuera positivo, de modo que los términos en x sean positivos tanto en el numerador como en el denominador. Por tanto,

$$\frac{4x^2 - 20x + 24}{6 + 10x - 4x^2} = \frac{2 \cdot 2(x - 2)(x - 3)}{-2(2x + 1)(x - 3)}$$
$$= \frac{2(x - 2)}{-(2x + 1)} = \frac{-2(x - 2)}{2x + 1}$$

☛ **33.** Simplifique $\dfrac{2x^2 - 4x + 2}{x^2 - 4x + 3}$

Indique cualesquiera valores de x en los que la fracción dada no sea igual a su respuesta.

Observe que hemos dividido el numerador y el denominador entre los factores 2 y $x - 3$, los cuales aparecen tanto en el numerador como en el denominador. Esta cancelación de factores se justificó en la sección 1-2 (véase la página 10 y el teorema 5). Puede hacerse para factores binomiales como $(x - 3)$ en este ejemplo así como para factores que son monomios. (Tales factores siempre deber ser diferentes de cero; de otra forma, la fracción original no estaría bien definida). ☛ **33**

Algunas veces encontraremos fracciones que contienen radicales en el denominador, tales como

$$\frac{2}{3 - \sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \frac{x}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}$$

Respuesta $\dfrac{2(x - 1)}{x - 3}$, $x \neq 1$

En la primera fracción sólo intervienen números, mientras que la segunda es algebraica. En tales casos, dado que el denominador sólo tiene dos términos, podemos simplificar la fracción por medio de una operación llamada **racionalización del**

denominador. Consideremos la primera de las dos fracciones anteriores como un ejemplo. Multipliquemos el numerador y el denominador por $3 + \sqrt{2}$, lo que tiene el efecto de pasar el radical al numerador:

$$\frac{2}{3 - \sqrt{2}} = \frac{2(3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})}$$

Esto funciona dado que el denominador de esta nueva fracción puede simplificarse por medio de la fórmula de la diferencia de dos cuadrados,

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Tomando $a = 3$ y $b = \sqrt{2}$, tenemos

$$(3 - \sqrt{2})\,(3 + \sqrt{2}) = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7$$

Por tanto,

$$\frac{2}{3 - \sqrt{2}} = \frac{2(3 + \sqrt{2})}{7}$$

En general, para racionalizar una fracción que involucra una expresión de la forma $A + \sqrt{B}$ en el denominador, multiplicamos numerador y denominador por $A - \sqrt{B}$. Si $A - \sqrt{B}$ aparece, multiplicamos numerador y denominador por $A + \sqrt{B}$. Más generalmente, si un factor del tipo $P\sqrt{A} \pm Q\sqrt{B}$ aparece en el denominador de una fracción, multiplicamos numerador y denominador por $(P\sqrt{A} \mp Q\sqrt{B})$. (Observe el cambio de signo en el segundo término).

EJEMPLO 2 Racionalice los denominadores de las expresiones siguientes:

$$a)\ \frac{1}{2\sqrt{5} + 3\sqrt{3}} \qquad b)\ \frac{x - 3}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{5}}$$

Solución

a) El factor $2\sqrt{5} + 3\sqrt{3}$ aparece en el denominador por lo que multiplicamos por $2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{5} + 3\sqrt{3}} &= \frac{1 \cdot (2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})}{(2\sqrt{5} + 3\sqrt{3})(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})}\\ &= \frac{2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{(2\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{3})^2}\\ &= \frac{2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{4 \cdot 5 - 9 \cdot 3} = \frac{2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{20 - 27}\\ &= -\frac{1}{7}\,(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})\end{aligned}$$

b) Multiplicamos por $\sqrt{x+2}+\sqrt{5}$:

$$\frac{x-3}{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}} = \frac{(x-3)(\sqrt{x+2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{5})(\sqrt{x+2}+\sqrt{5})}$$
$$= \frac{(x-3)(\sqrt{x+2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{5})^2}$$
$$= \frac{(x-3)(\sqrt{x+2}+\sqrt{5})}{x+2-5}$$
$$= \frac{(x-3)(\sqrt{x+2}+\sqrt{5})}{x-3}$$
$$= \sqrt{x+2}+\sqrt{5}$$

☛ **34.** Racionalice el denominador de $\frac{5+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}$

en donde en el último paso cancelamos el factor común (x – 3). ☛ **34**

Adición y sustracción de fracciones

Dos o más fracciones que tienen un común denominador pueden sumarse o restarse simplemente sumando o restando sus numeradores, manteniendo sin cambio el denominador.

EJEMPLO 3

a) $$\frac{2x+3}{x+1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{(2x+3)+(x-1)}{x+1}=\frac{2x+3+x-1}{x+1}$$
$$=\frac{3x+2}{x+1}$$

b) $$\frac{2x+5}{x-1}-\frac{7}{x-1}=\frac{(2x+5)-7}{x-1}=\frac{2x-2}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x-1}=2$$

Cuando las fracciones que se suman o restan no tienen el mismo denominador, encontramos primero su mínimo común denominador (m.c.d.) y reemplazamos cada una de las fracciones dadas por una equivalente que tenga este m.c.d. como denominador. Este método, en principio, no difiere del que se describió en la sección 1-2.

El cálculo del m.c.d. de dos o más fracciones requiere factorizar cada denominador por completo. Después, el m.c.d. se obtiene multiplicando todos los factores distintos que aparecen en los denominadores y elevando cada factor a la máxima potencia con que aparece en los denominadores. Por ejemplo, el m.c.d. de

$$\frac{2x+1}{x-3} \quad \text{y} \quad \frac{3x-1}{2x+7} \quad \text{es} \quad (x-3)(2x+7)$$

El m.c.d. de $\frac{x+1}{(x-1)^2}$, $\frac{5}{(x-1)(x+2)}$ y $\frac{7}{(x+2)^3(x+3)}$ es

$$(x-1)^2(x+2)^3(x+3)$$

Respuesta $\frac{1}{23}(27+10\sqrt{2})$

EJEMPLO 4 Simplifique $\dfrac{2x+1}{x+2}+\dfrac{x-1}{3x-2}$

Solución Aquí los denominadores ya están factorizados por completo. El m.c.d. en este caso es $(x+2)(3x-2)$. La sustitución de la primera fracción $(2x+1)/(x+2)$ por una equivalente que tenga el m.c.d. $(x+2)(3x-2)$ como denominador, se logra multiplicando el numerador y el denominador por la fracción $3x-2$. En consecuencia,

$$\frac{2x+1}{x+2}=\frac{(2x+1)(3x-2)}{(x+2)\,(3x-2)}$$

De manera análoga,

$$\frac{x-1}{3x-2}=\frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)(3x-2)}$$

Por tanto, tenemos la suma siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{x+2}+\frac{x-1}{3x-2}&=\frac{(2x+1)(3x-2)}{(x+2)(3x-2)}+\frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)(3x-2)}\\&=\frac{(2x+1)(3x-2)+(x-1)(x+2)}{(x+2)(3x-2)}\\&=\frac{(6x^2-x-2)+(x^2+x-2)}{(x+2)(3x-2)}\\&=\frac{7x^2-4}{(x+2)(3x-2)}\end{aligned}$$ ☛ **35**

☛ **35.** Simplifique $\dfrac{4x+2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x-1}$

EJEMPLO 5 Simplifique $\dfrac{5}{x^2-3x+2}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{x^2-4x+4}$

Solución La expresión dada, después de factorizar los denominadores, es

$$\frac{5}{(x-1)(x-2)}-\frac{1}{x+2}+\frac{3}{(x-2)^2}$$

Aquí el m.c.d. es $(x-1)(x-2)^2(x+2)$

$$\begin{aligned}&\frac{5}{(x-1)(x-2)}-\frac{1}{x+2}+\frac{3}{(x-2)^2}\\&\quad=\frac{5(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)^2(x+2)}-\frac{(x-1)(x-2)^2}{(x+2)(x-1)(x-2)^2}\\&\qquad+\frac{3(x-1)(x+2)}{(x-2)^2(x-1)(x+2)}\\&\quad=\frac{5(x-2)(x+2)-(x-1)(x-2)^2+3(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-2)^2}\end{aligned}$$

Respuesta $\dfrac{1}{x+1}$, $x\neq 1$

$$= \frac{5(x^2 - 4) - (x - 1)(x^2 - 4x + 4) + 3(x^2 + x - 2)}{(x - 1)(x + 2)(x - 2)^2}$$

$$= \frac{5x^2 - 20 - (x^3 - 5x^2 + 8x - 4) + 3x^2 + 3x - 6}{(x - 1)(x + 2)(x - 2)^2}$$

$$= \frac{-x^3 + 13x^2 - 5x - 22}{(x - 1)(x + 2)(x - 2)^2}$$

EJEMPLO 6 Simplifique $\sqrt{1 - x^2} + \dfrac{1 + x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$

Solución En este caso, escribimos ambos términos como fracciones con un m.c.d. de $\sqrt{1 - x^2}$

$$\sqrt{1 - x^2} = \frac{\sqrt{1 - x^2}\,\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Así, tenemos la suma siguiente:

$$\sqrt{1 - x^2} + \frac{1 + x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1 + x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{1 - x^2 + 1 + x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Multiplicación de fracciones

Dos o más fracciones pueden multiplicarse a la vez simplemente multiplicando sus numeradores y denominadores, de la manera que se ilustra en el siguiente ejemplo 7.

EJEMPLO 7

a) $\dfrac{2x + 1}{x - 2} \cdot \dfrac{3 - x}{x + 1} = \dfrac{(2x + 1)(3 - x)}{(x - 2)(x + 1)}$

b) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{6x^2 + 18x + 12} \cdot \dfrac{4x^2 - 16}{2x^2 - 5x - 3} = \dfrac{(x^2 - 5x + 6)(4x^2 - 16)}{(6x^2 + 18x + 12)(2x^2 - 5x - 3)}$

Este producto puede simplificarse factorizando tanto el numerador como el denominador y dividiéndolos entre sus factores comunes:

$$\frac{(x - 2)\cancel{(x - 3)} \cdot \cancel{2} \cdot 2(x - 2)\cancel{(x + 2)}}{\cancel{2} \cdot 3(x + 1)\cancel{(x + 2)}\cancel{(x - 3)}(2x + 1)} = \frac{2(x - 2)(x - 2)}{3(x + 1)(2x + 1)}$$

$$= \frac{2(x - 2)^2}{3(x + 1)(2x + 1)}$$

☛ **36.** Simplifique

$$\frac{4x+2}{x^2-1}\cdot\frac{3x^2+4x+1}{2x+1}\div\frac{3}{x-1}$$

División de fracciones

Para dividir una fracción a/b entre otra fracción c/d, invertimos c/d y la multiplicamos por la primera. (Véase la página 10 y el teorema 4 de la sección 1-2).

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a/b}{c/d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Este método se ilustra para fracciones algebraicas en el ejemplo 8.

EJEMPLO 8

a) $$\frac{2x+3}{x-1}\div\frac{x+3}{2x^2-2}=\frac{2x+3}{x-1}\cdot\frac{2x^2-2}{x+3}$$
$$=\frac{(2x+3)\cdot 2(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$
$$=\frac{2(x+1)(2x+3)}{(x+3)}$$

Respuesta

$\dfrac{2(3x+1)}{3}$, $\quad x \neq 1, -1$ o $-\frac{1}{2}$

b) $$\frac{\dfrac{3x-1}{x-2}}{x+1}=\frac{\dfrac{3x-1}{x-2}}{\dfrac{x+1}{1}}=\frac{3x-1}{x-2}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{3x-1}{(x-2)(x+1)}$$ ☛ **36**

EJEMPLO 9 Simplifique $$\frac{x+2-\dfrac{4}{x-1}}{\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-1}}$$

☛ **37.** Simplifique

$$\frac{2x^2-3x+1}{((x^2-1)/(2x+1))}$$

Solución En primer término, simplificamos el numerador.

$$x+2-\frac{4}{x-1}=\frac{x+2}{1}-\frac{4}{x-1}=\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}-\frac{4}{x-1}$$
$$=\frac{(x+2)(x-1)-4}{x-1}=\frac{x^2+x-6}{x-1}$$

Empleando este valor del denominador, completamos la división.

$$\frac{\dfrac{x^2+x-6}{x-1}}{\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-1}}=\frac{x^2+x-6}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$$
$$=\frac{(x^2+x-6)\,(x^2-1)}{(x-1)(x^2-5x+6)}$$
$$=\frac{\cancel{(x-2)}(x+3)\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x-2)}(x-3)}$$
$$=\frac{(x+3)(x+1)}{(x-3)}$$ ☛ **37**

Respuesta

$\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{x+1}$, $\quad x \neq 1$ o $-\dfrac{1}{2}$

EJERCICIOS 1-7

(1-40) En las expresiones siguientes, efectúe las operaciones indicadas y simplifique.

1. $\dfrac{4x}{2x+3} + \dfrac{6}{2x+3}$

2. $\dfrac{2x}{x-2} - \dfrac{4}{x-2}$

3. $\dfrac{x^2}{x-3} - \dfrac{5x-6}{x-3}$

4. $\dfrac{2-3x}{x-1} + \dfrac{x^2}{x-1}$

5. $\dfrac{2x+1}{x+2} + 3$

6. $\dfrac{3x-2}{x+1} - 2$

7. $\dfrac{x}{x+2} + \dfrac{3}{2x-1}$

8. $\dfrac{x}{2x-6} + \dfrac{x-2}{x+1}$

9. $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{3x+1}{x+1}$

10. $\dfrac{x}{2x+3} - \dfrac{2x-3}{4x+1}$

11. $\dfrac{2x}{2x-1} - \dfrac{x+2}{x+1}$

12. $\dfrac{2}{5x-6} - \dfrac{4}{10x-2}$

13. $\dfrac{1}{x^2-5x+6} - \dfrac{1}{x^2-3x+2}$

14. $\dfrac{x}{x^2+2x-3} + \dfrac{1}{x^2+x-2}$

15. $\dfrac{x}{x^2+2x-3} + \dfrac{1}{1-2x+x^2}$

16. $\dfrac{2}{9x^2-6x+1} - \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{1}{3x^2+2x-1}$

17. $\dfrac{1}{x^2+4x+3} + \dfrac{3}{x^2-1} - \dfrac{2}{x+3}$

18. $\dfrac{x}{2x^2-x-1} - \dfrac{3}{1-2x+x^2} + 2$

19. $\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)\left(\dfrac{x^2+2x}{x+1}\right)$

20. $\left(\dfrac{x^2+4x}{2x+6}\right)\left(\dfrac{2x+4}{x+4}\right)$

21. $\dfrac{2x+4}{1-x} \cdot \dfrac{x^2-1}{3x+6}$

22. $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-x-2} \cdot \dfrac{x^2+4x+3}{2x^2-5x-3}$

23. $\left(\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-6x+8}\right)\left(\dfrac{2x^2+9x+4}{2x^2+7x+3}\right)$

24. $\left(\dfrac{2x^4-2x}{2x^2-5x-3}\right)\left(\dfrac{2x^2-3x-2}{x^3+x^2+x}\right)$

25. $\left(3 + \dfrac{1}{x-1}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3x-2}\right)$

26. $\left(x - \dfrac{3}{x-2}\right)\left(\dfrac{9}{x^2-9} - 1\right)$

27. $\left(\dfrac{x^2+x}{2x+1}\right) \div \left(\dfrac{x^3-x}{4x+2}\right)$

28. $\left(\dfrac{3x-6}{2x^2+4x+2}\right) \div \left(\dfrac{x^2-4}{x^2+3x+2}\right)$

29. $\dfrac{3x^2-x-2}{x^2-x-2} \div \dfrac{3x^2+5x+2}{2x^2-5x+2}$

30. $\dfrac{2x^2+x-1}{2x^2+10x+12} \div \dfrac{1-4x^2}{4x^2+8x-12}$

31. $\dfrac{\dfrac{x^2 + x - 2}{2x + 3}}{\dfrac{x^2 - 4}{2x^2 + 5x + 3}}$

32. $\dfrac{1 - 1/t^2}{t + 1 - 2/t}$

33. $\dfrac{x + 2 + \dfrac{3}{x - 2}}{x - 6 + \dfrac{7}{x + 2}}$

34. $\dfrac{p - \dfrac{2}{p + 1}}{1 - \dfrac{4p + 7}{p^2 + 4p + 3}}$

35. $\dfrac{x^{-1} + y^{-1}}{(x + y)^{-1}}$

36. $\dfrac{(x - y)^{-1}}{(x^{-2} - y^{-2})^{-1}}$

37. $\dfrac{x^{-2} + y^{-2}}{x^{-2} - y^{-2}} \cdot \dfrac{x - y}{x + y}$

38. $\dfrac{y^{-2} - x^{-2}}{xy^{-1} - yx^{-1}}$

39. $\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x + h} - \dfrac{1}{x}\right)$

40. $\dfrac{1}{h}\left[\dfrac{1}{(x + h)^2} - \dfrac{1}{x^2}\right]$

(41-52) Racionalice los denominadores de las expresiones siguientes.

41. $\dfrac{1}{3 + \sqrt{7}}$

42. $\dfrac{3 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{3}}$

43. $\dfrac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

44. $\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}}$

45. $\dfrac{3}{3 + \sqrt{3}}$

46. $\dfrac{1}{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}$

47. $\dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

48. $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

49. $\dfrac{x}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}$

50. $\dfrac{x}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}}$

51. $\dfrac{2x - 2}{\sqrt{x + 3} - 2\sqrt{x}}$

52. $\dfrac{4 - x}{\sqrt{2x + 5} - 3\sqrt{x}}$

(53-56) Racionalice los numeradores de las expresiones siguientes.

53. $\dfrac{5 - \sqrt{3}}{2}$

54. $\dfrac{\sqrt{x + 4} - \sqrt{x}}{2}$

55. $\dfrac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}$

56. $\dfrac{\sqrt{x - 2 + h} - \sqrt{x - 2}}{h}$

REPASO DEL CAPÍTULO 1

Resumen

1.1 Número natural, número entero, número racional, número irracional, número real.

La recta de los números reales.

Propiedades conmutativa, asociativa y distributiva.

Elementos identidad, inverso aditivo de a (el negativo de a, $-a$), inverso multiplicativo de a (el recíproco de a, a^{-1}).

Diferencia: $a - b \equiv a + (-b)$

División: $a \div b \equiv a \cdot b^{-1}$

1.2 Fracción. Definición: $\dfrac{1}{b} \equiv b^{-1}$; $\dfrac{a}{b} \equiv a \cdot b^{-1}$

Reglas para multiplicar y dividir fracciones. Cancelación de factores comunes.

Mínimo común denominador (m.c.d.). Suma y resta de fracciones.

1.3 Potencia (exponente), base $\cdot$ a^n (a elevada al exponente n).

Propiedades de los exponentes.

1.4 Raíz n-ésima principal de a: $b = a^{1/n}$ si $b^n = a$

Radical, raíz cuadrada, raíz cúbica, raíz n-ésima. $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[n]{a}$

Exponentes fraccionarios: $a^{m/n} = (a^{1/n})^m$

Extensión de las cinco propiedades de los exponentes a exponentes fraccionarios y radicales.

1.5 Expresión algebraica, expresiones monomiales, binomiales, multinomiales.

Término, parte literal, coeficiente (numérico), término constante.

Términos semejantes, suma y resta de términos semejantes.

Multiplicación de expresiones por medio de la propiedad distributiva; método de los arcos.

Fórmulas para el cuadrado de un binomio. Fórmula de la diferencia de cuadrados. División entre monomio. División larga de expresiones polinomiales.

Divisor, dividendo, cociente, residuo.

1.6 Factores. Factores monomiales. Método por agrupación.

Factorización por medio de fórmulas para la diferencia de cuadrados, suma y diferencia de cubos.

Factorización de expresiones del tipo $x^2 + px + q$ y $mx^2 + px + q$ con $m \neq 1, -1$

1.7 Racionalización del denominador.

Técnicas para la suma, resta, multiplicación, división y simplificación de fracciones algebraicas.

Fórmulas

Propiedades de los exponentes

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^m = a^m b^m, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Fórmulas para el cuadrado de un binomio:

$$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$$

Fórmula de la diferencia de cuadrados:

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

Fórmulas para la suma y la diferencia de cubos:

$$x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2)$$

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 1

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las proposiciones siguientes. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

b) $x^0 = 1$, para todo número real x

c) $\dfrac{x/y}{z} = \dfrac{x}{z} \cdot \dfrac{1}{y}$

d) $\dfrac{-x}{-y} = -\dfrac{x}{y}$

e) $\dfrac{x/y}{z} = \dfrac{x}{z} \cdot \dfrac{1}{y}$

f) $\dfrac{x + \cancel{y}}{\cancel{y}} = x + 1$

g) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{7}}} = \sqrt[30]{7}$

h) Todo número racional puede expresarse como un decimal que termina.

i) Todo número racional es un número real.

j) Para todo número real, $a \neq 0$, se cumple $\frac{a}{0} = 0$

k) $(-1)^n = 1$, si n es un entero par

l) $\dfrac{a \cdot b}{c \cdot d} = \dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{b}{d}$

m) $x^m \cdot y^n = (xy)^{mn}$

n) $\dfrac{a}{c} \div \dfrac{b}{d} = \dfrac{a \div b}{c \div d}$

o) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-3} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^3$

p) $(4^2)^3 = 2^{12}$

q) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{32}} = 2^{-5}$

(2-26) En las expresiones siguientes, efectúe las operaciones que se indican y simplifique los resultados.

2. $(64)^{2/3} \cdot (81)^{-3/4}$

3. $(64)^{2/3}/(81)^{-3/4}$

4. $27^{-1/3} \cdot 216^{2/3}$

5. $8^{1/3} \div 1000^{-2/3}$

6. $\left(\dfrac{14a}{15b}\right)\left(\dfrac{25b}{24}\right)$

7. $(2b) \div \left(\dfrac{3ab}{7}\right)$

8. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} - \dfrac{c}{a}$

9. $\dfrac{1}{b} \div \dfrac{1}{b + \frac{1}{b}}$

10. $\dfrac{(2x^{-1}y^2)^2}{(x^2y)^3}$

11. $x^2(3x^2 - x + 2x^{-1})$

12. $\left(\dfrac{a^3b}{8}\right) \div \left(\dfrac{a}{2} \div \dfrac{8}{b^2}\right)$

13. $\left(\dfrac{6}{x}\right)\left(\dfrac{5}{18x}\right) + \left(\dfrac{3}{2x}\right)^2$

14. $\sqrt{12} - \sqrt{48} + \sqrt{75}$

15. $\sqrt{150} + \sqrt{249} - \sqrt{54}$

16. $\dfrac{8\sqrt{2} - 2\sqrt{8}}{\sqrt{32}}$

17. $3\sqrt{90} + \sqrt{40}$

18. $\left(\dfrac{a^p}{a^q}\right)^r \cdot \left(\dfrac{a^q}{a^r}\right)^p \cdot \left(\dfrac{a^r}{a^p}\right)^q$

19. $\dfrac{(8)^{2n/3} \cdot (27)^{-n/6}}{(12)^{-n/2}}$

20. $\dfrac{6x^3 + 42x^2 - 3x + 18}{3x^2}$

21. $\dfrac{8ab^2 - 6a^2b}{2ab} + \dfrac{a^3b^2 + 2a^2b^3}{a^2b^2}$

22. $\dfrac{1 - 6x + 12x^2 - 8x^3}{2x - 1}$

23. $\left(y^2 - \dfrac{1}{y}\right)(y^2 - 2y)$

24. $4\{x^2 - 2[x + 3(x - 1)]\}$

25. $4x\{x^2 - 3[x - 2(x - 6)]\} - (2x + 3)^2(x - 1)$

26. $\dfrac{12y^5 - 4y^4 + 6y^3}{2y^3}$

(27-42) Factorice por completo las siguientes expresiones:

27. $p^2 - 2q^2$

28. $a^2 + 2a - 15$

29. $6b^2 - 23b + 21$

30. $15c^2 - 3cx - 5cy + xy$

31. $3 - d - 3d^2 + 2d^3$

32. $e^4 - 16$

33. $64f^3 - 1$

34. $(g - 2)(g^2 + 4) + (g + 2)(g^2 - 4)$

35. $15x^2 - 29xy - 14y^2$

36. $-66 - 5m + m^2$

37. $3n^4 - n^3 - 2n^2$

***38.** $p^6 - q^6$

***39.** $3n^4 - n^3 + n^2 - n - 2$. (*Sugerencia:* Un factor es $n - 1$)

40. $21 + 28x + 6y^2 + 8xy^2$

41. $10t^2 - 13tu - 3u^2$

***42.** $x^3 - 3x + 2$. (*Sugerencia:* Reescriba $-3x$ como $-2x - x$)

43. Prueba que $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}} = \dfrac{1 + x}{1 + 2x}$

44. Pruebe que $\dfrac{1}{\sqrt{5} + 2} + \dfrac{1}{\sqrt{10} + 3} = \sqrt{5} + \sqrt{10} - 5$

CASO DE ESTUDIO

ÁLGEBRA Y ALGUNOS CÁLCULOS MENTALES

Al igual que el cálculo que se analizó al inicio del capítulo, la base de muchos de los "trucos" y "juegos matemáticos" es el álgebra; si uno escribe en lenguaje simbólico las expresiones verbales y realiza algunas sencillas operaciones algebraicas, por lo regular, descubrirá el misterio de estos juegos.

Un juego para "adivinar" el mes de nacimiento y la edad de una persona es el siguiente.

Pida a la persona que realice las operaciones siguientes, sin que usted las vea.

a) Determine el número del mes en que nació, (enero, 1; febrero, 2; marzo, 3; etc.).
b) Multiplique el número del mes en que nació por 2.
c) Al resultado anterior sume 5.
d) Multiplique por 50 el resultado que obtuvo en el paso anterior.
e) A esto, añada el número de años que tiene.
f) Y, finalmente, al resultado reste 250.

Pida que le diga el resultado. Los dos dígitos de más a la derecha de este resultado proporcionarán la edad de la persona, mientras que el primero o dos primeros dígitos de la izquierda revelarán el mes en que nació la persona.

Hagamos esto con un ejemplo. Suponga que Leticia nació en noviembre y actualmente tiene 48 años, entonces los pasos serían:

a) Mes en que nació, 11
b) $11 \times 2 = 22$
c) $22 + 5 = 27$
d) $27 \times 50 = 1350$
e) $1350 + 48 = 1398$
f) $1398 - 250 = 1148$

Todo lo anterior usted no lo ve, al final, lo único que conocería es el resultado: 1148. Con lo cual podría "adivinar" y decirle a Leticia que tiene 48 años y que nació en noviembre.

i. Determine por qué este "truco" sirve para el propósito de adivinar la edad y mes de nacimiento. (*Sugerencia*: Utilice el lenguaje algebraico para realizar cada paso del proceso que debe realizarse).
ii. ¿Siempre funciona o existirá algún o algunos casos en que no se lea la edad y mes de nacimiento directamente del resultado?
iii. En caso de que determine que existen casos en los cuales no se lea directamente del resultado la edad y el mes de nacimiento, ¿aún así podría indicar la edad y el mes de nacimiento de la persona?

CAPÍTULO 2

Ecuaciones de una variable

La edad de Diofanto

Un matemático griego muy importante fue Diofanto de Alejandría (c. 250 d.C.), quien hizo contribuciones en varias áreas de las matemáticas. Tal vez su trabajo más importante lo realizó en lo que ahora se conoce como *teoría de números*. De su obra *Arithmetica* sólo sobreviven seis de los libros originales; el número total es un misterio. En ella se encuentra una colección de problemas cuya solución es, en muchos de los casos, muy ingeniosa.

Poco se sabe de él, pero algunos detalles de su vida se conocen a través del epitafio que, como un homenaje, se inscribió en su tumba. Una traducción libre del original es la siguiente:

> Transeúnte, ésta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después de la doceava parte, su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.

Con base en el texto del epitafio, plantee una ecuación para determinar la edad de Diofanto y responda las siguientes preguntas.

i. ¿A qué edad falleció Diofanto?
ii. ¿Cuántos años vivió antes de casarse?
iii. ¿Cuántos años vivió su hijo?
iv. ¿Qué edad tenía Diofanto cuando nació su hijo?

TEMARIO

■ 2-1 ECUACIONES LINEALES

Una **ecuación** es una proposición que expresa la igualdad de dos expresiones algebraicas. Por lo regular involucra una o más variables y el símbolo de igualdad, =. Las siguientes proposiciones son ejemplos de ecuaciones.

$$2x - 3 = 9 - x \tag{1}$$

$$y^2 - 5y = 6 - 4y \tag{2}$$

$$2x + y = 7 \tag{3}$$

$$\frac{a}{1-r} = s \tag{4}$$

En la ecuación (1), la variable es la letra x; mientras que en la ecuación (2), es y. En la ecuación (3), tenemos dos variables, x y y. No permitiremos que las variables de cualquier ecuación tomen valores que hagan que una expresión que ocurra en la ecuación quede indefinida. Por ejemplo, en la ecuación (4), r no puede ser 1 pues esto produciría una división entre cero.

Las expresiones separadas por el símbolo de igualdad se denominan **lados** (miembros) de la ecuación; por separado se llaman el *lado izquierdo* (primer miembro) y el *lado derecho* (segundo miembro).

Las ecuaciones que sólo contienen constantes y no tienen variables pueden ser proposiciones verdaderas o falsas. Por ejemplo,

$$3 + 2 = 5 \quad \text{y} \quad \tfrac{3}{15} = \tfrac{4}{20}$$

son afirmaciones verdaderas; mientras que

$$2 + 5 = 6 \quad \text{y} \quad \tfrac{3}{2} = \tfrac{2}{3}$$

son proposiciones falsas.

Una ecuación que se refiere a una variable, por lo regular es una proposición válida para algunos valores de la variable, en tanto que es falsa para otros valores de la variable. Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$2x - 3 = x + 2$$

Si x toma el valor 5, esta ecuación se reduce a

$$2(5) - 3 = 5 + 2 \quad \text{o bien} \quad 10 - 3 = 5 + 2$$

que es una proposición verdadera. Por otra parte, si x toma el valor 4, obtenemos

$$2(4) - 3 = 4 + 2 \quad \text{o bien} \quad 5 = 6$$

que es una proposición falsa.

Un valor de la variable que haga que la ecuación sea una proposición cierta se denomina **raíz** o **solución** de la ecuación dada. Decimos que tal valor de la variable *satisface* la ecuación.

Así, por ejemplo, 5 es una raíz de la ecuación $2x - 3 = x + 2$. De manera similar, -2 es solución de la ecuación $y^2 + 3y = 6 + 4y$ porque cuando -2 sustituye a y en la ecuación, obtenemos

$$(-2)^2 + 3(-2) = 6 + 4(-2)$$

o bien, $4 - 6 = 6 - 8$ que es una proposición verdadera.

En forma análoga, 5 *no* es una raíz de la ecuación $t^2 + 2t = 6 + 3t$ pues cuando 5 reemplaza a t, se obtiene

$$(5)^2 + 2(5) = 6 + 3(5)$$

o bien, $25 + 10 = 6 + 15$ que no es una proposición verdadera. ☛ **1**

☛ **1.** ¿Cuál de los números siguientes es solución de la ecuación $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$: $-2, -1, 0, 1, 2$?

A menudo estaremos interesados en encontrar las raíces de alguna ecuación dada (es decir, en determinar todos los valores de la variable que transforman la ecuación en una proposición verdadera). El proceso de encontrar las raíces se denomina **resolver la ecuación**. Al llevar a cabo este proceso, por lo general efectuamos ciertas operaciones en la ecuación que la transforman en una nueva ecuación más fácil de resolver. Tales simplificaciones deben realizarse en forma tal que la nueva ecuación tenga las mismas raíces que la ecuación original. Las dos operaciones siguientes producen nuevas ecuaciones, al mismo tiempo que cumplen con el requerimiento de no alterar las raíces de la ecuación.

1. (PRINCIPIO DE ADICIÓN) Podemos sumar o restar cualquier constante o cualquier expresión algebraica que incluya la variable a ambos lados de la ecuación.

2. (PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN) Podemos multiplicar o dividir ambos lados de la ecuación por cualquier constante *distinta de cero* o cualquier expresión *no cero* que incluya la variable.

(***Observación***): La multiplicación por una expresión puede producir una ecuación cuyas raíces difieran de la ecuación original, si la expresión se hace cero para ciertos valores de la variable, como se ilustrará después).

Observe que de acuerdo con estos principios, debemos hacer la misma operación en ambos lados de la ecuación.

Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$x - 3 = 2 \qquad (5)$$

Sumemos 3 a ambos lados de la ecuación. Por el principio de adición, esta operación no cambia las raíces de la ecuación.

$$x - 3 + 3 = 2 + 3$$

Después de simplificar, resulta

$$x = 5$$

Por tanto, concluimos que si x satisface la ecuación (5) entonces $x = 5$: 5 es la única raíz de la ecuación (5).

Respuesta -1 y 2

Como un segundo ejemplo, consideremos la ecuación

$$5x = 15 \tag{6}$$

Dividimos ambos lados de la ecuación entre 5. Por el principio de multiplicación, esta operación no cambiará las raíces de la ecuación dado que el número por el que estamos dividiendo no es cero. Obtenemos

$$\frac{5x}{5} = \frac{15}{5}$$

o bien,

$$x = 3$$

Así, la única solución de la ecuación (6) es $x = 3$.

Dos ecuaciones que tienen exactamente las mismas soluciones se dice que son **equivalentes**. Por tanto, las operaciones 1 y 2 transforman la ecuación dada en una nueva ecuación que es equivalente a la ecuación original. Al resolver una ecuación específica, a veces tenemos que emplear estas operaciones varias veces.

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación

$$5x - 3 = 2x + 9 \tag{7}$$

Solución En primer lugar, restamos $2x$ a ambos lados de la ecuación y simplifiquemos.

$$5x - 3 - 2x = 2x + 9 - 2x$$

$$5x - 2x - 3 = 2x - 2x + 9$$

$$3x - 3 = 9 \tag{8}$$

Ahora sumemos 3 a ambos miembros de la ecuación y de nuevo simplifiquemos.

$$3x - 3 + 3 = 9 + 3$$

$$3x = 12 \tag{9}$$

Por último, dividamos ambos lados entre 3 (el cual no es cero).

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$

$$x = 4$$

Por tanto, la solución de la ecuación (7) es $x = 4$. ☛ **2**

☛ **2.** ¿Son equivalentes las siguientes parejas de ecuaciones?
a) $1 - 2x = y$ y $1 - y = 2x$
b) $2(x - 1) = 0$ y $x = 1$
c) $(x + 1)(x - 1) = 0$ y $x - 1 = 0$
d) $x = 1$ y
$x + \frac{1}{x-1} = 1 - \frac{1}{1-x}$

Respuesta *a*) Sí; *b*) sí;
c) no ($x = -1$ es una solución de la primera ecuación pero no de la segunda);
d) no ($x = 1$ es una solución de la primera ecuación pero no de la segunda)

Observemos que la ecuación (8) pudo obtenerse de la ecuación (7) simplemente pasando el término $2x$ del lado derecho al izquierdo y cambiando su signo. Obtendríamos:

$$5x - 3 - 2x = 9$$

o bien,

$$3x - 3 = 9$$

lo cual concuerda con la ecuación (8). Otra vez, obtenemos la ecuación (9) de la ecuación (8) pasando el término -3 del primer miembro al segundo y cambiándole el signo. Obtendríamos

$$3x = 9 + 3$$

o bien,

$$3x = 12$$

De esta manera, podemos advertir que el principio de adición antes establecido es equivalente al siguiente: *Podemos pasar cualquier término de un lado de una ecuación al otro, cambiando su signo sin alterar las raíces de la ecuación*.

De acuerdo con este principio, la ecuación $5x + 3 = 2x$ es equivalente a $5x - 2x + 3 = 0$ o $3 = 2x - 5x$.

Según el principio de multiplicación, cualquier expresión por la cual se multiplique o divida debe ser distinta de cero, y hay que tener cuidado de no multiplicar o dividir la ecuación por una expresión que pueda hacerse igual a cero. Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$x^2 = 5x$$

Es claro que, $x = 0$ es una raíz de la ecuación. Si dividimos ambos lados entre x, obtenemos

$$x = 5$$

Observemos que $x = 0$ *no* es una raíz de la ecuación resultante, aunque sí era raíz de la ecuación original. El problema estriba en que dividimos ambos miembros entre x, que puede ser cero, y esto viola el principio de multiplicación. Al dividir entre x perdemos una raíz de la ecuación. Con el objeto de evitar estas trampas, *debemos proceder con cautela y no multiplicar o dividir entre una expresión que contenga a la variable, a menos que estemos seguros de que esta expresión no pueda hacerse cero*.

Una clase importante de ecuaciones consta de aquellas denominadas **ecuaciones polinomiales**. En una ecuación polinomial, los dos lados pueden constar de uno o varios términos sumados algebraicamente; cada término incluye una potencia entera no negativa* de la variable multiplicada por un coeficiente constante. El **grado** de la ecuación polinomial es la máxima potencia de la variable que aparece en la ecuación.

EJEMPLO 2

a) $\frac{2}{3}x^2 - 1 = 3x + 2$ es una ecuación polinomial de 2º grado.

b) $x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 5x = 4$ es una ecuación polinomial de 4º grado.

c) $(x^2 + 1)/(x + 1) = 2x$ no es una ecuación polinomial debido a que la fracción incluye x en el denominador.

*En otras palabras, cada exponente es un número entero.

Una ecuación polinomial de grado 1 se denomina **ecuación lineal**; en tanto que una ecuación polinomial de grado 2 se llama **ecuación cuadrática**. Las ecuaciones lineales y cuadráticas serán estudiadas en ésta y en las próximas dos secciones del libro. Damos la definición siguiente.

DEFINICIÓN La *forma canónica* de una **ecuación lineal** en la variable x es

$$ax + b = 0 \qquad (a \neq 0)$$

donde a y b son constantes.

EJEMPLO 3

a) $x - 4 = 0$ es una ecuación lineal. Pasando 4 al lado derecho y cambiando su signo, obtenemos que $x = 4$. (***Observación***: Esto es equivalente a sumar 4 a ambos lados). Así, el número 4 es la única solución de la ecuación.

b) $2x + 3 = 0$ es una ecuación lineal. Pasando el 3 al lado derecho, obtenemos $2x = -3$; dividiendo entre 2, encontramos que $x = -\frac{3}{2}$. En consecuencia, $-\frac{3}{2}$ es la única solución de la ecuación dada.

c) En el caso general,

$$ax + b = 0$$

podemos pasar la constante b al lado derecho, lo que da

$$ax = -b$$

Ahora dividimos entre a, obtenemos $x = -b/a$. Así, la ecuación lineal $ax + b = 0$ tiene una y sólo una solución, es decir, $x = -b/a$.

Obsérvese que al resolver estas ecuaciones, dejamos los términos que incluyen x en el lado izquierdo de la ecuación y pasamos los términos constantes al segundo miembro. Ésta es una estrategia general al resolver ecuaciones lineales. (La usamos al resolver el ejemplo 1 que consideramos antes).

A menudo surgen ecuaciones que a primera vista no parecen ser lineales, pero que pueden reducirse a ecuaciones lineales mediante simplificaciones apropiadas. Al efectuar tales reducciones, el siguiente procedimiento por etapas con frecuencia es útil.

Paso 1 Elimine las fracciones que aparezcan en la ecuación multiplicando ambos miembros por el denominador común de las fracciones involucradas.

Paso 2 Pase todos los términos que contengan a la variable al lado izquierdo y todos los demás al lado derecho; simplifique entonces, si es posible, reduciendo términos semejantes.

Paso 3 Pase todos los términos que contengan la variable al lado izquierdo y todos los demás al lado derecho; simplifique entonces, si es posible, reduciendo términos sejemantes.

Este procedimiento se aplica en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 4 Resuelva la ecuación $3x - 4(6 - x) = 15 - 6x$

Solución

Paso 1 Dado que no hay fracciones en la ecuación, no necesitamos el paso 1.
Paso 2 Efectuando las operaciones indicadas por los paréntesis obtenemos

$$3x - 24 + 4x = 15 - 6x$$

Paso 3 Pasamos todos los términos que contienen a la variable al lado izquierdo y los constantes al derecho, no olvidando cambiar sus signos; se obtiene

$$3x + 4x + 6x = 15 + 24$$

o bien,

$$13x = 39$$

Tenemos ahora una solución dividiendo ambos lados entre 13, el coeficiente de x.

$$x = \tfrac{39}{13} = 3$$

EJEMPLO 5 Resuelva la siguiente ecuación:

$$\frac{5x}{3} - \frac{x-2}{4} = \frac{9}{4} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{2x-1}{3}\right)$$

Solución Después de eliminar los paréntesis, podemos escribir la ecuación dada como

$$\frac{5x}{3} - \frac{x-2}{4} = \frac{9}{4} - \frac{x}{2} + \frac{2x-1}{6}$$

Con el objeto de eliminar las fracciones, multiplicamos ambos miembros por 12, el denominador común, y simplificamos:

$$12\left(\frac{5x}{3}\right) - 12\left(\frac{x-2}{4}\right) = 12\left(\frac{9}{4}\right) - 12\left(\frac{x}{2}\right) + 12\left(\frac{2x-1}{6}\right)$$

$$4(5x) - 3(x - 2) = 3(9) - 6x + 2(2x - 1)$$

$$20x - 3x + 6 = 27 - 6x + 4x - 2$$

Pasando los términos en x al lado izquierdo y los constantes al derecho, tenemos que

$$20x - 3x + 6x - 4x = 27 - 2 - 6$$
$$19x = 19$$

Por último, dividimos ambos lados entre 19, para obtener $x = 1$, la solución requerida. ☛ **3**

☛ **3.** Resuelva las siguientes ecuaciones:
a) $3 - 2x = 7$
b) $4 - x = 3x - 4$
c) $3(x + 2) = 2(8 - x)$
d) $\frac{2}{3}(1 - 2x) = 4 - \frac{1}{2}(3x + 4)$

Respuesta *a*) –2
b) 2; *c*) 2; *d*) 8

EJEMPLO 6 Resuelva la ecuación

$$\frac{x-2t}{a} = \frac{3(x-y)}{z}$$

a) Para x; *b*) para t.

Solución Aquí el común denominador es az. Multiplicando ambos lados por az para deshacernos de las fracciones,

$$z(x - 2t) = 3a(x - y)$$

$$xz - 2zt = 3ax - 3ay \tag{10}$$

(Nótese que ni a ni z pueden ser cero, pues de otra forma la ecuación dada tendría una fracción con denominador cero. En consecuencia, está permitido multiplicar por az).

a) Dado que estamos resolviendo para x, todas las demás letras involucradas en la ecuación se manejan como constantes. Pasando todos los términos que contienen la variable x al lado izquierdo, y todos los términos sin x al derecho, obtenemos

$$xz - 3ax = -3ay + 2zt$$

$$x(z - 3a) = 2zt - 3ay$$

Dividamos ambos miembros de la ecuación entre $z - 3a$, suponiendo que este factor no es cero.

$$x = \frac{2zt - 3ay}{z - 3a}$$

b) Puesto que vamos a despejar t, sólo mantendremos aquellos términos que contengan la variable t del lado izquierdo y pasaremos los demás términos al derecho. En consecuencia, de la ecuación (10),

$$-2zt = 3ax - 3ay - xz$$

Dividiendo ambos lados entre $-2z$, el coeficiente de t, el cual, como notamos antes, no puede ser cero, obtenemos

$$t = \frac{3ax - 3ay - xz}{-2z} = \frac{1}{2z}(-3ax + 3ay + xz)$$

que es la solución requerida para la variable t. ☛ **4**

EJEMPLO 7 Resuelva la ecuación $(2x + 1)^2 = 4(x^2 - 1) + x - 1$

Solución A primera vista, esta ecuación no tiene la apariencia de una lineal debido a la presencia de los términos x^2. Sin embargo, veremos que se reduce a una ecuación lineal. Eliminemos los paréntesis y pasemos todos los términos que contengan a x al lado izquierdo de la ecuación. Así,

$$4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 - 4 + x - 1$$

$$4x^2 + 4x - 4x^2 - x = -4 - 1 - 1$$

Observemos que los términos $4x^2$ se cancelan entre sí (es decir, $4x^2 + 4x - 4x^2 - x = (4 - 4)x^2 + (4 - 1)x = 0x^2 + 3x$) y nos quedamos con

$$3x = -6$$

De aquí, la solución es $x = -2$. ☛ **5**

☛ **4.** Despeje r: $S = \dfrac{a}{1 - r}$

Respuesta $r = 1 - a/S$

☛ **5.** ¿Cuál es el error en lo siguiente? Pedimos resolver la ecuación

$$\frac{1}{x - 2} = 2 + \frac{x - 3}{2 - x}$$

Primero multiplicamos ambos miembros por $(x - 2)$:

$$1 = 2(x - 2) - (x - 3)$$

Esto es,

$$1 = 2x - 4 - x + 3 = x - 1$$

Por tanto, $x = 2$ es una solución.

Respuesta Cuando $x = 2$ la ecuación original tiene términos no definidos. No hay solución.

EJERCICIOS 2-1

(1-10) Compruebe si el(los) número(s) dado(s) es(son) solución(es) de las ecuaciones correspondientes.

1. $3x + 7 = 12 - 2x; \quad 1$

2. $5t - 3 = 18 + 3(1 - t); \quad 3$

3. $\dfrac{u + 2}{3u - 1} + 1 = \dfrac{6 - u}{u + 1}; \quad 2$

4. $\dfrac{1 - 2y}{3 - y} + y = \dfrac{1}{y + 2}; \quad -2$

5. $x^2 = 5x - 6; \quad 2, 5$

6. $y^2 + 12 = 7y; 4, \quad -3$

7. $\dfrac{5}{x} - \dfrac{3}{2x} = \dfrac{x}{2}; \quad 3$

8. $\dfrac{7}{x + 1} + \dfrac{15}{3x - 1} = 8; \quad -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

9. $\dfrac{3}{x - 1} - \dfrac{5x}{x + 2} = \dfrac{1}{4}; \quad 1$

10. $4x + \dfrac{7}{x} = 3; \quad 0$

(11-14) Reduzca las siguientes ecuaciones a ecuaciones polinomiales y declare el grado resultante.

11. $x^3 - 7x^2 + 5 = x(x^2 - 1) + 3x^2 - 2$

12. $(y - 2)(y + 5) = (2y - 1)(y + 1) + 7$

13. $y^2 + 7 = (y - 1)^2 + 3y$

14. $(u - 1)^2 = (u + 1)(u + 3) + 5$

(15-32) Resuelva las siguientes ecuaciones.

15. $1 + x = 3 - x$

16. $3x + 7 = 3 + 5x$

17. $2x - 5 = -15 - 3x$

18. $2 - 7x = 3x - 2$

19. $4(x - 3) = 8 - x$

20. $2x - 5(1 - 3x) = 1 - 3(1 - 2x)$

21. $3 - 2(1 - x) = 5 + 7(x - 3)$

22. $6y - 5(1 + 2y) = 3 + 2(1 - y)$

23. $3z - 2 + 4(1 - z) = 5(1 - 2z) - 12$

24. $5[1 - 2(2z - 1)] = -3(3z - 1) + 1$

25. $1 - 2[4 - 3(x + 1)] = 4(x - 5) - 1$

26. $3[2x + 1 - 2(2x - 1)] + 4 = 2[1 + 2(3 - x)]$

27. $\dfrac{3x + 7}{2} + \dfrac{1 + x}{3}$

28. $\dfrac{2x - 7}{3} = 5 - \dfrac{3x - 2}{4}$

29. $1 - \dfrac{2u - 3}{4} = \dfrac{2 - 5u}{3} - 3u$

30. $\dfrac{5y - 6}{2} = y - \dfrac{2 - y}{3}$

31. $\frac{1}{3}(2y + 1) + \frac{1}{2} y = \frac{2}{5}(1 - 2y) - 4$

32. $\dfrac{1}{2}\left[1 + \dfrac{1}{4}(3z - 1)\right] = \dfrac{2z}{3} - \dfrac{1}{2}$

(33-40) Reduzca las siguientes ecuaciones a ecuaciones lineales y resuélvalas.

33. $(x - 4)^2 = (x - 2)^2$

34. $(x - 1)(x + 3) = (x + 2)(x - 3) + 1$

35. $x^2 + (x + 1)^2 = (2x - 1)(x + 3)$

36. $(3x - 1)(x + 2) + 5x = (2x + 1)(x - 3) + x^2$

37. $(2x + 1)(x - 1) + x^2 = 3(x - 1)(x + 2) - 3$

38. $(3x + 1)(2x - 1) - 2x^2 = (2x - 3)^2 + 6x + 5$

39. $x(x + 2)(x + 4) + x^3 = 2(x + 1)^3$

40. $(x + 1)^3 + (x - 1)^3 = 2x^3$

(41-44) Resuelva las siguientes ecuaciones para las variables que se indican.

41. $ax + by = cz$: *a*) para x; *b*) para b

42. $S = \dfrac{a - rl}{1 - r}$: *a*) para r, *b*) para l

43. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{t}$: *a*) para x, *b*) para t

44. $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{xy} = 1$: *a*) para x, *b*) para y

■ 2-2 APLICACIONES DE ECUACIONES LINEALES

Los métodos algebraicos a menudo son útiles en la solución de problemas aplicados en diversos campos. En general, tales problemas se establecen en forma verbal; antes de que podamos utilizar nuestras herramientas algebraicas, es necesario cambiar las declaraciones verbales a proposiciones algebraicas correspondientes. El siguiente procedimiento por etapas con frecuencia es útil en la aplicación de este proceso.

> ***Paso 1*** Represente la cantidad desconocida (es decir, la cantidad que debe determinarse) mediante un símbolo algebraico, tal como x. En algunos problemas, deben determinarse dos o más cantidades; en tales casos, denotamos sólo una de ellas con x.
>
> ***Paso 2*** Exprese todas las demás cantidades, si las hay, en términos de x.
>
> ***Paso 3*** Traduzca las expresiones verbales que aparezcan en el problema en expresiones algebraicas en las cuales intervenga x. En este contexto, palabras tales como *es* o *era* se traducen al símbolo algebraico $=$.
>
> ***Paso 4*** Resuelva la expresión o expresiones algebraicas de acuerdo con los métodos algebraicos.
>
> ***Paso 5*** Transforme la solución algebraica en forma verbal.

En problemas verbales, aparecen un número de declaraciones que incluyen frases tales como alguna cantidad mayor que o menor que cierto valor multiplicado, digamos, dos veces o por la mitad de otra cantidad. Los ejemplos siguientes ilustran cómo cambiar tales expresiones a términos algebraicos.

☛ **6.** En el ejemplo 1*a*), Amanda tiene tantos pesos como Juan, Jaime y Samuel juntos. ¿Cuántos tiene?
En el ejemplo 1*c*). Si la primera tienda tiene una ganancia de \$30 en cada refrigerador y la segunda tienda obtiene una ganancia de \$75. ¿En cuánto exceden las ganancias mensuales de la primera tienda las de la segunda?

EJEMPLO 1

a) Si Juan tiene x pesos y Jaime 5 más que Juan, entonces Jaime tiene $(x + 5)$ pesos. Si Samuel tiene 3 menos que Juan entonces Samuel tiene $(x - 3)$ pesos.

b) Si Luis tiene una edad de x años y su padre tiene 4 años más que el doble de la edad de Luis, entonces su padre tiene $(2x + 4)$ años.

c) Si cierto almacén vende x refrigeradores al mes y un segundo almacén vende 5 menos que una tercera parte del anterior, entonces el segundo almacén vende $(\frac{1}{3}x - 5)$ refrigeradores. ☛ **6**

Empezaremos con algunos ejemplos elementales que ilustran de la manera más sencilla posible la traducción entre las formas verbales y algebraicas.

EJEMPLO 2 Determine dos enteros consecutivos cuya suma sea 19.

Solución

Paso 1 Dado que debemos encontrar dos enteros, debemos decidir a cuál de ellos llamar x. Denotemos con x al entero más pequeño.

Respuesta *a*) $3x + 2$ pesos
b) $5x + 375$ pesos

Paso 2 Luego, el segundo entero es $x + 1$, pues son consecutivos.

Paso 3 La expresión *suma de dos enteros* se cambia a la expresión algebraica $x + (x + 1)$. La afirmación de que esta suma es 19, equivale a la ecuación

$$x + (x + 1) = 19$$

Paso 4 Despejamos x.

$$2x + 1 = 19$$
$$2x = 19 - 1 = 18$$
$$x = \tfrac{18}{2} = 9$$

☛ **7.** Un triángulo tiene dos lados iguales y el tercero es 8 unidades más largo. Si el perímetro excede al doble de la longitud del lado más corto en 20 unidades, ¿cuáles son las longitudes de los tres lados?

Paso 5 Por tanto, el entero más pequeño es 9. El mayor, $x + 1$, es 10. ☛ **7**

EJEMPLO 3 Un hombre tiene 7 años más que su esposa. Hace 10 años tenía el doble de la edad de ella. ¿Cuántos años tiene él?

Solución Denotemos con x la edad actual del hombre. Dado que su esposa es 7 años más joven que él, la edad actual de ella debe ser $(x - 7)$ años.

Hace 10 años, la edad del hombre era 10 años menos de lo que es ahora, de modo que su edad era entonces $x - 10$. (Por ejemplo, si su edad actual es $x = 38$, hace 10 años tenía $x - 10 = 38 - 10 = 28$ años). De manera similar, hace 10 años la edad de su esposa era de 10 años menos de la que es ahora, por lo que $(x - 7) - 10$ o $x - 17$. Nos dicen que al mismo tiempo la edad del hombre, $x - 10$, era el doble de la edad de su esposa, $x - 17$. Así, escribimos

$$x - 10 = 2(x - 17)$$

Simplificamos y despejamos x.

$$x - 10 = 2x - 34$$
$$x - 2x = -23 + 10$$
$$-x = -24$$
$$x = 24$$

La edad actual del hombre es de 24 años. Su esposa tiene 17. Hace 10 años tenían 14 y 7, respectivamente.

EJEMPLO 4 ***(Ingresos mensuales)*** Una vendedora gana un salario base de \$600 por mes más una comisión del 10% de las ventas que haga. Descubre que en promedio, le toma $1\frac{1}{2}$ horas realizar ventas por un valor de \$100. ¿Cuántas horas deberá trabajar en promedio cada mes para que sus ingresos sean de \$2000?

Solución Supóngase que trabaja x horas por mes. Cada $\frac{3}{2}$ horas, efectúa ventas por \$100, de modo que cada hora promedia dos terceras partes de esto, es decir, \$(200/3) en ventas. Su comisión es del 10% de esto, de modo que su comisión promedio por hora es $\frac{20}{3}$. Por tanto, en x horas ganará una comisión de $\left(\frac{20}{3}\right)x$ dólares.

Respuesta 12, 12 y 20

Agregando su salario base, obtenemos un ingreso mensual total de $600 + \left(\frac{20}{3}\right)x$. Esto debe ser igual a 2000, de modo que tenemos la ecuación

$$600 + \tfrac{20}{3}x = 2000$$

Resolviéndola llegamos a las ecuaciones siguientes:

$$\tfrac{20}{3}x = 2000 - 600 = 1400$$

$$x = \tfrac{3}{20}(1400) = 210$$

La vendedora deberá trabajar 210 horas por mes, en promedio, si desea alcanzar el nivel de ingresos deseado.

EJEMPLO 5 ***(Utilidades)*** Un comerciante de ganado compró 1000 reses a $150 cada una. Vendió 400 de ellas obteniendo una ganancia del 25%. ¿A qué precio deberá vender las restantes 600 si la utilidad promedio del lote completo debe ser del 30%?

Solución Su ganancia por cada una de las 400 reses ya vendidas es del 25% del precio de costo, que es el 25% de $150, o bien, $37.50. En 400 reses, su ganancia fue de $\$37.50 \times 400 = \$15{,}000$. Sea x dólares el precio de venta de las restantes 600 reses. Entonces, su utilidad por res es $x - 150$ y su ganancia por las restantes 600 es $600(x - 150)$ dólares. Por tanto, su ganancia total por la venta completa es

$$15{,}000 + 600(x - 150) \text{ dólares}$$

Esta ganancia deberá ser el 30% del precio que él pagó por las 1000 reses, es decir, el 30% de $150,000. Esto es igual a $\$[\frac{3}{10}(150{,}000)]$, o bien $45,000. Así, tenemos la ecuación

$$15{,}000 + 600(x - 150) = 45{,}000$$

Ahora resolvemos:

$$15{,}000 + 600x - 90{,}000 = 45{,}000$$

$$600x = 45{,}000 - 15{,}000 + 90{,}000 = 120{,}000$$

$$x = \frac{120{,}000}{600} = 200$$

El comerciantes debe vender las restantes reses a $200 cada una para lograr una ganancia del 30%.

Si una cantidad de dinero de P dólares se invierte a un año a una tasa de interés anual de R por ciento, la cantidad de interés anual está dada por

$$I = P\left(\frac{R}{100}\right) \text{ dólares}$$

Por ejemplo, una suma de $5000 invertida al 6% anual producirá una cantidad de interés cada año dada por

$$I = \$5000\left(\frac{6}{100}\right) = \$300$$

☛ **8.** ¿Cuál es el interés anual sobre
a) $4000 a 9%?
b) $20,000 a 11%?

Si este interés se retira cada año, entonces tanto el capital P como el interés I permanecen sin cambio de un año a otro. ☛ **8**

EJEMPLO 6 ***(Inversiones)*** La señora Cordero va a invertir $70,000. Ella quiere recibir un ingreso anual de $5000. Puede invertir sus fondos en bonos del gobierno a un 6% o, con un riesgo mayor, al 8.5% de los bonos hipotecarios. ¿Cómo debería invertir su dinero de tal manera que minimice los riesgos y obtenga $5000?

Solución Sea la cantidad invertida en bonos del gobierno x pesos. Entonces la cantidad invertida en bonos hipotecarios es $(70{,}000 - x)$ pesos. El ingreso recibido por los bonos gubernamentales al 6% es de $\frac{6}{100}x$ pesos. El ingreso percibido por los bonos hipotecarios al 8.5% es

$$\frac{8.5}{100}(70{,}000 - x) \text{ pesos} = \frac{85}{1000}(70{,}000 - x) \text{ pesos}$$

Dado que el ingreso total recibido por los dos tipos de bonos debe ser de $5000,

$$\frac{6}{100}x + \frac{85}{1000}(70{,}000 - x) = 5000$$

Multiplicamos ambos lados por 1000 y despejamos x:

$$\begin{aligned}
60x + 85(70{,}000 - x) &= 5{,}000{,}000 \\
60x + 5{,}950{,}000 - 85x &= 5{,}000{,}000 \\
-25x &= 5{,}000{,}000 - 5{,}950{,}000 \\
&= -950{,}000 \\
x &= \frac{-950{,}000}{-25} = 38{,}000
\end{aligned}$$

En consecuencia, la señora Cordero debería invertir $38,000 en bonos del gobierno y los restantes $32,000 en bonos hipotecarios. Ella podría aumentar su ingreso invirtiendo una proporción más grande de su capital en bonos hipotecarios, pero incrementaría su riesgo.

EJEMPLO 7 ***(Problema de mezclas)*** Una compañía vitivinícola requiere producir 10,000 litros de jerez encabezando vino blanco, que tiene un contenido de alcohol del 10%, con brandy, el cual tiene un contenido de alcohol del 35% por volumen. El jerez debe tener un contenido de alcohol del 15%. Determine las cantidades de vino blanco y de brandy que deben mezclarse para obtener el resultado deseado.

Solución Sean x los litros de brandy usados en la producción de 10,000 litros de jerez. Luego, el volumen de vino blanco usado deberá ser de $(10{,}000 - x)$ litros. Puesto que el brandy contiene 35% de alcohol, la cantidad de alcohol en x litros de brandy es $\frac{35}{100}x$. De manera similar, el vino contiene 10% de alcohol, de modo que $(10{,}000 - x)$ litros de vino contienen $\frac{1}{10}(10{,}000 - x)$ litros de alcohol. Por tanto, la cantidad total de alcohol en la mezcla será de

$$\tfrac{35}{100}x + \tfrac{1}{10}(10{,}000 - x) \text{ litros}$$

Respuesta *a*) $360; *b*) $2200

☛ **9.** En el ejemplo 7, si 400 litros de brandy se combinan con 600 litros de jerez, ¿cuál será el porcentaje de alcohol en la mezcla?

La mezcla debe contener 15% de alcohol, por lo que los 10,000 litros deberían contener $\frac{15}{100}(10{,}000) = 1500$ litros de alcohol. Por tanto, tenemos la ecuación

$$\tfrac{35}{100}x + \tfrac{1}{10}(10{,}000 - x) = 1500$$

Resolviendo obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\tfrac{35}{100}x + 1000 - \tfrac{1}{10}x &= 1500 \\
\tfrac{35}{100}x - \tfrac{1}{10}x &= 1500 - 1000 = 500 \\
35x - 10x &= 50{,}000 \\
25x &= 50{,}000 \\
x &= \frac{50{,}000}{25} = 2000
\end{aligned}$$

En consecuencia, 2000 litros de brandy y 8000 litros de vino deben mezclarse. ☛ **9**

Respuesta 23%

EJERCICIOS 2-2

(1-3) Si Juan tiene x dólares, ¿cuántos dólares tendrá Julia en cada caso?

1. Ella tiene \$4 más que Juan.

2. Ella tiene \$3 menos del doble de lo que tiene Juan.

3. Ella tiene \$2 más que la mitad de lo que tiene Juan.

(4-7) Si José tiene x años y Julia es 4 años más joven, ¿qué edad tiene Alfredo en cada caso?

4. Alfredo tiene 3 años más que Julia.

5. Alfredo es 1 año mayor que la edad promedio de José y Julia.

6. Alfredo es 10 años menor que la suma de las edades de José y de Julia.

7. Alfredo es 2 años menor que cinco veces la diferencia de las edades de José y de Julia.

8. Bruno y Jaime juntos tienen \$75. Si Jaime tiene \$5 más que Bruno, ¿cuánto dinero tiene Jaime?

9. En una clase de matemáticas para la administración hay 52 estudiantes. Si el número de chicos es 7 más que el doble de chicas, determine el número de chicas en la clase.

10. Un padre es tres veces mayor que su hijo. En 12 años, él tendrá el doble de la edad de su vástago. ¿Qué edades tienen el padre y el hijo ahora?

11. Hace cinco años, María tenía el doble de la edad de su hermano. Encuentre la edad actual de María si la suma de sus edades hoy es de 40 años.

12. Susana tiene 3 monedas más de cinco centavos que de diez centavos, y 5 monedas más de diez centavos que monedas de veinticinco centavos. En total tiene \$2.10. ¿Cuántas monedas de cada una tiene?

13. Yo tengo el doble de monedas de diez centavos en mi bolsillo que de monedas de veinticinco centavos. Si tuviera 4 monedas menos de diez centavos y 3 monedas más de veinticinco centavos, tendría \$2.60. ¿Cuántas monedas de diez centavos y de veinticinco centavos tengo?

14. *(Inversiones)* Un hombre invierte al 8% el doble de la cantidad que destina al 5%. Su ingreso total anual por las dos inversiones es de \$840. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

15. *(Inversiones)* Un colegio destina \$60,000 a un fondo a fin de obtener ingresos anuales de \$5000 para becas. Parte de esto se destinará a inversiones en fondos del gobierno a un 8% y el resto a depósitos a largo plazo a un 10.5%. ¿Cuánto deberán invertir en cada opción con objeto de obtener el ingreso requerido?

16. *(Inversiones)* Los miembros de una fundación desean invertir \$18,000 en dos tipos de seguros que pagan dividendos anuales del 9 y 6%, respectivamente. ¿Cuánto deberán invertir a cada tasa si el ingreso debe ser equivalente al que produciría al 8% la inversión total?

17. (*Inversión*) Una persona invirtió $2000 más al 8% que al 10% y recibió un ingreso total por intereses de $700 por un año. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

18. (*Inversión*) Una compañía invierte $15,000 al 8% y $22,000 al 9%. ¿A qué tasa debe invertir $12,000 restantes de modo que el ingreso por los intereses anuales de las tres inversiones sea de $4500?

19. (*Precio de venta*) Durante una venta de liquidación un artículo tiene marcada una rebaja de 20%. Si su precio de liquidación es $2, ¿cuál era su precio original?

20. (*Precio de mayoreo*) Un artículo se vende por $12. Si la ganancia es de 50% del precio de mayoreo, ¿cuál es el precio de mayoreo?

21. *(Porcentaje de descuento)* Un comerciante ofrece 30% de descuento sobre el precio marcado de un artículo, y aún así obtiene una ganancia del 10%. Si al comerciante le cuesta $35 el artículo, ¿cuál debe ser el precio marcado?

22. *(Mezclas)* Diez libras de cacahuates que tienen un precio de 75¢ por libra y 12 libras de nueces valen 80¢ por libra se mezclan con pacana que tiene un valor de $1.10 por libra para producir una mezcla que vale 90¢ por libra. ¿Cuántas libras de pacana deben utilizarse?

23. *(Mezclas)* ¿Qué cantidad de una solución de ácido al 10% debe mezclarse con 10 onzas de una solución de ácido al 15%, para obtener un solución de ácido al 12%?

24. *(Mezclas)* ¿Qué cantidad de agua debe agregarse a 15 onzas de una solución de ácido al 20%, para obtener un solución de ácido al 12%?

25. *(Mezclas)* Una muestra de agua de mar tiene un contenido de 20% de sal. Se agrega agua pura para obtener 75 onzas de una solución salina al 8%. ¿Cuánta agua de mar estaba en la muestra?

26. *(Mezclas)* ¿Cuánta agua debe evaporarse de 300 onzas de una solución salina al 12% para obtener una solución salina al 15%?

27. (*Mezclas*) La sustancia A contiene 5 miligramos de niacina por onza, y la sustancia B contiene 2 miligramos de niacina por onza. ¿En qué proporciones deben mezclarse A y B, de modo que la mezcla resultante contenga 4 miligramos de niacina por onza?

28. (*Agricultura*) Una cosecha de papas da un promedio de 16 toneladas métricas de proteína por kilómetro cuadrado de área plantada; mientras que el maíz produce 24 toneladas métricas por kilómetro cuadrado. ¿En qué proporciones deben plantarse las papas y el maíz para obtener 21 toneladas de proteína por kilómetro cuadrado de la cosecha combinada?

29. (*Utilidades de fabricantes*) A un fabricante le cuesta $2000 comprar las herramientas para la manufactura de cierto artículo casero. Si el costo para material y mano de obra es de 60¢ por artículo producido, y si el fabricante puede vender cada artículo en 90¢, encuentre cuántos artículos debe producir y vender para obtener una ganancia de $1000.

30. (*Ganancia en periódicos*) El costo de publicar cada copia de una revista semanal es de 28¢. El ingreso de las ventas al distribuidor es 24¢ por copia y de los anuncios es de 20% del ingreso obtenido de las ventas en exceso de 3000 copias. ¿Cuántas copias deben publicarse y venderse cada semana para generar una utilidad semanal de $1000?

31. (*Venta de automóviles*) Un vendedor de autos usados compró dos automóviles por $2900. Vendió uno con una ganancia de 10% y otro con una pérdida de 5%, y aún obtuvo una ganancia de $185 en la transacción completa. Encuentre el costo de cada automóvil.

32. (*Salario*) Un empresario está estableciendo un pequeño negocio. Sus costos fijos son $720 semanales, y planea emplear 48 horas de mano de obra semanales. Él desea asegurar que su ganancia sea igual al costo de la mano de obra y que su producto se venda a sólo 40% sobre el costo total. ¿Qué salario por hora debe pagar? Si fabrica 70 artículos por semana, ¿a qué precio debe venderlos?

■ 2-3 ECUACIONES CUADRÁTICAS

Una ecuación del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0) \tag{1}$$

donde a, b y c son constantes, se denomina una **ecuación cuadrática** en la variable x.

Existen tres métodos para resolver una ecuación de ese tipo: factorizando, usando la fórmula cuadrática y completando el cuadrado. Cualquiera que sea el método que se utilice, la primera etapa en la resolución es disponer la ecuación en la forma estándar de la ecuación (1). En esta forma, el lado derecho de la ecuación es cero y en el lado izquierdo se encuentran los términos en x^2, en x y las constantes. El procedimiento para llegar a esta forma estándar es, por tanto, en primer término, eliminar todas las fracciones que aparezcan multiplicando toda la ecuación por su denominador común; luego eliminamos los paréntesis; enseguida pasamos todos los términos al lado izquierdo de la ecuación y, por último, simplificamos los términos semejantes.

Los siguientes ejemplos ilustran este procedimiento, junto con el método de factorización.

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación $3(x^2 + 1) = 5(1 - x)$

Solución No hay fracciones en esta ecuación. Eliminando los paréntesis, encontramos que

$$3x^2 + 3 = 5 - 5x$$

Después de que todos los términos de la derecha se pasan al primer miembro, la ecuación se transforma en

$$3x^2 + 3 - 5 + 5x = 0$$

o bien,

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

Así, tenemos una ecuación cuadrática con coeficientes $a = 3$, $b = 5$ y $c = -2$. Al utilizar el método de factorización, factorizamos la expresión de la izquierda. En este ejemplo,

$$3x^2 + 5x - 2 = (3x - 1)(x + 2)$$

y así, la última ecuación toma la forma:

$$(3x - 1)(x + 2) = 0$$

El producto de los dos factores $(3x - 1)$ y $(x + 2)$ es cero. Ahora utilizamos la siguiente propiedad de los números reales:

> **Propiedad del factor cero:**
>
> Si A y B son números reales y $AB = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$ o ambos son iguales a cero.*

☛ **10.** Resuelva cada ecuación:
a) $(x - 2)(x + 4) = 0$
b) $(y + 2)(2y - 5) = 0$

En consecuencia, $3x - 1 = 0$ o $x + 2 = 0$. En el primer caso, $3x = 1$, de donde $x = \frac{1}{3}$. En el segundo, $x + 2 = 0$ implica que $x = -2$. Así, $x = \frac{1}{3}$ o $x = -2$; estos números nos dan las dos raíces de la ecuación dada. ☛ **10**

Respuesta *a*) $x = 2$ o -4
b) $y = -2$ o $\frac{5}{2}$

* El producto de dos factores no pueden ser cero, a menos que uno de los dos factores sea cero.

Observemos que el punto crucial del método de factorización consiste en escribir la expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$, que es la forma estándar de la ecuación como el producto de dos factores lineales. Dado que este producto está igualado a cero, se sigue que alguno de los factores debe ser cero.

EJEMPLO 2 Resuelva $(2x + 3)(3x - 1) = -4$

Solución Escribimos la ecuación dada con su lado derecho igual a cero y simplificamos.

$$\begin{aligned}(2x + 3)(3x - 1) + 4 &= 0\\ (6x^2 + 7x - 3) + 4 &= 0\\ 6x^2 + 7x + 1 &= 0\end{aligned}$$

Factorizando,

$$(6x + 1)(x + 1) = 0$$

Por tanto, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}6x + 1 &= 0 \quad \text{o bien} \quad & x + 1 &= 0\\ 6x &= -1 & x &= -1\\ x &= -\tfrac{1}{6} & &\end{aligned}$$

☛ **11.** Resuelva por factorización:

$$2x^2 + x - 21 = 0$$

Las raíces buscadas son $-\frac{1}{6}$ y -1. ☛ **11**

Fórmula cuadrática

Recordemos que en nuestro trabajo anterior en álgebra vimos que las raíces de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

están dadas por la **fórmula cuadrática**:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Esta fórmula es utilizada ampliamente y debe memorizarse. (Asimismo, se probará al final de esta sección).

Para resolver una ecuación cuadrática, podemos usar esta fórmula de la siguiente manera. En primer lugar, reducimos la ecuación a la forma estándar. Luego, identificamos *a, b* y *c*, los tres coeficientes que aparecen en la forma estándar, y simplemente sustituimos estos coeficientes en la fórmula cuadrática.

EJEMPLO 3 Resuelva la ecuación $(2x + 3)(3x - 1) = -4$

Solución Esta ecuación se resolvió por el método de factorización en el ejemplo 2; ahora la resolveremos usando la fórmula cuadrática.

Respuesta $x = 3$ o $-\frac{7}{2}$

La ecuación considerada al expresarse en la forma estándar (véase ejemplo 2) es

$$6x^2 + 7x + 1 = 0$$

Comparando ésta con la ecuación general $ax^2 + bx + c = 0$, tenemos que $a = 6$, $b = 7$ y $c = 1$. La fórmula cuadrática da las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4(6)(1)}}{2(6)} \\
&= \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{12} \\
&= \frac{-7 \pm 5}{12} \\
&= \frac{-7 + 5}{12} \quad \text{o bien} \quad \frac{-7 - 5}{12} \\
&= \frac{-2}{12} \quad \text{o bien} \quad \frac{-12}{12} \\
&= \frac{-1}{6} \quad \text{o bien} \quad -1
\end{aligned}$$

De aquí, las raíces son $-\frac{1}{6}$ y -1, mismas que se encontraron en el ejemplo 2.

Observación El método de factorización con frecuencia es un método más rápido de resolución de una ecuación cuadrática que el método de la fórmula, pero en algunas ocasiones es difícil reconocer los factores. Más aún, muchas expresiones cuadráticas no tienen factores racionales; en tales casos, es imposible factorizar por inspección.

EJEMPLO 4 Resuelva la ecuación $2x^2 - x - 2 = 0$

Solución Comparando la ecuación dada con la forma estándar $ax^2 + bx + c = 0$, advertimos que los coeficientes son $a = 2$, $b = -1$ y $c = -2$. De este modo, tenemos las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-2)}}{2 \cdot 2} \\
&= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 16}}{4} \\
&= \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}
\end{aligned}$$

☛ **12.** Resuelva la ecuación:

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

Respuesta $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$

En consecuencia, las raíces son $\frac{1}{4}(1 + \sqrt{17}) \approx 1.281$ y $\frac{1}{4}(1 - \sqrt{17}) \approx -0.781$.*
☛ **12**

EJEMPLO 5 Resuelva la ecuación $x^4 - 3x^2 - 7 = 0$

Solución Como aparece, esta ecuación no es una ecuación cuadrática. Sin embargo, si hacemos $x^2 = z$, obtenemos

$$z^2 - 3z - 7 = 0$$

que es una ecuación cuadrática para z. De la fórmula cuadrática tenemos las soluciones

$$z = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-7)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$$

Éstas son $z \approx 4.54$ y $z \approx -1.54$. Pero, como $z = x^2$, entonces z no puede ser negativa, de modo que sólo aplica la primera de estas raíces. Tomando su raíz cuadrada, entonces

☛ **13.** Resuelva las ecuaciones:
a) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$
b) $x^4 - 7x^2 - 8 = 0$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(3 + \sqrt{37})} \approx \pm\sqrt{4.54} \approx \pm 2.13$$ ☛ **13**

Completar el cuadrado

El tercer método de resolver ecuaciones cuadráticas se denomina **completar el cuadrado**. La propiedad subyacente de los números reales es la siguiente:

Propiedad de la raíz cuadrada:

Si $X^2 = A$, donde $A \geq 0$, entonces $X = \pm\sqrt{A}$

Por ejemplo, si $X^2 = 3$, entonces $X = +\sqrt{3} \approx 1.73$ o $X = -\sqrt{3} \approx -1.73$. El objetivo de este método es escribir la ecuación cuadrática en la forma $X^2 = A$, donde A es algún número y X es una expresión lineal que incluye la variable x. Explicaremos este método por medio de la siguiente ecuación cuadrática particular

$$x^2 + 6x - 7 = 0 \tag{2}$$

Escribamos esta ecuación en la forma equivalente:

$$x^2 + 6x = 7 \tag{3}$$

De la identidad del cuadrado de un binomio tenemos

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9 \tag{4}$$

Comparando el lado derecho de la ecuación (4) con el izquierdo de la ecuación (3), notamos que sólo difieren por la constante 9. De esta manera, si sumamos 9 a ambos miembros de la ecuación (3),

$$x^2 + 6x + 9 = 7 + 9 = 16$$

Respuesta *a*) $x = 2$ o -1
b) $x = \pm\sqrt{8}$

☛ **14.** Resuelva las ecuaciones:
a) $x^2 - 9 = 0$
b) $(x + 1)^2 = 4$
c) $(x + 1)^2 = -4$

Respuesta *a*) $x = \pm 3$
b) $x = 1, -3$
c) no hay solución

o, en otras palabras,

$$(x + 3)^2 = 16$$

Ahora esta ecuación se resuelve fácilmente tomando la raíz cuadrada en ambos lados.

$$x + 3 = 4 \quad \text{o bien} \quad x + 3 = -4$$

En consecuencia, $x = 4 - 3 = 1$ o $x = -4 - 3 = -7$. Las dos soluciones son $x = 1$ y $x = -7$ ☛ **14**

Queda ahora la pregunta siguiente: ¿por qué decidimos, a partir de la ecuación (3), considerar la cantidad $(x + 3)^2$? En realidad, ¿por qué no consideramos $(x - 3)^2$ o $(x + 57)^2$? La razón es que, después de desarrollar el cuadrado del binomio, querríamos que el resultado coincidiera con el primer miembro de la ecuación (3) por lo que a los términos en x^2 y en x se refiere. Por ejemplo, si hubiésemos elegido $(x - 3)^2$, tendríamos $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$; si bien el término en x^2 es el mismo que el del lado izquierdo de la ecuación (3), el término en x es diferente. Con el propósito de obtener el mismo coeficiente en x que en la ecuación (3) debemos considerar $(x + k)^2$, donde k es la mitad del coeficiente de x que aparece en la ecuación (3) (es decir, k es igual a la mitad del coeficiente de 6, o sea 3).

El procedimiento de resolución de una ecuación cuadrática completando el cuadrado se esboza en los siguientes pasos:

Paso 1 Dividamos toda la ecuación entre el coeficiente de x^2.
Paso 2 Pasamos el término constante al segundo miembro.
Paso 3 Sumamos k^2 a ambos lados de la ecuación, en donde k es la mitad del coeficiente de x que aparece en el primer miembro.
Paso 4 Ahora, el lado izquierdo de la ecuación es el cuadrado perfecto $(x + k)^2$, de modo que la solución se obtiene extrayendo la raíz cuadrada a ambos lados.

EJEMPLO 6 Resuelva la ecuación $2x^2 - x - 2 = 0$ completando el cuadrado.

Solución

☛ **15.** Complete el cuadrado en cada caso:
a) $x^2 - 4x = 1$
b) $3x^2 + 2x = 1$
c) $2y^2 + 5y + 2 = 0$

Paso 1 Dividiendo toda la ecuación entre 2,

$$x^2 - \tfrac{1}{2}x - 1 = 0$$

Paso 2

$$x^2 - \tfrac{1}{2}x = 1$$

Paso 3 El coeficiente de x es $-\frac{1}{2}$. Debemos tomar a k como la mitad de esto, es decir, $-\frac{1}{4}$. Así, debemos sumar $k^2 = (-\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$ a ambos lados.

$$x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{16} = 1 + \tfrac{1}{16} = \tfrac{17}{16}$$

Paso 4 El primer miembro de esta ecuación es ahora $(x + k)^2$, es decir, $[x + (-\frac{1}{4})]^2$. De modo que

$$(x - \tfrac{1}{4})^2 = \tfrac{17}{16}$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos lados, encontramos que

$$x - \frac{1}{4} = \pm\sqrt{\frac{17}{16}} = \pm\frac{\sqrt{17}}{4}$$

y por tanto $x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{17}/4$. (Esto concuerda con las raíces encontradas en el ejemplo 4). ☛ **15**

Respuesta *a*) $(x - 2)^2 = 5$
b) $(x + \frac{1}{3})^2 = \frac{4}{9}$
c) $(y + \frac{5}{4})^2 = \frac{9}{16}$

Terminamos esta sección deduciendo la fórmula cuadrática para la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$. La demostración sigue el método de completar el cuadrado. Empezamos pasando el término constante a la derecha:

$$ax^2 + bx = -c$$

Dividiendo ambos lados entre a (esto es posible dado que $a \neq 0$),

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \tag{5}$$

De acuerdo con el método de completar cuadrados, debemos dividir el coeficiente de x (que es b/a) entre 2, (dando $b/2a$) y el cuadrado del resultado sumarlo a ambos lados. Así, tenemos las igualdades siguientes:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

Pero el primer miembro es $(x + b/2a)^2$, como puede comprobarse por la fórmula del cuadrado de un binomio. Por tanto,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Después de extraer raíz cuadrada a ambos lados, encontramos que

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por tanto,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

como se requería.

Una observación final: La cantidad $D = b^2 - 4ac$ se denomina el **discriminante**. Si $D = 0$, el término dentro de la raíz cuadrada de la fórmula cuadrática se hace cero. En este caso, las raíces de la ecuación coinciden, de modo que no hay raíces distintas. Por ejemplo, una ecuación de este tipo es la ecuación cuadrática $x^2 - 10x + 25 = 0$, la que sólo tiene la raíz $x = 5$.

Si $D < 0$, la cantidad dentro de la raíz cuadrada es negativa. En este caso, la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene raíces que sean números reales. Por ejemplo, consideremos la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$ (en la cual $a = 1$, $b = -2$ y $c = 2$). De la fórmula cuadrática, tenemos que

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \end{aligned}$$

Pero la expresión $\sqrt{-4}$ no tiene sentido como número real, por tanto, concluimos que la ecuación dada no tiene raíces reales.*

EJERCICIOS 2-3

(1-22) Resuelva las siguientes ecuaciones por factorización.

1. $x^2 + 5x + 6 = 0$

2. $x^2 + 3x + 2 = 0$

3. $x^2 + 9x + 14 = 0$

4. $x^2 - 5x + 6 = 0$

5. $x^2 + 4x + 4 = 0$

6. $x^2 - 6x + 9 = 0$

7. $x^2 - 7x + 12 = 0$

8. $x^2 + 2x - 3 = 0$

9. $x^2 - 1 = 0$

10. $x^2 - 25 = 0$

11. $x^2 - 8x = 0$

12. $4x^2 - 5x = 0$

13. $6x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{4} = 0$

14. $\frac{x^2}{2} + \frac{10}{3}x + 2 = 0$

15. $2x^2 + 5x + 3 = 0$

16. $3x^2 - 11x + 10 = 0$

17. $6x^2 + x - 2 = 0$

18. $4x^2 - 4x - 15 = 0$

19. $(x + 3)(x - 3) = x - 9$

20. $6x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$

21. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

22. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

(23-34) Resuelve las siguientes ecuaciones por la fórmula cuadrática.

23. $x^2 + 3x + 1 = 0$

24. $x^2 - 4x + 2 = 0$

25. $2x^2 + 3x - 4 = 0$

26. $3x^2 + 6x - 2 = 0$

27. $x^2 + x - 3 = 0$

28. $4x^2 - 12x + 9 = 0$

29. $4x^2 + 20x + 25 = 0$

30. $2x^2 + 5x - 3 = 0$

31. $5x\,(x + 2) + 6 = 3$

32. $(4x - 1)(2x + 3) = 18x - 4$

33. $(x + 1)^2 = 2(x - 1)^2$

34. $(2x + 1)^2 = 3(x + 1)^2$

(35-44) Resuelva las siguientes ecuaciones completando el cuadrado.

35. $x^2 + 6x - 1 = 0$

36. $x^2 + 2x - 4 = 0$

37. $x^2 - 3x - 1 = 0$

38. $x^2 + 5x + 5 = 0$

39. $4x^2 - 8x - 3 = 0$

40. $2x^2 - 14x + 1 = 0$

---

* Las cantidades que son raíces cuadradas de números negativos se denominan números *imaginarios*. En particular, $\sqrt{-1}$ se llama unidad imaginaria y se denota mediante i. Por ejemplo, de esta manera podemos escribir $\sqrt{-4} = \sqrt{(4)(-1)} = 2\sqrt{-1} = 2i$. En forma parecida, todo número imaginario puede escribirse en la forma iB, donde B es algún número real.

La solución del último ejemplo puede escribirse en la forma

$$x = \tfrac{1}{2}\,(2 \pm \sqrt{-4}) = \tfrac{1}{2}(2 \pm 2i) = 1 \pm i$$

Observemos que estas soluciones constan de dos partes, una **parte real**, la cual es 1, y una **parte imaginaria**, que es i o $-i$, que depende de la raíz que tomemos. Cualquier número que puede escribirse como la suma de un número real y un número imaginario se denomina **número complejo**. En general, un número complejo tiene la forma $A + iB$, donde A y B son números reales.

Así, cuando $b^2 - 4ac > 0$, las soluciones de una ecuación cuadrática constan de dos números reales distintos. Si $b^2 - 4ac = 0$, existe una única solución y es un número real. Y cuando $b^2 - 4ac < 0$, existen dos soluciones distintas que son números complejos.

Todas las operaciones ordinarias se pueden realizar con números complejos. Sólo debemos recordar que $i^2 = -1$.

41. $7x + 3(x^2 - 5) = x - 3$

42. $2x(4x - 1) = 4 + 2x$

43. $x(x + 1)(x + 3) = (x + 2)^3$

44. $(x + 1)^3 - (x - 1)^3 = 8x$

(45-68) Resuelva las siguientes ecuaciones por el método apropiado.

45. $6x^2 = 11$

46. $5x^2 + 7 = 0$

47. $6x^2 = 11x$

48. $2(x^2 + 1) = 5x$

49. $15x^2 = 40(x + 2)$

50. $(3x + 5)(2x - 3) = -8$

51. $3x(2x - 5) = -4x - 3$

52. $(x + 1)^2 = 2x^2$

53. $x^2 = 2(x - 1)(x + 2)$

54. $2x(x + 1) = x^2 - 1$

55. $\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x = x - 1$

56. $\dfrac{x^2}{3} + 2x = 1 + x$

57. $\dfrac{x^2}{3} = \dfrac{11}{6}x + 1$

58. $5x^2 - \frac{7}{2}x = \frac{1}{2}x + 1$

59. $2x^2 - 3x - 1 = 0$

60. $x^2 + 3x - 2 = 0$

61. $3x^2 = 5x - 3$

62. $2x^2 = 5x - 2$

63. $(2x + 3)(x + 1) = (x + 2)(x - 1) + 2$

64. $(3x - 1)(x + 2) = (2x - 1)(x + 3) + 5$

65. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

66. $2x^4 - x^2 - 1 = 0$

67. $2x^{2/3} + x^{1/3} - 1 = 0$

68. $x^{2/5} - 3x^{1/5} + 2 = 0$

69. Resuelva $s = ut + \frac{1}{2}gt^2$ para t

70. Resuelva $s = \dfrac{2a}{1 + a^2}$ para a

71. Resuelva $A = 2\pi R(R + H)$ para R

72. Resuelva $A = 2x^2 + 4xy$ para x

73. Si 2 es una raíz de $x^2 - kx + 2 = 0$, encuentre la otra raíz.

74. Si -1 es una raíz de $2x^2 + 5x + k = 0$, encuentre la otra raíz.

75. Utilice la fórmula cuadrática para resolver la ecuación

$$x^2 - 2xy + 1 - 3y^2 = 0$$

a) Para x en términos de y

b) Para y en términos de x

76. Utilice la fórmula cuadrática para resolver la ecuación

$$3x^2 - 2y^2 = xy + 1$$

a) Para x en términos de y

b) Para y en términos de x

■ 2-4 APLICACIONES DE ECUACIONES CUADRÁTICAS

EJEMPLO 1 Sue es 7 años mayor que Bobby. Si el producto de sus edades es 60, ¿cuál es la edad de Bobby?

Solución Denótese con x la edad de Bobby. Entonces Sue tiene $x + 7$ años. Estamos diciendo que el producto

$$(\text{Edad de Bobby}) \cdot (\text{Edad de Sue}) = x(x + 7) = 60$$

Esto es,

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

lo cual se factoriza como $(x - 5)(x + 12) = 0$, de modo que $x = 5$ o $x = -12$. Pero, x no puede ser negativa, por lo que la edad de Bobby es 5.

EJEMPLO 2 Una caja sin tapa se fabricará a partir de una hoja rectangular de hoja de lata cortando, cuadrados de 4 pulgadas de cada esquina y doblando los lados hacia arriba. Si el ancho de la caja es de 3 pulgadas menos que el largo y la caja contiene 280 pulgadas cúbicas, encuentre las dimensiones de la hoja de lata.

Solución Si denotamos con x pulgadas el ancho de la caja, entonces su largo es $(x + 3)$ pulgadas y su altura 4 pulgadas. (Véase la figura 1). El volumen de la caja está dado por

$$(\text{Largo})(\text{Ancho})(\text{Altura}) = (x + 3)(x)(4) = 4x(x + 3)$$

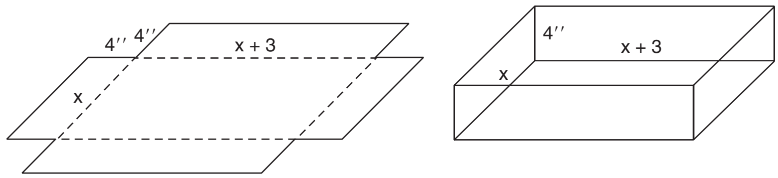


FIGURA 1

Pero la caja contiene 280 pulgadas cúbicas, de modo que

$$4x(x + 3) = 280$$

Dividiendo ambos lados entre 4, tenemos

$$x(x + 3) = 70$$

$$x^2 + 3x - 70 = 0 \qquad \text{(i)}$$

Comparando esto con la fórmula cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tenemos $a = 1$, $b = 3$, $c = -70$. Entonces, por la fórmula cuadrática las raíces de (i) están dadas por

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(1)(-70)}}{2(1)} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 280}}{2} \\ &= \frac{-3 \pm 17}{2} \\ &= \frac{-3 + 17}{2} \quad \text{o} \quad \frac{-3 - 17}{2} \\ &= 7 \quad \text{o} \quad -10 \end{aligned}$$

☛ **16.** Resuelva el ejemplo 2 si el ancho es 4 pulgadas menor que el largo, y el volumen es de 240 pulgadas cúbicas.

Respuesta 14×18 pulgadas

Pero $x = -10$ no es aceptable, ya que x representa el ancho de la caja, y el ancho no puede ser un número negativo. Así $x = 7$.

Las dimensiones de la hoja de lata antes de que le cortemos las esquinas son $x + 8$ y $(x + 3) + 8$. Ya que $x = 7$, las dimensiones son 15 y 18 pulgadas. ☛ **16**

EJEMPLO 3 ***(Renta de apartamento)*** Steve es propietario de un edificio de apartamentos que tiene 60 departamentos. Él puede rentar todos los departamentos si cobra una renta de \$180 mensuales. A una renta mayor, algunos de los departamentos permanecerán vacíos; en promedio, por cada incremento de \$5 en la renta, 1 departamento quedará vacante sin posibilidad de rentarlo. Encuentre la renta que debe cobrar por cada departamento para obtener un ingreso total de \$11,475.

Solución Denótese con n el número de incrementos de 5 dólares. Entonces, el aumento en la renta por departamento es $5n$ dólares, lo cual significa que la renta por departamento es $(180 + 5n)$ dólares. Así, el número de unidades no rentadas será n, de modo que el número de rentados será $60 - n$. La renta total que él recibirá está dada por

$$\text{Ingreso por la renta} = (\text{Renta por depto.}) \times (\text{Número de deptos. rentados})$$

Por tanto,

$$11{,}475 = (180 + 5n)(60 - n)$$

o bien,

$$11{,}475 = 5(36 + n)(60 - n)$$

Dividiendo ambos miembros entre 5,

$$2295 = (36 + n)(60 - n) = 2160 + 24n - n^2$$

Por tanto,

$$n^2 - 24n + 135 = 0$$

$$(n - 9)(n - 15) = 0$$

Por lo que $n = 9$ o 15. Por consiguiente, la renta debe ser $180 + 5n$, que es $180 + 45 = \$225$ o $180 + 75 = \$255$. En el primer caso, 9 de los departamentos quedarán vacantes y los 51 departamentos rentados producirán un ingreso de \$225 cada uno. En el segundo caso, cuando la renta es \$255, 15 departamentos quedarán vacantes y sólo 45 rentados, pero el ingreso total será el mismo. ☛ **17**

☛ **17.** En el ejemplo 3, ¿cuál es el ingreso total por rentas, cuando la renta es de \$200 mensuales?

Respuesta $\$200 \times 56$

El *ingreso* de un negocio para un periodo de operación dado es el nombre dado al total de lo que recibe durante ese periodo. La *utilidad* es igual a este ingreso menos el costo de operación para el periodo en cuestión. Escribimos:

$$\boxed{\text{Utilidad} = \text{Ingreso} - \text{Costos}}$$

Cuando los ingresos provienen de la venta de un bien particular, también tenemos la ecuación general

$$\boxed{\begin{gathered}\text{Ingreso} = (\text{Precio de venta por unidad}) \times \\ (\text{Número de unidades vendidas})\end{gathered}}$$ ☛ **18**

☛ **18.** Una compañía vende su producto a \$9 por unidad. Cuesta $\$(4x + 3000)$ producir x unidades por semana. ¿Cuáles son los ingresos y las ganancias de la compañía, si x unidades se producen y venden por semana?

Respuesta Ingreso $= 9x$, utilidad $= 5x - 3000$

EJEMPLO 4 ***(Decisión de precio)*** La cámara de comercio del huevo de Columbia Británica sabe de experiencias pasadas que si cobra p dólares por docena de huevos, el número de vendidos por semana será x millones de docenas, donde $p = 2 - x$. Entonces, su ingreso semanal total será $R = xp = x(2 - x)$ millones de dólares. El costo para la industria de producir x millones de docenas de huevos por semana está dado por $C = 0.25 + 0.5x$ millones de dólares. ¿A qué precio debe vender los huevos la industria para asegurar una utilidad de $0.25 millones?

Solución La utilidad está dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} P &= R - C \\ &= x(2 - x) - (0.25 + 0.5x) \\ &= -x^2 + 1.5x - 0.25 \end{aligned}$$

Haciendo ésta igual a 0.25, obtenemos la ecuación:

$$-x^2 + 1.5x - 0.25 = 0.25$$

o bien,

$$x^2 - 1.5x + 0.5 = 0$$

Utilizando la fórmula cuadrática, encontramos las raíces para x.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-1.5) \pm \sqrt{(-1.5)^2 - 4(1)(0.5)}}{(2)(1)} \\ &= \frac{1.5 \pm \sqrt{2.25 - 2}}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}(1.5 \pm 0.5) \\ &= 1 \quad \text{o} \quad 0.5 \end{aligned}$$

Ahora $p = 2 - x$. De modo que cuando $x = 1$, tenemos $p = 1$, y cuando $x = 0.5$, $p = 1.5$. Así, la cámara de comercio tiene una elección entre dos políticas. Puede cobrar $1 por docena, en cuyo caso las ventas serán de 1 millón de docenas, o puede cobrar $1.50 por docena, con lo que las ventas serán de 0.5 millones de docenas por semana. En cualquier caso, las utilidades para la industria serán de $0.25 millones por semana.

☛ **19.** Una suma de $200 se invirtió durante 2 años a una tasa de interés de 6% anual. El interés del primer año no se retira y genera interés durante el segundo año. ¿Cuál es el valor final total de la inversión?

Respuesta $\$200(1.06)^2$ o $224.72

En el ejemplo 6 de la sección 2-2, vimos que una suma P invertida a una tasa de interés de $R\%$ devenga una cantidad de interés de $P(R/100)$ en un año. Al final del año, el valor total de la inversión es

$$\text{Capital inicial} + \text{Interés} = P + P\left(\frac{R}{100}\right) = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)$$ ☛ **19**

EJEMPLO 5 ***(Inversión)*** Una suma de $400 se invirtió a una tasa de interés $R\%$ anual. Al final del año, el capital y el interés se dejan que generen interés durante el segundo año. Determine R si el valor total de la inversión al final del segundo año es $484.

Solución Al final del primer año, el valor total, como se analizó anteriormente, es

$$P\left(1 + \frac{R}{100}\right) = 400\left(1 + \frac{R}{100}\right) \equiv P_1$$

Este nuevo capital total genera interés durante el segundo año, de modo que el valor de la inversión al final del segundo año es

$$P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right) = 400\left(1 + \frac{R}{100}\right)^2$$

Así, tenemos que la ecuación cuadrática

$$400\left(1 + \frac{R}{100}\right)^2 = 484$$

que se resolverá para R. No la escribimos en la forma estándar, sólo tomamos las raíces cuadradas de ambos lados:

$$\left(1 + \frac{R}{100}\right)^2 = \frac{484}{400} = 1.21 \qquad \text{de modo que} \qquad 1 + \frac{R}{100} = \pm 1.1$$

R no puede ser negativa, de modo que la solución con sentido es $1 + R/100 = +1.1$ o $R = 10$. La tasa de interés es 10%.

EJEMPLO 6 ***(Inversión)*** Una compañía desea reservar una suma de \$1 millón para invertirlo a una tasa de interés y utilizarlo en una fecha posterior para liquidar dos emisiones de bonos que deberá pagar. Una año después que la suma se invirtió por primera vez, se requerirán \$250,000 para la primer emisión; un año después, se necesitarán \$900,000 más para la segunda emisión. Determine la tasa de interés necesaria para que la inversión sea suficiente para cubrir ambos pagos.

Solución Sea R por ciento al año, la tasa de interés. Cuando se invierte a dicha tasa, el valor de la inversión después de 1 año es

$$P\left(1 + \frac{R}{100}\right) = (1 \text{ millón})\left(1 + \frac{R}{100}\right) = \left(1 + \frac{R}{100}\right) \text{millones de dólares.}$$

En ese instante, se retiran 0.25 millones; por tanto, al inicio del segundo año, el monto aún invertido es (en millones)

$$P' = \left(1 + \frac{R}{100}\right) - 0.25 = 0.75 + \frac{R}{100}$$

Después de un segundo año de interés, el valor de la inversión es

$$P'\left(1 + \frac{R}{100}\right) = \left(0.75 + \frac{R}{100}\right)\left(1 + \frac{R}{100}\right)$$

Éste debe ser el monto (0.9 millones) necesario para pagar la emisión del segundo bono. Por tanto, llegamos a la ecuación

$$\left(0.75 + \frac{R}{100}\right)\left(1 + \frac{R}{100}\right) = 0.9$$

Así,

$$0.75 + 1.75\left(\frac{R}{100}\right) + \left(\frac{R}{100}\right)^2 = 0.9$$

Multiplicando ambos miembros por 100^2 para eliminar las fracciones, llegamos a la ecuación

$$7500 + 175R + R^2 = 9000$$

o bien,

$$R^2 + 175R - 1500 = 0$$

De la fórmula cuadrática (con $a = 1$, $b = 175$ y $c = -1500$), encontramos el valor siguiente para R.

$$\begin{aligned} R &= \frac{-175 \pm \sqrt{175^2 - 4(1)(-1500)}}{2(1)} \\ &= \tfrac{1}{2}[-175 \pm \sqrt{30{,}625 + 6000}] \\ &= \tfrac{1}{2}[-175 \pm \sqrt{36{,}625}] \\ &\approx \tfrac{1}{2}[-175 \pm 191.4] \\ &= 8.2 \quad \text{o bien} \quad -183.2 \end{aligned}$$

Claramente, la segunda solución no tiene sentido práctico, una tasa de interés difícilmente sería negativa. La solución que tiene sentido es $R = 8.2$. De modo que la inversión debe devengar 8.2% anual, a fin de proporcionar suficientes fondos para pagar la emisión de bonos.

EJERCICIOS 2-4

1. Determine dos números cuya suma sea 15 y la suma de sus cuadrados sea 137.

2. Determine dos enteros impares consecutivos cuyo producto sea 143.

3. Encuentre dos enteros consecutivos cuyo producto sea 132.

4. Encuentre dos enteros pares consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 100.

5. La longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es 13 centímetros. Determine los otros dos lados del triángulo, si su suma es 17 centímetros.

6. El diámetro de un círculo es 8 centímetros. ¿En cuánto debe aumentar el radio para que el área aumente 33π centímetros cuadrados?

7. El perímetro de un rectángulo es de 20 pulgadas y su área de 24 pulgadas cuadradas. Determine las longitudes de sus lados.

8. El perímetro de un rectángulo es 24 centímetros y su área es 32 centímetros cuadrados. Encuentre las longitudes de sus lados.

9. Se quitan cuadrados iguales de cada esquina de una hoja metálica rectangular cuyas dimensiones son 20 por 16 pulgadas. Después los lados se doblan hacia arriba para formar una caja rectangular. Si la base de la caja tiene un área de 140 pulgadas cuadradas, determine el lado del cuadrado que se quitó de cada esquina.

10. Una caja con base cuadrada y sin tapa se construye a partir de una pieza cuadrada de metal cortando cuadrados de 2 pulgadas de cada esquina y doblando los lados hacia arriba. Encuentre las dimensiones de la hoja metálica, si el volumen de la caja será de 50 pulgadas cúbicas.

11. Se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 80 pies por segundo. La altura h (en pies) recorrida en t segundos está dada por la fórmula

$$h = 80t - 16t^2$$

a) ¿Después de cuántos segundos la pelota alcanzará una altura de 64 pies?

b) ¿Cuánto tiempo tardará la pelota en regresar al piso?

c) Determine la altura máxima que la pelota alcanza. (*Sugerencia:* El tiempo de recorrido hacia arriba es igual a la mitad del tiempo en regresar al piso).

12. Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba desde el piso con una velocidad inicial de 128 pies por segundo. El proyectil está a una altura h después de t segundos del lanzamiento, en donde $h = 128t - 16t^2$.

a) ¿Después de cuánto tiempo el proyectil estará a una altura de 192 pies por encima del suelo?

b) ¿En qué momento el proyectil regresará al suelo? Determine la altura máxima que alcanza el proyectil.

13. *(Problema de costo)* Un vendedor vendió un reloj en $75. Su porcentaje de ganancia fue igual al precio de costo en dólares. Determine el precio de costo del reloj.

14. *(Interés compuesto)* Por cada $100 invertidos en préstamos comerciales con garantía, un banco recibe $116.64 después de 2 años. Esta cantidad representa el capital y el interés compuesto anualmente. ¿Cuál es la tasa de interés anual?

15. *(Interés compuesto)* Dentro de dos años, la compañía XYZ requerirá $1,102,500 para retirar algunos de sus bonos. ¿A qué tasa de interés compuesta anualmente deben invertirse $1,000,000 durante el periodo de dos años para recibir la cantidad requerida para retirar los bonos?

16. *(Renta de apartamentos)* Royal Realty ha construido una unidad nueva de 60 apartamentos. Del pasado se sabe que si ellos cobran una renta mensual de $150 por apartamento, todas las viviendas se ocuparán; pero con cada incremento de $3 en la renta, es muy probable que un apartamento permanezca vacante. ¿Cuál debe ser la renta que se tiene que cobrar para generar los mismos $9000 de ingreso total que se obtendrían con una renta de $150 y, al mismo tiempo, dejar algunos apartamentos vacantes?

17. *(Renta de apartamentos)* En el ejercicio 16, el mantenimiento, los servicios y otros costos de el edificio ascienden a $5000 por mes más $50 por cada apartamento ocupado y $20 por cada apartamento vacante. ¿Qué renta debe cobrarse, si la ganancia será de $1225 mensual? (La utilidad es el ingreso por las rentas menos todos los costos).

18. *(Decisión de precio)* Si un editor pone un precio de $20 a un libro, se venderán 20,000 copias. Por cada dólar que aumente al precio se dejará de vender 500 libros. ¿Cuál debe ser el costo de cada libro para generar un ingreso total por la ventas de $425,000?

19. *(Decisión de precio)* En el ejercicio 18, el costo de producir cada copia es $16. ¿Qué precio debe cobrar el editor para tener una utilidad de $200,000?

20. *(Decisión de precio)* En el ejercicio 19, suponga que además del costo de $16 por copia, el editor debe pagar regalías al autor del libro igual al 10% del precio de venta. ¿Ahora qué precio debe cobrar por copia para obtener una utilidad de $200,000?

21. *(Inversión)* Una suma de $100 se invirtió a un interés durante un año; después, junto con los intereses generados, se invierte durante un segundo año al doble de la primer tasa de interés. Si la suma total lograda es $112.32, ¿cuáles son las dos tasas de interés?

22. *(Inversión)* En el ejercicio 21, $25 se retiran después del primer año y el resto se invierte al doble de la tasa de interés. Si el valor de la inversión al final del segundo año es $88, ¿cuáles son las dos tasas de interés?

23. *(Decisión de producción y de precio)* Cada semana, una compañía puede vender x unidades de su producto a un precio de p dólares cada uno, en donde $p = 600 - 5x$. A la compañía le cuesta $(8000 + 75x)$ dólares producir x unidades.

a) ¿Cuántas unidades debe vender la compañía cada semana para generar un ingreso de $17,500?

b) ¿Qué precio por unidad debe cobrar la compañía para obtener un ingreso semanal de $18,000?

c) ¿Cuántas unidades debe producir y vender cada semana para obtener una utilidad semanal de $5500?

d) ¿A qué precio por unidad la compañía generará un utilidad semanal de $5750?

24. *(Decisión de producción y de precio)* Un fabricante puede vender x unidades de un producto cada semana a un precio de p dólares por unidad, donde $p = 200 - x$. Cuesta $(2800 + 45x)$ dólares producir x unidades.

a) ¿Cuántas unidades deben venderse cada semana para generar un ingreso de $9600?

b) ¿A qué precio por unidad se generará un ingreso semanal de $9900?

c) ¿Cuántas unidades debe el fabricante producir y vender cada semana para obtener una utilidad de $3200?

d) ¿A qué precio por unidad el fabricante obtendrá una utilidad semanal de $3150?

25. *(Política de precios)* Una Cámara Estatal del Vino compra whisky a $2 una botella y la vende a p dólares por botella. El volumen de ventas x (en cientos de miles de botellas por semana) está dado por $x = 24 - 2p$, cuando el precio es p. ¿Qué valor de p da un ingreso total de $7 millones por semana? ¿Qué valor de p da, a la Cámara del Vino, una utilidad de $4.8 millones semanales?

REPASO DEL CAPÍTULO 2

Términos, símbolos y conceptos importantes

2.1 Ecuación, solución o raíz de una ecuación. Ecuaciones equivalentes.
Los principios de suma y multiplicación para ecuaciones.
Ecuación polinomial, grado, ecuación lineal, ecuación cuadrática.
Procedimiento paso a paso para resolver una ecuación lineal.

2.2 Procedimiento paso a paso para manipular problemas planteados en palabras.
Fórmula de interés anual.

2.3 Forma estándar de una ecuación cuadrática.
Propiedad del factor cero: solución de una ecuación cuadrática por medio de factorización.
Fórmula cuadrática. Propiedad de la raíz cuadrada: completar el cuadrado.

2.4 Ingreso, costos, utilidad.

Fórmulas

Fórmula del interés anual:

$$I = P\frac{R}{100}$$

Valor después de un año $= P\left(1 + \frac{R}{100}\right)$

Fórmula cuadrática: Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Utilidad = ingreso – costos.

Ingreso = (precio de venta por unidad) $\times$ (número de unidades vendidas)

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 2

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las proposiciones siguientes. Cada enunciado falso, cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) Si ambos lados de una ecuación se elevan al cuadrado, sus raíces no cambian.

b) Si ambos lados de una ecuación se multiplican por una constante, las raíces de la ecuación no cambian.

c) Una ecuación no se altera si se suma a ambos lados la misma expresión.

d) Si ambos lados de una ecuación se dividen por una constante, las raíces de la ecuación no cambian.

e) Una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b y c son constantes arbitrarias.

f) El discriminante de la ecuación cuadrática, $ax^2 + bx + c = 0$, es $\sqrt{b^2 - 4ac}$

g) Una ecuación lineal siempre tiene una raíz.

h) Una ecuación cuadrática siempre tiene dos raíces distintas.

i) Es factible que una ecuación cuadrática no tenga raíces reales.

j) Si el discriminante de una ecuación cuadrática es positivo, entonces la ecuación tiene dos raíces reales distintas.

**k*) Si la ecuación cuadrática, $ax^2 + bx + c = 0$, tiene dos raíces iguales, éstas son iguales a $-\frac{b}{2a}$

(2-30) Resuelva las ecuaciones siguientes para x. Suponga que a, b y c son constantes mayores que cero.

2. $3(x - 4) + 5(x + 6) = 9(3x - 2) - 2$

3. $3x + 2(x - 1) = 6x - 9$

4. $4(2x - 3) + 5(2x - 3) = 3(2x - 3)$

5. $x^2 - 5x + 6 = 0$

6. $4(x - 1) = 2(3x - 1) + (1 - 2x)$

7. $x^2 + 8x = 6x + 3$

8. $3x(x - 1) = 2(x^2 + 27)$

9. $3x^2 + 5x + 20 = 16 + x - x^2$

10. $\frac{14}{x} - 1 = 3x - 20$

11. $\frac{x}{6} - \frac{3}{x} = \frac{1}{2}$

12. $2(x^2 + x) = x + 1$

13. $(x + 1)^2 = (x + 2)^2 - 2(x + 1)$

14. $\frac{12}{x - 1} = 2(x - 6)$

15. $(3x - 2) + 5(x - 2) = (6x - 1)(6 - x) - 1$

16. $21x + 30 = 45x - 26$

17. $3\sqrt{2x - 8} = x$

*18. $\sqrt{6x + 19} = x + 2$

*19. $x - 1 = \sqrt{4x^2 - 26x + 46}$

20. $\sqrt{4 - x} = x - 4$

21. $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

22. $\frac{a}{x} + \frac{b}{x} = \frac{a+b}{ab}$

23. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = ab + ac + bc$

24. $9^x = 27^{(3-x)}$

25. $25^{(x^2)} = 125/5^x$

26. $\frac{x-2}{7} + \frac{8-x}{x+1} = \frac{x}{7}$

27. $6x^2 = x + 1$

28. $\sqrt{3x + 1} = x - 3$

29. $(x + 1)(1 - 2x) = (2x + 7)(19 + x)$

30. $(1 + 2x)^2 + (1 + x)(1 - x) = 3x^2 + 2x + 4$

(31-36) Para cada una de las siguientes ecuaciones resuelva para las variables que se indican.

31. *(Interés simple)* $I = Prt$, para r.

32. *(Suma de n términos de una progresión geométrica)*

$$S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \text{ para } a.$$

33. $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$, para R_2

34. *(Depreciación lineal)* $T = a + (n - 1)d$, para n.

*35. *(Suma de una progresión aritmética con n términos)*

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d], \text{ para } a.$$

*36. *(Suma de los primeros n números naturales)*

$$S = \frac{n(n + 1)}{2}, \text{ para } n.$$

37. *(Inversiones)* Oliva Sánchez invirtió 800 dólares en una cuenta de ahorros que paga una tasa de interés de $R\%$ anual. Al final del año, el capital y el interés los dejó para que generarán interés el segundo año a la misma tasa. Si al final del segundo año Oliva recibió $882, ¿cuál es el valor de R?

38. *(Interés compuesto)* Arturo Erdely, gerente de la compañía de Seguros La Confianza debe realizar un pago de $112,360 dentro de dos años. ¿A qué tasa de interés compuesta anualmente tiene que invertir $100,000 a fin de poder saldar la deuda?

39. *(Utilidades del productor)* Para la próxima Copa Mundial de Futbol, la compañía de balones Chutagol decide producir balones conmemorativos. Enrique Lemus, encargado del proyecto, fue informado por el departamento de mercadotecnia que si los balones se venden en $25 cada uno, entonces pueden vender todos los balones que se puedan producir. Por otro lado, él sabe que cuesta $10 producir cada balón, por los materiales y la mano de obra, además se tiene un costo adicional mensual de $3000 al mes por operar la planta. ¿Cuántos balones debe producir y vender para obtener una ganancia de $6000 al mes?

40. *(Utilidades del productor)* La fábrica de chocolates Mi Alegría elabora barras de chocolate. El costo de elaboración de cada barra es de $0.50. El número de barras que puede vender a la semana depende del precio que les fije, de forma tal que si el precio es de p dólares entonces se pueden vender x chocolates, en donde $x = 5000(4 - p)$. Así, la utilidad por cada barra es $(p - 0.50)$ dólares y la utilidad semanal es $(p - 0.50)x$ dólares. Determine el valor de p que producirá una utilidad semanal de $4800.

41. *(Inversión de una herencia)* La señorita Hortensia Rodríguez recibió una herencia de $250,000. Después de analizar diversas opciones, decide invertir parte de este monto en una cuenta de ahorros que paga 4% anual, y el resto en otra que paga 6% anual. Si desea recibir $13,000 de ingresos anuales, ¿cuánto debe invertir la señorita Hortensia en cada cuenta?

*42. *(Mezclas)* En su tienda de dulces, Adriana vende cacahuates a un precio de 1.50 dólares por kilogramo, nueces a $1.60 por kilogramo y pistaches a $2.2 por kg. Para las fiestas decembrinas, ella desea ofrecer a sus clientes bolsas de $\frac{1}{4}$ kg. con una mezcla de cacahuates, nueces y pistaches, en $0.47 cada una. Si la cantidad, en kg, de pistache debe ser igual al total de cacahuates y nueces en cada bolsa ¿cuántos gramos de cacahuates, nueces y pistaches debe colocar Adriana en cada bolsa? *Nota*: El reto de este problema es escribir el problema verbal en términos de una variable.

En el capítulo 8 se abordará un método para resolver problemas como éste, planteando el problema como uno con más de una variable.

43. *(Decisión de precio)* Si un editor pone un precio de $16 a un libro, se venderán 10,000 copias. Por cada dólar que aumente al precio se dejarán de vender 300 libros. ¿Cuál debe ser el precio al que se debe vender cada libro para generar un ingreso total por las ventas de $124,875?

CASO DE ESTUDIO

LA EDAD DE DIOFANTO

Con base en el texto de su epitafio, que aparece al inicio de este capítulo, podemos representar en lenguaje algebraico lo expresado en él.

Si denotamos con e la edad en años de Diofanto al morir, entonces la traducción de su epitafio en términos de la variable e es:

Años de la niñez de Diofanto: $\frac{e}{6}$ años

Edad a la que su cara se cubrió de barba: $\frac{e}{6} + \frac{e}{12}$ años

Edad a la que contrajo matrimonio: $\frac{e}{6} + \frac{e}{12} + \frac{e}{7}$

Edad de Diofanto cuando se convirtió en papá: $\frac{e}{6} + \frac{e}{12} + \frac{e}{7} + 5$

Edad de Diofanto cuando falleció su hijo: $\frac{e}{6} + \frac{e}{12} + \frac{e}{7} + 5 + \frac{e}{2}$

Edad de Diofanto cuando murió: $\frac{e}{6} + \frac{e}{12} + \frac{e}{7} + 5 + \frac{e}{2} + 4$

Por tanto, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$\frac{e}{6} + \frac{e}{12} + \frac{e}{7} + 5 + \frac{e}{2} + 4 = e$$

En donde el miembro del lado izquierdo representa cada una de las partes de la vida de Diofanto descritas en el epitafio y el miembro derecho, e, es la edad de Diofanto; a partir de esta ecuación es fácil determinar su edad.

Así, al resolver la ecuación anterior, aplicando lo que se estudió en esta parte del libro, podemos saber que Diofanto vivió 84 años. Y con esta información respondemos las preguntas que se hicieron al inicio del capítulo.

i. ¿A qué edad falleció Diofanto? Como ya se comentó $e = 84$, así que Diofanto falleció a la edad de 84 años.

ii. ¿Cuántos años vivió antes de casarse? Con base en la relación dada en el epitafio, se tiene

$$\frac{e}{6} + \frac{e}{12} + \frac{e}{7} = \frac{84}{6} + \frac{84}{12} + \frac{84}{7}$$

es decir, $14 + 7 + 12 = 33$, por lo que Diofanto se casó a los 33 años.

iii. ¿Cuántos años vivió su hijo? El texto es muy claro en este punto. "... Tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció...", en consecuencia su hijo vivió 42 años.

iv. ¿Qué edad tenía Diofanto cuando nació su hijo? Por el planteamiento que se realizó anteriormente, se tiene:

Edad de Diofanto cuando se convirtió en papá:

$$\frac{e}{6} + \frac{e}{12} + \frac{e}{7} + 5 = \frac{84}{6} + \frac{84}{12} + \frac{84}{7} + 5 = 14 + 7 + 12 + 5 = 38$$

Por lo que Diofanto se convirtió en papá a la edad de 38 años.

CAPÍTULO 3

Desigualdades

¿Comprar o rentar?

Como se estudió en el capítulo anterior, para modelar situaciones de la vida real, se hace necesario traducir al lenguaje algebraico una situación expresada en lenguaje verbal, y así plantear ecuaciones que describan esa situación. Sin embargo, quizá con mayor frecuencia de lo que uno cree, se necesita expresar con un modelo matemático situaciones que incluyen restricciones debidas a la materia prima, a un mínimo de producción, a un nivel mínimo de ganancia o un máximo poder adquisitivo, entre otras muchas restricciones que implican utilizar desigualdades.

Como un ejemplo, a continuación se analiza el problema que tiene una compañía que debe asignar un automóvil a sus representantes de ventas para uso oficial. Con la finalidad de simplificar el problema, suponga que sólo se tiene un representante de ventas. Entonces, la compañía tiene que decidir entre comprar o rentar un automóvil. Después de analizar diferentes propuestas de empresas automotrices, la compañía considera que la elección debe hacerse entre las dos siguientes opciones.

a) Comprar un automóvil con un desembolso inicial de \$60,600, más 24 pagos mensuales fijos de \$4,700 cada uno; éste incluye el pago de un seguro para automóvil. Al término de los 24 meses, el automóvil se puede vender en \$70,000, a éste se le conoce como *valor de rescate*.

b) Rentar un automóvil, por \$3,000 mensuales, más \$0.60 por kilómetro recorrido y un pago único de \$5,000 por concepto de seguro para automóvil con vigencia de dos años.

La empresa considera que, en promedio, su representante viaja 2,000 kilómetros al mes, y esto no cambiará en los próximos dos años. En tal situación, la empresa debe calcular el costo en ambos planes y decidirse por aquel que le arroje un costo menor a lo largo de los dos años.

Con base en lo anterior, al hacer el cálculo al final de los tres años, 36 meses, el plan A implica un gasto de \$103,400; mientras que en el plan B el gasto asciende a \$105,800. Por lo que debería elegir el plan A.

No obstante, si el precio por kilómetro aún se puede negociar, ¿a partir de qué precio por kilómetro es mejor el plan B que el plan A? En este capítulo se estudiarán métodos para la resolución de problemas como éste, cuya solución aparece al final del capítulo.

TEMARIO

■ 3-1 CONJUNTOS E INTERVALOS

Empecemos recordando las definiciones de los símbolos $<$, $\leq$, $>$ y $\geq$, denominados **símbolos de desigualdad**.

Los números reales distintos de cero se dividen en dos clases, los números positivos y los números negativos. Escribimos $a > 0$ (a *es mayor que cero*) para indicar que a es positivo, y $a < 0$ (a *es menor que cero*) para señalar que a es negativo. La suma $a + b$ y el producto $a \cdot b$ de dos números reales positivos son ambos positivos. Si a es positivo, entonces $-a$ es negativo.

Si a y b son dos números reales distintos, escribimos $a > b$ si la diferencia $a - b$ es positiva y $a < b$ si $a - b$ es negativa. Por ejemplo, $5 > 2$ porque $5 - 2$ es positivo y $2 < 8$ dado que $2 - 8 = -6$ es negativo. Geométricamente, $a > b$ significa que el punto sobre la recta numérica que representa a a está a la derecha del punto que representa al número b y $a < b$ significa que el punto que representa a a está a la izquierda del punto que representa a b. (Véase la figura 1).

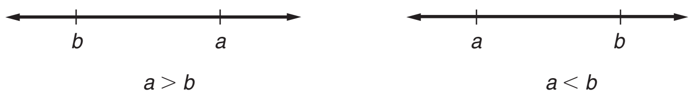


FIGURA 1

Definimos $a \geq b$ (a *es mayor o igual que* b) para indicar que $a > b$ o que $a = b$. De manera similar, $a \leq b$ (a *es menor o igual que* b) se usa para señalar que $a < b$ o $a = b$. Por ejemplo, $5 \leq 7$ es cierto y $5 \geq 5$ porque $5 = 5$ se cumple.

Proposiciones tales como $a < b$, $a > b$, $a \geq b$ o $a \leq b$ se llaman **desigualdades**. En particular, $a > b$ y $a < b$ son **desigualdades estrictas**. La desigualdad $a > b$ puede escribirse en forma equivalente en la dirección opuesta como $b < a$. Así, $5 > 3$ es lo mismo que $3 < 5$.

Cuando un número b está entre dos números a y c con $a < c$, escribimos $a < b < c$. La doble desigualdad se utiliza para indicar que $a < b$ y que $b < c$. ☛ **1**

☛ **1.** ¿Las proposiciones siguientes son falsas o verdaderas?
a) $-5 \leq -7$
b) $3 > -4$
c) Si $x > -5$ entonces $-5 \leq x$
d) Existe x tal que $-3 \leq x \leq -4$

Conjuntos

El conocimiento de los conjuntos y de las operaciones entre conjuntos es básico en todas las matemáticas modernas. Una gran cantidad de largas proposiciones matemáticas pueden escribirse clara y concisamente en términos de conjuntos y de operaciones entre ellos.

DEFINICIÓN Toda colección de objetos bien definida se llama **conjunto**. Los objetos de que consta un conjunto se denomina **miembros** o **elementos** de un conjunto.

Respuesta *a*) Falsa
b) verdadera *c*) verdadera
d) falsa

Por una colección **bien definida**, entendemos que dado cualquier objeto, podemos decidir sin ambigüedad alguna si pertenece o no a la colección.

Un conjunto puede especificarse en dos formas, haciendo una lista de todos sus elementos o estableciendo una regla que caracterice los elementos del conjunto. Examinemos estos dos métodos uno por uno.

MÉTODO DEL LISTADO Si es posible especificar todos los elementos de un conjunto, el conjunto puede describirse listando todos los elementos y encerrando la lista entre llaves.

Por ejemplo, $\{1, 2, 5\}$ denota al conjunto que consta de los tres números 1, 2 y 5 y $\{p, q\}$ simboliza el conjunto cuyos únicos elementos son las letras p y q.

En casos en que el conjunto contiene un gran número de elementos, es posible emplear a menudo lo que llamaremos una **lista parcial**. Por ejemplo, $\{2, 4, 6, \ldots, 100\}$ denota al conjunto de todos los enteros pares desde 2 hasta 100. Tres puntos suspensivos, $\ldots$, se usan para señalar que la sucesión de elementos continúa de manera tal que es clara con base en los primeros elementos listados. La sucesión termina en 100. Por medio de los puntos suspensivos, el método de la lista puede emplearse en casos en los cuales el conjunto en cuestión contiene un número infinito de elementos. Por ejemplo, $\{1, 3, 5, \ldots\}$ denota al conjunto de *todos* los números naturales impares. La ausencia de números después de los puntos suspensivos indica que la sucesión no termina, sino que continúa indefinidamente.

MÉTODO DE LA REGLA Existen muchos ejemplos en los que no es posible o que no sería conveniente listar todos los elementos de un conjunto determinado. En tales casos, el conjunto puede especificarse estableciendo una regla de pertenencia.

Por ejemplo, consideremos el conjunto de todas las personas que viven en México en este momento. Especificar este conjunto listando todos sus elementos por nombres sería una tarea prodigiosa. En lugar de ello lo podemos denotar de la siguiente manera.

$$\{x \mid x \text{ es una persona que actualmente vive en México}\}$$

El símbolo $\mid$ significa *tal que*, de modo que esta expresión se lee: *el conjunto de todas las* x *tales que* x *es una persona que actualmente vive en México*. La afirmación que sigue a la barra vertical dentro de las llaves es la regla que especifica la pertenencia al conjunto.

Como un segundo ejemplo, consideremos el conjunto.

$$\{x \mid x \text{ es un punto de esta página}\}$$

el cual denota el conjunto de todos los puntos de esta página. Éste es un ejemplo de un conjunto que no puede especificarse con el método del listado, aun si deseáramos hacerlo así.

Una gran cantidad de conjuntos pueden especificarse por el listado o estableciendo una regla, y podemos elegir el método que más nos agrade. Daremos varios ejemplos de conjuntos, algunos de los cuales pueden especificarse usando ambos métodos.

Ejemplo 1

a) Si N denota el conjunto de todos los números naturales, entonces podemos escribir

$$N = \{1, 2, 3, \dots\} = \{k \mid k \text{ es un número natural}\}$$

b) Si P denota el conjunto de los enteros de -2 a $+3$, entonces

$$P = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} = \{x \mid x \text{ es un entero, } -2 \leq x \leq 3\}$$

Obsérvese que la regla de pertenencia consta de dos condiciones separadas por una coma. Cualquier elemento del conjunto debe satisfacer ambas condiciones.

c) $$\begin{aligned} Q &= \{1, 4, 7, \dots, 37\} \\ &= \{x \mid x = 3k + 1, k \text{ es un entero, } 0 \leq k \leq 12\} \end{aligned}$$

d) El conjunto de todos los estudiantes actualmente inscritos en la Facultad de Contaduría y Administración puede escribirse formalmente como

$$S = \{x \mid x \text{ es un estudiante inscrito actualmente en la Facultad de Contaduría y Administración}\}$$

Este conjunto podría especificarse también listando los nombres de todos los estudiantes involucrados.

☛ **2.** Liste los elementos que pertenecen a los conjuntos:
a) $\{x \mid x \text{ es un número natural, } -1 \leq x < 5\}$
b) $\{x \mid x = (k + 4)^{-1}, k \text{ es un entero, } -2 \leq k \leq 2\}$

e) El conjunto de todos los números reales mayores que 1 y menores que 2 puede especificarse mediante el método de la regla como

$$T = \{x \mid x \text{ es un número real, } 1 < x < 2\}$$ ☛ **2**

Se dice que un conjunto es **finito** si su número de elementos es finito; es decir, si pueden contarse. Si el número de elementos de un conjunto no es finito, se dice que es un conjunto **infinito**.

En el ejemplo 1, todos los conjuntos de las partes *b*), *c*) y *d*) son finitos; pero los correspondientes a las partes *a*) y *e*) son infinitos.

Se acostumbra usar letras mayúsculas para denotar los conjuntos y letras minúsculas para sus elementos. Observe que seguimos esta convención en el ejemplo 1. Si A es un conjunto arbitrario y x cualquier objeto, la notación $x \in A$ se utiliza para indicar el hecho de que x es un elemento de A. La afirmación $x \in A$ se lee x *pertenece a* A o x *es un elemento de* A. La afirmación negativa x *no es un elemento de* A se indica escribiendo $x \notin A$.

Respuesta *a*) $\{1, 2, 3, 4\}$
b) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\}$

En la parte *b*) del ejemplo 1, $2 \in P$ pero $6 \notin P$. En el caso del conjunto de la parte *e*), $\sqrt{2} \in T$ y $\frac{3}{2} \in T$, pero $2 \notin T$ y $\pi \notin T$.

DEFINICIÓN Un conjunto que no contiene elementos se denomina un **conjunto vacío**. También se utiliza el término conjunto **nulo**.

Con el símbolo $\varnothing$ se denota un conjunto que es vacío y la proposición $A = \varnothing$ significa que el conjunto A no contiene elementos. Entre los ejemplos de conjuntos vacíos están los siguientes:

$$\{x \mid x \text{ es un entero y } 3x = 2\}$$

☛ **3.** ¿Las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas?
a) $2 \in \{x \mid 0 < x^2 \leq 2\}$
b) $\frac{2}{3} \notin \{x \mid x = 1 - k^{-1}$
k es un número natural$\}$
c) $0 \in \varnothing$

Respuesta *a*) Falsa; *b*) falsa *c*) falsa

$\{x \mid x$ es un número real y $x^2 + 1 = 0\}$

El conjunto de todos los dragones vivientes

El conjunto de todos los imanes que sólo tienen un polo. ☛ **3**

DEFINICIÓN Un conjunto A se dice que es un **subconjunto** de otro conjunto B si cada elemento de A también es un elemento de B. En tal caso, escribimos $A \subseteq B$.

El conjunto A se dice que es un **subconjunto propio** del conjunto B si todo elemento de A está en B pero existe al menos un elemento de B que no está en A. En este caso, escribimos $A \subset B$.

EJEMPLO 2

a) Sea $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Entonces, $A \subset B$

b) Si N es el conjunto de todos los números naturales, I es el conjunto de todos los enteros, Q es el conjunto de todos los números racionales y R es el conjunto de todos los números reales, entonces

$$N \subset I \subset Q \subset R$$

c) El conjunto de todas las estudiantes de la Universidad Nacional Autónoma es un subconjunto del conjunto de todos los estudiantes de esa universidad.

d) Todo conjunto es un subconjunto de sí mismo; es decir,

☛ **4.** Liste todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$

$$\boxed{A \subseteq A \text{ para cualquier conjunto } A}$$

Sin embargo, la afirmación $A \subset A$ no es verdadera.

e) Un conjunto vacío $\varnothing$ es un subconjunto de cualquier conjunto A:

$$\boxed{\varnothing \subseteq A \text{ para cualquier conjunto } A}$$

Con el propósito de explicar esta última afirmación con más detalle, reformulemos la definición de subconjunto: B es un subconjunto de A si y sólo si no hay elementos en B que no pertenezcan a A. Es claro que no existen elementos que pertenezcan a $\varnothing$ y no pertenezcan a A, por la simple razón de que $\varnothing$ no tiene elementos. En consecuencia, $\varnothing \subseteq A$. ☛ **4**

Respuesta $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\varnothing$

Dos conjuntos son iguales si contienen los mismos elementos. En forma más precisa, tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN Se dice que dos conjuntos A y B son iguales si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. En tal caso, escribimos $A = B$.

☛ **5.** ¿Las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas?
a) $\{x \mid -1 \le x \le 1\} \subset \{x \mid x^2 < 4\}$
b) $\{0, 1, 3, 4\} \subseteq \{x \mid x^2 \neq 4\}$
c) $\{0, 3\} = \{x \mid x^2 = 3x\}$

En consecuencia, $A = B$ si no existen objetos que pertenezcan a A y que no pertenezcan a B, o que pertenezcan a B y no pertenezcan a A.

EJEMPLO 3

a) Si $A = \{x \mid x^2 = 1\}$ y $B = \{-1, +1\}$, entonces, $A = B$.

b) Si $A = \{y \mid y^2 - 3y + 2 = 0\}$ y $B = \{1, 2\}$, entonces, $A = B$. ☛ **5**

Intervalos

DEFINICIÓN Sean a y b dos números reales tales que $a < b$. Entonces el **intervalo abierto** de a a b, denotado por (a, b), es el conjunto de todos los números reales x situados entre a y b. Así,

$$(a, b) = \{x \mid x \text{ es un número real y } a < x < b\}$$

Respuesta *a*) Verdadera *b*) verdadera *c*) verdadera

De manera similar, el **intervalo cerrado** de a a b, denotado por $[a, b]$ es el conjunto de todos los números reales situados entre a y b pero que también incluye a éstos. Por tanto,

$$[a, b] = \{x \mid x \text{ es un número real y } a \le x \le b\}$$

Intervalos **semicerrados** o **semiabiertos** se definen de la siguiente manera:

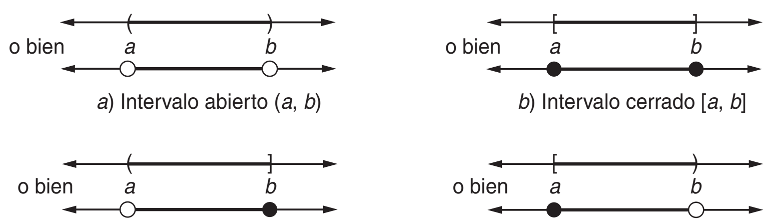
$$(a, b] = \{x \mid a < x \le b\}$$

$$[a, b) = \{x \mid a \le x < b\}$$

☛ **6.** ¿Las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas?
a) $2 \in [-2, 2)$ *b*) $2 \in (-2, 2]$
c) $-2 \in (-4, \infty)$

Observación La afirmación de que x es un número real se ha omitido de las reglas que definen estos conjuntos. Esto por lo regular se hace para evitar repeticiones cuando se trabaja con conjuntos de números reales. ☛ ***6***

Para todos estos intervalos, (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ y $(a, b]$, a y b se denominan los **extremos** del intervalo. Un intervalo abierto no contiene a sus extremos; mientras que un intervalo cerrado contiene a ambos extremos. Un intervalo semicerrado contiene sólo uno de sus extremos. Los métodos de representar tales intervalos se muestran en la figura 2.



a) Intervalo abierto (a, b)
b) Intervalo cerrado $[a, b]$
c) Intervalo semicerrado $(a, b]$
d) Intervalo semicerrado $[a, b)$

FIGURA 2

Respuesta *a*) Falsa *b*) verdadera *c*) verdadera

Usamos los símbolos ∞ (*infinito*) y $-\infty$ (*menos infinito*) para describir intervalos no acotados. (Véase la figura 3). Obsérvese que ∞ y $-\infty$ no son números reales.

a) $(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$

b) $[a, \infty) = \{x \mid x \geq a\}$

c) $(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$

d) $(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$

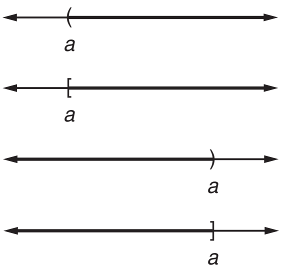


FIGURA 3

EJERCICIOS 3-1

(1-8) Utilice del método de listado para describir los siguientes conjuntos.

1. El conjunto de todos los enteros menores que 5 y mayores que -2.
2. El conjunto de todos los naturales menores que 50.
3. El conjunto de todos los enteros menores que 5.
4. El conjunto de todos los números pares mayores que 4.
5. El conjunto de todos los primos menores que 20.
6. $\left\{y \,\middle|\, y = \dfrac{1}{h+2}, h \text{ es un número natural}\right\}$
7. $\{x \mid x \text{ es un factor primo de } 36\}$
8. $\left\{p \,\middle|\, p = \dfrac{1}{n-1}, n \text{ es un número primo menor que } 20\right\}$

(9-16) Utilice el método de la regla para describir los conjuntos siguientes.

9. El conjunto de todos los números pares menores que 100.
10. El conjunto de todos los números primos menores que 30.
11. $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 19\}$
12. $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$
13. $\{3, 6, 9, \ldots\}$
14. $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$
15. El intervalo $[-1, 1]$.
16. El intervalo $(1, \infty)$.

(17-20) Escriba los siguientes conjuntos de números en la forma de intervalos.

17. $3 \leq x \leq 8$
18. $-2 < y \leq 7$
19. $-3 > t > -7$
20. $t \geq -5$

(21-24) Escriba los intervalos siguientes como desigualdades.

21. $[2, 5)$
22. $(-3, 7)$
23. $(-\infty, 3)$
24. $(-2, \infty)$
25. Establezca si las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas. Si son falsas, explique por qué.

a) $2 \in \{1, 2, 3\}$ *b*) $3 \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$

c) $4 \in \{1, 2, 5, 7\}$ *d*) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$

e) $\varnothing = 0$ *f*) $\{0\} = \varnothing$

g) $0 \in \varnothing$ *h*) $\varnothing \in \{0\}$

i) $\varnothing \subseteq \{0\}$ *j*) $\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 2, 1, 3\}$

k) $\left\{x \,\middle|\, \dfrac{(x-2)^2}{x-2} = 0\right\} = \{x \mid x - 2 = 0\}$

l) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

m) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$.

n) El conjunto de todos los rectángulos del plano es un subconjunto del conjunto de todos los cuadrados del plano.

o) El conjunto de todos los triángulos equiláteros es un subconjunto del conjunto de todos los triángulos.

p) El intervalo abierto (a, b) es un subconjunto del intervalo cerrado $[a, b]$.

q) $\{x \mid 2 \leq x \leq 3\} \in \{y \mid 1 \leq y \leq 5\}$

r) $\{x \mid 1 \leq x \leq 2\} = \{y \mid 1 \leq y \leq 2\}$

26. Si A es el conjunto de todos los cuadrados del plano, B el conjunto de todos los rectángulos del plano y C es el conjunto de todos los cuadriláteros del plano, entonces, ¿cuál de estos conjuntos es un subconjunto de otro (o de qué otros)?

27. Demuestre que el conjunto $\{x \mid x^2 - x - 2 = 0\}$ no es un subconjunto del intervalo $[0, \infty)$.

28. ¿El conjunto $\{x \mid x(x^2 - 1) = 0\}$ es un subconjunto del intervalo $(0, \infty)$?

29. ¿El conjunto $\{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$ es un subconjunto de los números naturales?

30. ¿Es el conjunto $\{x \mid 2x^2 - 3x + 1 = 0\}$ es un subconjunto de los enteros? ¿De los números racionales?

■ 3-2 DESIGUALDADES LINEALES DE UNA VARIABLE

En esta sección, consideraremos desigualdades que requieren una sola variable. El siguiente ejemplo se refiere a un sencillo problema de negocios que conduce a una de tales desigualdades.

El costo total (en dólares) de producción de x unidades de cierto artículo está dado por $C = 3100 + 25x$ y cada unidad se vende a \$37. El fabricante quiere saber cuántas unidades deberá producir y vender para obtener una utilidad de al menos \$2000.

Suponga que se producen y venden x unidades. El ingreso I obtenido por vender x unidades en \$37 cada una es $I = 37x$ dólares. La utilidad U (en dólares) obtenida por producir y vender x unidades está dada entonces por las siguientes ecuaciones:

$$\text{Utilidad} = \text{Ingresos} - \text{Costos}$$
$$U = 37x - (3100 + 25x) = 12x - 3100$$

Dado que la utilidad requerida debe ser al menos de \$2000, es decir, debería ser de \$2000 o más, tenemos que

$$U \geq 2000$$

o bien,

$$12x - 3100 \geq 2000 \tag{1}$$

Esta es una desigualdad en la variable x. Observemos que los términos que aparecen son de dos tipos, términos constantes o términos que son múltiplos constantes de la variable x. Cualquier desigualdad que sólo tiene estos dos tipos de términos se denomina **desigualdad lineal**. Si el símbolo de desigualdades es $>$ o $<$ la desigualdad es **estricta**; si el símbolo es $\geq$ o $\leq$, se dice que es **débil**.

EJEMPLO 1

a) $3 - x \leq 2x + 4$ es una desigualdad lineal débil en la variable x.

b) $\frac{1}{4}z + 3 > 5 - \frac{1}{3}z$ es una desigualdad lineal estricta en la variable z.

Cualquier desigualdad puede escribirse en una forma equivalente, intercambiando los dos lados e invirtiendo el sentido del signo de la desigualdad. Por ejemplo, $x > 3$ es equivalente a $3 < x$; el ejemplo 1(a) es equivalente a $2x + 4 \geq 3 - x$.

DEFINICIÓN La **solución** de una desigualdad en una variable es el conjunto de todos los valores de la variable, para los cuales la desigualdad es una proposición verdadera.

Por ejemplo, la solución de la desigualdad (1) es el conjunto de todos los valores x (el número de unidades vendidas) que producen una utilidad de al menos \$2000.

A semejanza de las ecuaciones, la solución de una desigualdad se encuentra efectuando ciertas operaciones en la desigualdad con el propósito de transformarla en alguna forma estándar. Hay dos operaciones básicas que se utilizan en el manejo de las desigualdades; estableceremos ahora las reglas que gobiernan estas operaciones.

Regla 1

Cuando el mismo número real se suma o se resta a ambos lados de una desigualdad, el sentido de la desigualdad no se altera.

En símbolos, si $a > b$ y c es cualquier número real, entonces

$$a + c > b + c \quad \text{y} \quad a - c > b - c$$

EJEMPLO 2

a) Es claro que $8 > 5$ es una proposición verdadera. Su sumamos 4 a ambos lados, obtenemos $8 + 4 > 5 + 4$ o $12 > 9$, que sigue siendo cierta. Si restamos 7 a ambos lados obtenemos $8 - 7 > 5 - 7$ o $1 > -2$, que de nuevo es válida.

b) Sea $x - 1 > 3$. Sumando 1 a ambos lados,

$$x - 1 + 1 > 3 + 1$$

o bien,

$$x > 4$$

El conjunto de valores de x para los cuales $x - 1 > 3$ es el mismo conjunto para el cual $x > 4$. ☛ **7**

☛ **7.** Sume -5 a ambos miembros de las siguientes desigualdades:
a) $x + 5 \geq -5$
b) $x - 5 < 2$

En el ejemplo 2 observamos que la igualdad $x > 4$ puede obtenerse de la desigualdad original $x - 1 > 3$ pasando el término -1 del lado izquierdo al derecho y cambiando su signo. En general, la regla anterior nos permite efectuar este tipo de operación: *cualquier término puede pasarse de un lado al otro de una desigualdad*

Respuesta *a*) $x \geq -10$
b) $x - 10 < -3$

después de cambiar su signo, sin alterar el sentido de la desigualdad. En símbolos, si $a > b + c$, entonces $a - b > c$ y $a - c > b$.

EJEMPLO 3

a) Si $8 > 5 + 2$, entonces $8 - 2 > 5$.

b) De $2x - 1 < x + 4$ se sigue que $2x - x < 4 + 1$. Tanto x como -1 se pasaron de un lado a otro. Entonces, simplificando obtenemos $x < 5$.

> **Regla 2**
>
> *El sentido de la desigualdad se preserva si ambos lados se multiplican (o dividen) por el mismo número positivo y se invierte cuando se multiplican (o dividen) por el mismo número negativo.*

En símbolos, si $a > b$ y c es cualquier número positivo, entonces

$$ac > bc \quad \text{y} \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

mientras que si c es un número negativo arbitrario, entonces

$$ac < bc \quad \text{y} \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

EJEMPLO 4

a) Sabemos que $4 > -1$ es una proposición verdadera. Multiplicando ambos lados por 2, obtenemos $8 > -2$ que aún es válida. Pero si la multiplicamos por (-2), debemos invertir el sentido de la desigualdad:

$$(-2)(4) < (-2)(-1) \quad \text{o bien} \quad -8 < 2$$

que otra vez es válida.

b) Si $2x \leq 4$, entonces podemos dividir ambos lados entre 2 y obtener la desigualdad equivalente $2x/2 \leq 4/2$ o $x \leq 2$.

c) Si $-3x < 12$, podemos dividir entre -3, que es negativo, de modo que debemos invertir el sentido de la desigualdad:

$$\frac{-3x}{-3} > \frac{12}{-3} \quad \text{o bien} \quad x > -4$$ ☛ **8**

☛ **8.** Multiplique ambos miembros de las siguientes desigualdades por -2;
a) $2x > -3$; *b*) $-\frac{1}{2}x \leq 3 - x$

Respuesta *a*) $-4x < 6$
b) $x \geq -6 + 2x$

Antes de considerar más ejemplos, deduciremos estas dos reglas básicas.

DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA 1 Supongamos que $a > b$ y sea c cualquier número real. Si $a > b$, entonces por definición $a - b > 0$. Consideremos ahora la diferencia entre $(a + c)$ y $(b + c)$:

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b > 0$$

Pero, dado que $(a + c) - (b + c)$ es positivo, esto significa que

$$a + c > b + c$$

lo cual es lo que deseamos encontrar.

DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA 2 De nuevo supongamos que $a > b$ y sea c cualquier número real positivo. Entonces, como antes, $a - b > 0$. Así, $a - b$ y c son números positivos, de modo que su producto también es positivo:

$$(a - b)\, c > 0$$

Es decir,

$$ac - bc > 0$$

Se sigue, por tanto, que $ac > bc$, como se requería. Si, por otro lado, c fuera negativo, el producto $(a - b)c$ sería negativo puesto que un factor sería positivo y el otro negativo. Se sigue que

$$ac - bc < 0$$

y de aquí, $ac < bc$, como se requería.

EJEMPLO 5 Encuentre todos los números reales que satisfacen la desigualdad

$$3x + 7 > 5x - 1$$

Solución Pasamos todos los términos en x a un lado de la desigualdad y todos los términos constantes al otro. Pasando $5x$ al lado izquierdo y 7 al lado derecho, cambiando sus signos y simplificando obtenemos las siguientes desigualdades:

$$3x - 5x > -1 - 7 \qquad \text{(Regla 1)}$$
$$-\,2x > -8$$

Enseguida, dividimos ambos lados entre -2 y cambiamos el sentido de la desigualdad (puesto que -2 es negativo).

$$\frac{-2x}{-2} < \frac{-8}{-2} \qquad \text{(Regla 2)}$$
$$x < 4$$

Por tanto, la solución consta del conjunto de números reales en el intervalo $(-\infty, 4)$. Esto se ilustra en la figura 4.

FIGURA 4

EJEMPLO 6 Resuelva la desigualdad

$$y + \frac{3}{4} \leq \frac{5y - 2}{3} + 1$$

Solución Ante todo, debemos eliminar las fracciones de la desigualdad. Aquí, el denominador común es 12, de modo que multiplicamos ambos lados por 12.

$$12\left(y + \frac{3}{4}\right) \leq 12\left(\frac{5y - 2}{3} + 1\right)$$
$$12y + 9 \leq 4(5y - 2) + 12$$
$$12y + 9 \leq 20y - 8 + 12$$
$$12y + 9 \leq 20y + 4$$

Pasando los términos en y a la izquierda y los términos constantes a la derecha, obtenemos

$$12y - 20y \leq 4 - 9$$
$$-8y \leq -5$$

Enseguida, dividimos ambos lados entre -8 e invertimos el sentido de la desigualdad (porque -8 es negativo).

$$y \geq \frac{-5}{-8} \quad \text{o bien} \quad y \geq \frac{5}{8}$$

☛ **9.** Determine las soluciones en la notación de intervalos:
a) $1 - x < 3 - 2x$
b) $x + 4 \geq 4x - 2$

Respuesta *a*) $(-\infty, 2)$
b) $(-\infty, 2]$

De aquí, la solución consta del conjunto de números reales mayores o iguales que $\frac{5}{8}$, es decir, de los números reales incluidos en el intervalo $[\frac{5}{8}, \infty)$. Este conjunto se ilustra en la figura 5. ☛ **9**

FIGURA 5

EJEMPLO 7 Resuelva la doble desigualdad en x.

$$8 - 3x \leq 2x - 7 < x - 13$$

Solución De la sección 3-1, recuerde que la doble desigualdad $a \leq b < c$ significa que $a \leq b$ y al mismo tiempo $b < c$. La doble desigualdad considerada es equivalente a las dos desigualdades siguientes:

$$8 - 3x \leq 2x - 7 \quad \text{y} \quad 2x - 7 < x - 13$$

Resolvemos estas dos desigualdades por separado por los métodos antes descritos, por lo que resulta

$$x \geq 3 \quad \text{y} \quad x < -6$$

☛ **10.** Determine la solución y dibújela en la recta numérica:
$3x - 2 \leq 2 - x < x + 6$

Respuesta $-2 < x \leq 1$

Ambas desigualdades deben ser satisfechas por x. Pero es imposible que tanto $x \geq 3$ como $x < -6$ puedan satisfacer a la vez. *Por lo que no hay solución*: ningún número real satisface la doble desigualdad. ☛ **10**

EJEMPLO 8 Determine la solución de la doble desigualdad

$$7 > 5 - 2x \geq 3$$

Solución En este caso, como x aparece sólo en la expresión de en medio, podemos manipular juntas las tres partes de la desigualdad. Primero, restamos 5 de las tres partes:

$$7 - 5 > 5 - 2x - 5 \geq 3 - 5$$

o bien,

$$2 > -2x \geq -2$$

Ahora, dividimos todo entre -2, invirtiendo ambos signos de desigualdad:

$$-1 < x \leq 1$$

La solución consiste en el intervalo semicerrado $(-1, 1]$.

EJEMPLO 9 ***(Utilidades del fabricante)*** El fabricante de cierto artículo puede vender todo lo que produce al precio de \$60 cada artículo. Gasta \$40 en materia prima y mano de obra al producir cada artículo, y tiene costos adicionales (fijos) de \$3000 a la semana en la operación de la planta. Encuentre el número de unidades que debería producir y vender para obtener una utilidad de al menos \$1000 a la semana.

Solución Sea x el número de artículos producidos y vendidos a la semana. Entonces el costo total de producir x unidades es de \$3000 más \$40 por artículo, lo cual es

$$(40x + 3000) \text{ dólares}$$

El ingreso obtenido por vender x unidades a \$60 cada una será de $60x$ dólares. Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{Utilidad} &= \text{Ingresos} - \text{Costos} \\ &= 60x - (40x + 3000) = 20x - 3000 \end{aligned}$$

Puesto que deseamos obtener una ganancia de al menos \$1000 al mes, tenemos las desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Utilidad} &\geq 1000 \\ 20x - 3000 &\geq 1000 \\ 20x &\geq 4000 \\ x &\geq 200 \end{aligned}$$

☛ **11.** Un rectángulo tiene perímetro de 24 unidades. Si la diferencia entre los dos lados es menor que 6 unidades, determine el intervalo de valores para la longitud del lado más largo.

Respuesta [6, 9)

En consecuencia, el fabricante deberá producir y vender al menos 200 unidades cada semana. ☛ **11**

EJEMPLO 10 ***(Decisiones de fabricación)*** El administrador de una fábrica debe decidir si deberán producir sus propios empaques, que la empresa ha estado adquiriendo de proveedores externos a \$1.10 cada uno. La fabricación de los empaques incrementaría los costos generales de la empresa en \$800 al mes y el costo de material y de mano de obra será de 60¢ por cada empaque. ¿Cuántos empaques deberá usar la empresa al mes para justificar la decisión de fabricar sus propios empaques?

Solución Sea x el número de empaques utilizados por la empresa al mes. Entonces, el costo de adquirir x empaques a \$1.10 cada uno es de $1.10x$ dólares. El costo de fabricar x empaques es de \$0.60 por empaque más costos generales de \$800 al mes, de modo que el costo total es

$$(0.60x + 800) \quad \text{dólares}$$

Para justificar la fabricación de los empaques por la empresa misma, debe ser cierta la desigualdad siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{Costo de adquisición} &> \text{Costo de fabricación}\\
1.10x &> 0.60x + 800\\
1.10x - 0.60x &> 800\\
0.50\,x &> 800\\
x &> 1600
\end{aligned}$$

En consecuencia, la empresa debe usar al menos 1601 empaques al mes para justificar su fabricación.

EJERCICIOS 3-2

(1-20) Resuelva las siguientes desigualdades.

1. $5 + 3x < 11$

2. $3 - 2y \geq 7$

3. $2u - 11 \leq 5u + 6$

4. $5x + 7 > 31 - 3x$

5. $3(2x - 1) > 4 + 5(x - 1)$

6. $x + \dfrac{4}{3} > \dfrac{2x - 3}{4} + 1$

7. $\dfrac{1}{4}(2x - 1) - x < \dfrac{x}{6} - \dfrac{1}{3}$

8. $\frac{3}{2}(x + 4) \geq 2 - \frac{1}{5}(1 - 4x)$

9. $\dfrac{y + 1}{4} - \dfrac{y}{3} > 1 + \dfrac{2y - 1}{6}$

10. $5 - 0.3t < 2.1 + 0.5(t + 1)$

11. $1.2(2t - 3) \leq 2.3(t - 1)$

12. $2(1.5x - 2.1) + 1.7 \geq 2(2.4x - 3.5)$

13. $5 < 2x + 7 < 13$

14. $4 \geq \dfrac{1 - 3x}{4} \geq 1$

15. $(x + 3)^2 > (x - 2)^2$

16. $(2x + 3)(3x - 1) \leq (6x + 1)(x - 2)$

17. $(3x - 1)(2x + 3) > (2x + 1)(3x + 2)$

18. $(3x + 1)(x - 2) > (x - 3)(3x + 4)$

19. $2x + 1 < 3 - x < 2x + 5$

20. $4 - 2x < x - 2 < 2x - 4$

21. $3x + 7 > 5 - 2x \geq 13 - 6x$

22. $2x - 3 < 1 + x < 3x - 1$

23. $3x - 5 < 1 + x < 2x - 3$

24. $5x - 7 \geq 3x + 1 \geq 6x - 11$

25. *(Inversión)* Un hombre tiene \$7000 para invertir. Quiere invertir parte al 8% y el resto al 10%. ¿Cuál es el monto máximo que debe invertir al 8%, si desea un ingreso anual por interés de al menos \$600 anuales?

26. *(Inversión)* La señora K tiene \$5000 que quiere invertir, parte a 6% y el resto a 8%. Si ella desea un ingreso anual por intereses de al menos \$370, ¿cuál es la cantidad mínima que debe invertir al 8%?

27. *(Decisión de producción)* Un fabricante puede vender todas las unidades que produce al precio de \$30 cada una. Tiene costos fijos de \$12,000 al mes; y además, le cuesta \$22 producir cada artículo. ¿Cuántas unidades debe producir y vender al mes la compañía para obtener utilidades?

28. *(Utilidades del fabricante)* Un fabricante de aparatos de alta fidelidad puede vender todas las unidades producidas al precio de \$150 cada una. Tiene costos fijos a la semana de \$15,000 y costos por unidad de \$100 en materiales y mano de obra. Determine el número de aparatos de alta fidelidad que deberá fabricar y vender cada semana, con el propósito de obtener utilidades semanales de al menos \$1000.

29. *(Decisiones de fabricación)* Una empresa automotriz desea saber si le conviene fabricar sus propias correas para el ventilador, que ha estado adquiriendo de proveedores externos a \$2.50 cada unidad. La fabricación de las correas por la empresa incrementará sus costos fijos en \$1500 al mes, pero sólo le costará \$1.70 fabricar cada correa. ¿Cuántas correas debe utilizar la empresa cada mes para justificar la fabricación de sus propias correas?

30. *(Decisiones sobre contratación de maquiladores)* Una empresa puede encomendar a un contratista que empaque cada unidad de su producto a un costo de \$2.75. Por otra parte, la empresa puede empacar sus productos instalando una máquina empacadora. Su instalación incrementará los costos fijos de la empresa en \$2000 al mes y el costo de empaquetamiento sería de \$1.50 por unidad. ¿Cuántas unidades tendría que producir al mes para que la instalación de la máquina empacadora fuera rentable?

31. *(Publicación de revistas)* El costo de publicación de cada ejemplar de la revista semanal *Compre y venda* es de 35¢. Los ingresos por ventas de distribución son de 30¢ por ejemplar, y los ingresos por publicidad del 20% sobre los ingresos obtenidos por ventas más allá de los 2000 ejemplares. ¿Cuántos ejemplares deberá publicar y vender cada semana para obtener ingresos semanales de al menos \$1000?

32. *(Publicación de revistas)* El editor de una revista mensual tiene costos de edición de 60.5¢ por ejemplar. El ingreso por ventas de distribución es de 70¢ por ejemplar, y los ingresos por publicidad del 15% sobre los ingresos obtenidos por ventas más allá de los 20,000 ejemplares. ¿Cuántos ejemplares deberá publicar y vender al mes para asegurar utilidades que sobrepasen los \$4000?

■ 3-3 DESIGUALDADES CUADRÁTICAS DE UNA VARIABLE

Una **desigualdad cuadrática** de una variable, tal como x, es una desigualdad que tiene términos proporcionales a x y a x^2 y términos constantes. Las formas estándares de una desigualdad cuadrática son

$$ax^2 + bx + c > 0 \ \text{(o bien} < 0) \qquad \text{o bien} \qquad ax^2 + bx + c \geq 0 \ \text{(o bien} \leq 0)$$

en donde a, b y c son constantes determinadas ($a \neq 0$). ☛ **12**

☛ **12.** Exprese en la forma estándar:
$(x + 2)(2x - 1) \leq (3x - 2)^2 + 1$

Otra vez estamos interesados en resolver una desigualdad dada, esto es, en determinar el conjunto de x para el cual la desigualdad se cumple. Podemos hacer esto primero reemplazando la desigualdad con un signo = y encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática resultante. Estas soluciones dividen a la recta numérica en intervalos. En cada intervalo seleccionamos un punto y probamos si la desigualdad es cierta o falsa en ese punto. Si es verdadera en ese punto, entonces será verdadera en todos los puntos del intervalo, y recíprocamente, si es falsa en un punto en el intervalo, entonces será falsa en todos los puntos de ese intervalo.

EJEMPLO 1 Resuelva la desigualdad $x^2 + 3x < 4$

Solución Primero reescribimos la desigualdad en la forma estándar restando 4 de ambos miembros:

$$x^2 + 3x - 4 < 0$$

Reemplazamos el signo < por =, obtenemos la ecuación cuadrática $x^2 + 3x - 4 = 0$. Ésta puede resolverse por medio de factorización. Se convierte en $(x - 1)(x + 4) = 0$, de modo que las raíces son $x = 1$ y $x = -4$. Graficando estos puntos en la recta numérica, obtenemos la figura 6. Los dos puntos dividen a la recta numérica en tres

Respuesta $7x^2 - 15x + 7 \geq 0$

intervalos, $x < -4$, $-4 < x < 1$ y $x > 1$. En cada uno de estos intervalos, la expresión siempre conserva el mismo signo, ya que sólo cambia de signo cuando pasa por el cero, y esto sucede sólo cuando $x = -4$ o 1.

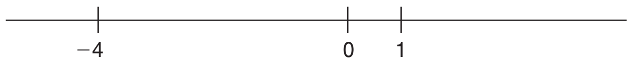


FIGURA 6

Tomemos cualquier punto en el primer intervalo $x < -4$: seleccionamos $x = -5$. Entonces $x^2 + 3x - 4 = (-5)^2 + 3(-5) - 4 = 6 > 0$. La desigualdad es falsa, de modo que es falsa para todos los puntos en el intervalo $x < -4$.

En $-4 < x < 1$ seleccionamos el punto $x = 0$. Entonces, $x^2 + 3x - 4 = (0)^2 + 3(0) - 4 = -4 < 0$. La desigualdad es verdadera, por lo que es cierta para todas las x que satisfagan $-4 < x < 1$.

☛ **13.** Resuelva las desigualdades:
a) $(x - 1)(x - 3) < 0$
b) $(x + 1)(x + 4) \geq 0$
c) $(x - 3)^2 + 2 \leq 0$

En $x > 1$ seleccionamos $x = 2$. Entonces $x^2 + 3x - 4 = (2)^2 + 3(2) - 4 = 6 > 0$. La desigualdad es falsa, de modo que es falsa para toda $x > 1$.

Por tanto el conjunto solución es el intervalo $(-4, 1)$. Esto se ilustra en la figura 7. ☛ **13**

FIGURA 7

EJEMPLO 2 Resuelva la desigualdad $5x \leq 2(x^2 - 6)$.

Solución Pasando todos los términos a la izquierda, la desigualdad dada se transforma en

$$5x - 2x^2 + 12 \leq 0$$

Siempre conviene tener el término cuadrático con signo positivo, porque entonces, la factorización es más fácil. Así, multiplicamos ambos lados de esta desigualdad por -1 y cambiamos el sentido de la desigualdad.

Respuesta *a*) $1 < x < 3$
b) $x \leq -4$ o $x \geq -1$
c) no hay solución

$$-5x + 2x^2 - 12 \geq 0$$

$$2x^2 - 5x - 12 \geq 0$$

Al reemplazar el signo $\geq$ por el signo $=$ obtenemos la ecuación cuadrática $2x^2 - 5x - 12 = 0$; y por medio de la factorización,

$$(2x + 3)(x - 4) = 0$$

Las raíces son $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 4$, que dividen a la recta numérica en los tres intervalos $(-\infty, -\frac{3}{2})$, $(-\frac{3}{2}, 4)$ y $(4, \infty)$ como se muestra en la figura 8. Seleccionar cual-

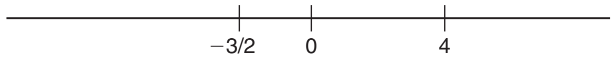


FIGURA 8

quier punto en cada intervalo y probar la desigualdad. En $(-\infty, -\frac{3}{2})$ elegimos $x = -2$, en $(-\frac{3}{2}, 4)$ seleccionamos $x = 0$; y en $(4, \infty)$ escogemos $x = 5$. Es conveniente colocar los cálculos como se muestra en la tabla 1. Por tanto, la desigualdad dada es verdadera en los intervalos $(-\infty, -\frac{3}{2})$ y $(4, \infty)$ y es falsa en el intervalo $(-\frac{3}{2}, 4)$.

TABLA 1

Intervalo	$(-\infty, -\frac{3}{2})$	$(-\frac{3}{2}, 4)$	$(4, \infty)$
Puntos de prueba	-2	0	5
$2x^2 - 5x - 12$	$2(-2)^2 - 5(-2) - 12 = 6 > 0$	$2(0)^2 - 5(0) - 12 = -12 < 0$	$2(5)^2 - 5(5) - 12 = 13 > 0$
Signo	Positivo	Negativo	Positivo

En este caso, tenemos una desigualdad no estricta, de modo que también se satisface en donde la expresión cuadrática sea cero, es decir, en $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 4$. Esta vez, los puntos extremos del intervalo se incluyen en el conjunto solución. La solución consiste en los dos intervalos semiinfinitos $(-\infty, -\frac{3}{2}]$ y $[4, \infty)$. Este conjunto solución se ilustra en la siguiente figura.

FIGURA 9

> Resumen del método de solución de las desigualdades cuadráticas:
>
> **1.** Escribir la desigualdad en la forma estándar.
>
> **2.** Reemplazar el signo de desigualdad por un signo $=$ y resolver la ecuación cuadrática resultante. Las raíces dividen la recta numérica en intervalos.
>
> **3.** En cada intervalo elegir un punto y probar la desigualdad dada en ese punto. Si es verdadera (falsa) en ese punto, entonces es verdadera (falsa) en todos los puntos de ese intervalo.
>
> **4.** Para una desigualdad estricta, en el conjunto solución no se incluyen los puntos extremos de los intervalos. Para una desigualdad no estricta sí se incluyen esos puntos extremos.

Algunas veces no podremos factorizar la expresión cuadrática y podría ser necesario utilizar la fórmula cuadrática para determinar los puntos de división de los intervalos.

EJEMPLO 3 Resuelva la desigualdad $x^2 - 6x + 6 \le 0$.

Solución La desigualdad ya está en forma estándar. La correspondiente ecuación cuadrática es $x^2 - 6x + 6 = 0$, que no tiene raíces racionales. Con base en la fórmula cuadrática, tenemos las raíces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(6)}}{2 \cdot 1} = \tfrac{1}{2}(6 \pm \sqrt{12})$$
$$= 3 \pm \sqrt{3}$$

Son aproximadamente 1.27 y 4.73 y como es usual dividen la recta de los números reales en tres intervalos. Seleccionamos un punto de prueba en cada uno. (Véase la tabla 2 para los detalles). La conclusión es que la desigualdad es falsa en $(-\infty, 3 - \sqrt{3})$ y $(3 + \sqrt{3}, \infty)$ y es verdadera en $(3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$.

TABLA 2

Intervalo	$(-\infty, 3 - \sqrt{3})$	$(3 - \sqrt{3}, + 3 + \sqrt{3})$	$(3 + \sqrt{3}, \infty)$
Punto de prueba	0	3	5
$f(x) = x^2 - 6x + 6$	$0^2 - 6 \cdot 0 + 6 = 6 > 0$	$3^2 - 6 \cdot 3 + 6 = -3 < 0$	$5^2 - 6 \cdot 5 + 6 = 1 > 0$
Signo	Positivo	Negativo	Positivo

☛ **14.** Resuelva las desigualdades.
a) $x^2 - 2x - 2 \leq 0$
b) $x^2 - 2x + 2 > 0$
c) $x^2 + 2x + 1 \leq 0$

Como tenemos una desigualdad no estricta incluimos los puntos extremos, de modo que el conjunto solución es el intervalo cerrado $[3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}]$, o aproximadamente [1.27, 4.73]. Éstos se ilustra en la figura 10. ☛ **14**

FIGURA 10

EJEMPLO 4 Resuelva la desigualdad $x^2 + 2 > 2x$

Solución En la forma estándar tenemos $x^2 - 2x + 2 > 0$. La ecuación cuadrática correspondiente es $x^2 - 2x + 2 = 0$, y de la fórmula cuadrática, las raíces son

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{-4})$$

De modo que, en este caso no existen raíces reales. Esto significa que la expresión $x^2 - 2x + 2$ es positiva para toda x o bien negativa para toda x, ya que si cambiase de signo tendría que ser cero en algún punto. Entonces todo lo que tenemos que hacer es seleccionar cualquier punto como punto de prueba. El más sencillo es $x = 0$, y tenemos $0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 2 > 0$. La desigualdad dada se satisface; de aquí que se satisface para toda x.

EJEMPLO 5 ***(Producción y utilidades)*** Las ventas mensuales x de cierto artículo cuando su precio es p dólares están dadas por $p = 200 - 3x$. El costo de producir x unidades al mes del artículo es $C = (650 + 5x)$ dólares. ¿Cuántas unidades de este artículo deberán producirse y venderse de modo que la utilidad mensual sea por lo menos de 2200 dólares?

Respuesta
a) $1 - \sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$
b) $-\infty < x < \infty$
c) $x = -1$

Solución El ingreso I (en dólares) obtenido por vender x unidades al precio de p dólares por unidad es

$$\begin{aligned} I &= \text{(Unidades vendidas)} \times \text{(Precio por unidad)} \\ &= xp \\ &= x(200 - 3x) \\ &= 200x - 3x^2 \end{aligned}$$

El costo C (en dólares) de fabricar x unidades es $C = (650 + 5x)$. La utilidad U (mensual) obtenida por producir y vender x unidades está dada por

$$\begin{aligned} U &= \mathrm{I} - \mathrm{C} \\ &= (200x - 3x^2) - (650 + 5x) \\ &= 195x - 3x^2 - 650 \end{aligned}$$

Dado que la utilidad U debe ser al menos de \$2200, tenemos que $U \geq 2200$. En consecuencia,

$$195x - 3x^2 - 650 \geq 2200$$

Al escribir esto en la forma estándar y dividir todo entre -3 (notando que el signo de la desigualdad se invierte), obtenemos la desigualdad

$$x^2 - 65x + 950 \leq 0$$

Las raíces deben determinarse por medio de la fórmula cuadrática:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-65) \pm \sqrt{(-65)^2 - 4(1)(950)}}{2 \cdot 1} \\ &= \tfrac{1}{2}(65 \pm \sqrt{425}) \end{aligned}$$

o aproximadamente 22.2 y 42.8. En los tres intervalos $x < 22.2$, $22.2 < x < 42.8$ y $x > 42.8$ seleccionamos los tres puntos $x = 0$, 40 y 100, respectivamente. Encontramos que $x^2 - 65x + 950 > 0$ cuando $x = 0$ y 100, pero $x^2 - 65x + 950 < 0$ cuando $x = 40$. Por tanto se sigue que $x^2 - 65x + 950 < 0$ para toda x en el intervalo $22.2 < x < 42.8$. Así, el conjunto solución de la desigualdad es el intervalo cerrado [22.2, 42.8]. ☛ **15**

☛ **15.** En el ejemplo 5, ¿para qué intervalo de x la ganancia mensual excede los \$2500?

De modo que, para alcanzar la meta requerida, el número de unidades producidas y vendidas por mes debe estar entre 22.2 y 42.8, inclusive.

EJEMPLO 6 ***(Decisión de precios)*** Un peluquero tiene un promedio de 120 clientes semanales a un costo actual de \$8 por corte de cabello. Por cada incremento de 75¢ en el precio, el peluquero perderá 10 clientes. ¿Cuál es el precio máximo que puede cobrarse de modo que los ingresos semanales no sean menores que los actuales?

Solución Sea x el número de incrementos de 75¢ por encima de \$8. Entonces el precio por corte de cabello es $(8 + 0.75x)$ dólares, y el número de clientes será de

Respuesta $30 < x < 35$

$(120 - 10x)$ por semana. De modo que

$$\begin{aligned}\text{Ingresos totales semanales} &= \text{Número de clientes} \times \text{Precio por corte}\\ &= (120 - 10x) \times (8 + 0.75x)\end{aligned}$$

Los ingresos por los 120 clientes actuales son $120 \times \$8 = \$960$. Por tanto, los nuevos ingresos deben ser al menos \$960:

$$(120 - 10x)(8 + 0.75x) \geq 960$$

Simplificamos:

$$\begin{aligned}960 + 10x - 7.5x^2 &\geq 960\\ 10x - 7.5x^2 &\geq 0\end{aligned}$$

La ecuación correspondiente es $10x - 7.5x^2 = 0$, cuyas soluciones son $x = 0$ y $\frac{4}{3}$. En los tres intervalos $x < 0$, $0 < x < \frac{4}{3}$ y $x > \frac{4}{3}$ seleccionamos los puntos de prueba -1, 1 y 2, respectivamente. Encontramos que $10x - 7.5x^2 < 0$ cuando $x = -1$ o 2, pero $10x - 7.5x^2 > 0$ cuando $x = 1$. Por tanto, la solución de la desigualdad es el intervalo $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$. Esto es, el precio de un corte de cabello debe estar entre \$8 y $\$(8 + 0.75 \times \frac{4}{3}) = \$9.00$. El precio máximo que puede cobrarse es \$9.00.

EJERCICIOS 3-3

(1-22) Resuelva las siguientes desigualdades.

1. $(x - 2)(x - 5) < 0$

2. $(x + 1)(x - 3) \leq 0$

3. $(2x - 5)(x + 3) \geq 0$

4. $(3x - 1)(x + 2) > 0$

5. $x^2 - 7x + 12 \leq 0$

6. $9x > x^2 + 14$

7. $x(x + 1) < 2$

8. $x(x - 2) \geq 3$

9. $y(2y + 1) > 6$

10. $3y^2 \geq 4 - 11y$

11. $(x + 2)(x - 3) > 2 - x$

12. $(2x + 1)(x - 3) < 9 + (x + 1)(x - 4)$

13. $x^2 \geq 4$

14. $9x^2 < 16$

15. $x^2 + 3 > 0$

16. $x^2 + 1 \leq 0$

17. $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

18. $x^2 + 4 \leq 4x$

19. $x^2 + 2x + 1 > 0$

20. $x^2 + 9 \geq 6x$

21. $x^2 + 13 < 6x$

22. $x^2 + 7 > 4x$

23. $(x - 2)^2 + 5 \geq 0$

24. $x^2 + 2x + 4 < 0$

25. $(2x + 3)(x - 3) > (x - 1)(3x + 2)$

26. $(1 - 3x)(x + 2) > (3 - 2x)(x + 3)$

27. *(Ingresos del fabricante)* Al precio de p por unidad, x unidades de cierto artículo pueden venderse al mes en el mercado, con $p = 600 - 5x$. ¿Cuántas unidades deberán venderse cada mes con objeto de obtener ingresos por lo menos de \$18,000?

28. *(Ingresos del fabricante)* Un fabricante puede vender x unidades de un producto cada semana al precio de p dólares por unidad, en donde $p = 200 - x$. ¿Qué número de unidades deberá venderse a la semana para obtener ingresos mínimos por \$9900?

29. *(Decisiones de producción)* En el ejercicio 27, si cuesta $(800 + 75x)$ dólares producir x unidades, ¿cuántas unidades deberán producirse y venderse cada mes con objeto de obtener una utilidad de al menos \$5500?

30. *(Decisiones sobre fijación de precios)* En el ejercicio 28, si cuesta $(2800 + 45x)$ dólares producir x unidades, ¿a qué precio p deberá venderse cada unidad para generar una utilidad semanal de por lo menos \$3200?

31. *(Utilidades)* Un fabricante puede vender todas las unidades de un producto a \$25 cada una. El costo C (en dólares) de producir x unidades cada semana está dado por $C = 3000 + 20x - 0.1x^2$. ¿Cuántas unidades deberán producirse y venderse a la semana para obtener alguna utilidad?

32. *(Ingresos del editor)* Un editor puede vender 12,000 ejemplares de un libro al precio de \$25 cada uno. Por cada dólar de incremento en el precio, las ventas bajan en 400 ejemplares. ¿Qué precio máximo deberá fijarse a cada ejemplar con objeto de lograr ingresos por lo menos de \$300,000?

33. *(Agricultura)* Un granjero desea delimitar un terreno rectangular y tiene 200 yardas de cerca disponible. Encuentre las dimensiones posibles del terreno si su área debe ser de al menos 2100 yardas cuadradas.

34. Un lado de un campo rectangular está limitado por un río. Un granjero tiene 100 yardas de cerca y quiere cubrir los otros tres lados del campo. Si quiere encerrar un área de al menos 800 yardas cuadradas, ¿cuáles son los posibles valores para la longitud del campo a lo largo del río?

35. Una caja abierta se fabrica de una hoja rectangular metálica de 16 por 14 pies, cortando cuadrados iguales de cada esquina y doblando hacia arriba los lados. Si el área de la base de la caja es al menos de 80 pies cuadrados, ¿cuál es la máxima altura posible de la caja?

36. Una hoja rectangular de cartón es de 16 por 10 pulgadas. Se cortan cuadrados iguales de cada esquina y los lados se doblan hacia arriba para formar una caja abierta. ¿Cuál es la altura máxima de esta, caja si la base tiene un área de al menos 72 pulgadas cuadradas?

37. *(Conservación)* En cierto estanque se crían peces. Si se introducen n de ellos allí, se sabe que la ganancia de peso promedio de cada pez es de $(600 - 3n)$ gramos. Determine las restricciones de n, si la ganancia total en peso de todos los peces debe ser mayor que 28,800 gramos.

38. *(Inversiones)* Un accionista invierte \$100 a un interés anual del R por ciento y otros \$100 al $2R$ por ciento anual. Si el valor de las dos inversiones debe ser de al menos \$224.80 después de 2 años, ¿qué restricciones deben establecerse sobre R?

39. *(Política de fijación de precios)* Un supermercado se encuentra con grandes existencias de manzanas que debe vender rápidamente. El gerente sabe que si las manzanas se ofrecen a p centavos por libra, venderá x libras, con $x = 1000 - 20p$. ¿Qué precio deberá fijar con el fin de obtener ingresos por lo menos de \$120?

40. *(Decisiones sobre fijación de precios)* Un peluquero atiende en promedio a 120 clientes a la semana cobrándoles \$4 por corte. Por cada incremento de 50¢ en el precio, el peluquero pierde 8 clientes. ¿Qué precio máximo deberá fijar para obtener ingresos semanales de al menos \$520?

■ 3-4 VALORES ABSOLUTOS

Si x es un número real, entonces el **valor absoluto** de x, denotado por $|x|$, se define por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

☛ **16.** Evalúe *a*) $-|-5|$
b) $|2 - 3 - 4|$
c) $|2| + |-3| - |4|$

Por ejemplo, $|5| = 5$, $|-3| = -(-3) = 3$ y $|0| = 0$. ☛ **16**

De la definición, es claro que *el valor absoluto de un número siempre es un número real no negativo*; es decir,

$$|x| \geq 0$$

El valor absoluto de x es una medida del "tamaño" de x sin tener en cuenta que x sea negativo o positivo.

EJEMPLO 1 Resuelva para x.

$$|2x - 3| = 5$$

Respuesta *a*) -5 *b*) 5 *c*) 1

Solución De acuerdo con la definición de valor absoluto, se satisface la ecuación dada si

$$2x - 3 = 5 \quad \text{o bien} \quad 2x - 3 = -5$$

porque en cualesquiera de los dos casos, el valor absoluto de $2x - 3$ es 5. Si $2x - 3 = 5$, entonces $2x = 3 + 5 = 8$ y así, $x = 4$. De manera similar, si $2x - 3 = -5$, entonces $x = -1$. En consecuencia, hay dos valores de x, $x = 4$ y $x = -1$, que satisfacen la ecuación dada.

EJEMPLO 2 Resuelva para x.

$$|3x - 2| = |2x + 7|$$

Solución La ecuación se satisface si

$$3x - 2 = 2x + 7 \quad \text{o bien} \quad 3x - 2 = -(2x + 7)$$

Resolviendo estas dos ecuaciones por separado, obtenemos $x = 9$ y $x = -1$. ☛ **17**

☛ **17.** Resuelva para x:
a) $|x + 1| = 2$
b) $|x - 1| = |3 - 2x|$
c) $|x - 1| = (3 - 2x)$

De los ejemplos 1 y 2, es claro que tenemos las siguientes reglas generales para resolver ecuaciones en que aparecen valores absolutos.

Si $|a| = b$, donde $b \geq 0$, entonces $a = b$ o bien $a = -b$
Si $|a| = |b|$, entonces $a = b$ o bien $a = -b$

Observación El símbolo $\sqrt{a}$ *denota la raíz cuadrada no negativa del número real a* ($a \geq 0$). Por ejemplo, $\sqrt{9} = 3$. La raíz cuadrada negativa de 9 se denota mediante $-\sqrt{9}$. Usando el símbolo de radical, podemos dar la siguiente definición alternativa de valor absoluto.

$$\boxed{|x| = \sqrt{x^2}}$$

Por ejemplo, $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$, $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$ y $\sqrt{(x - 3)^2} = |x - 3|$.

Podemos interpretar $|x|$ geométricamente. (Véase la figura 11). Los números 3 y 8 sobre la recta numérica están separados 5 unidades. También $|8 - 3| = |5| = 5$ y $|3 - 8| = |-5| = 5$. En consecuencia, $|8 - 3| = |3 - 8|$ da la distancia entre los puntos 3 y 8 de la recta numérica. En general, podemos interpretar $|x - c| = |c - x|$ como la distancia entre los puntos x y c situados sobre la recta numérica, sin prestar atención a la dirección. Por ejemplo, la ecuación $|x - 2| = 5$

Respuesta *a*) -3 o 1
b) $\frac{4}{3}$ o 2
c) $\frac{4}{3}$ (si $x = 2$, el lado derecho es negativo)

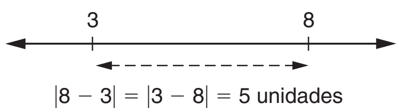


FIGURA 11

establece que la distancia entre x y 2 sobre la recta numérica es 5 unidades, sin importar la dirección. Por tanto, x puede ser $2 + 5 = 7$ o $2 - 5 = -3$, como se aprecia en la figura 12.

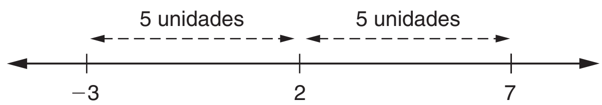


FIGURA 12

Dado que $|x| = |x - 0|$, $|x|$ representa la distancia del punto x sobre el eje real al origen O, sin importar la dirección. (Véase la figura 12). También, dado que la distancia entre O y x es igual a la distancia entre O y $-x$, se sigue que:

$$\boxed{|x| = |-x|}$$

Por ejemplo, $|7| = |-7| = 7$.

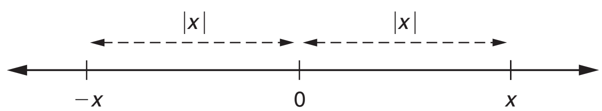


FIGURA 13

En el ejemplo 3 varios enunciados se reexpresan en términos de valores absolutos.

EJEMPLO 3

a) x está a una distancia de 3 unidades del 5: $|x - 5| = 3$

b) x está a menos de 7 unidades del 4: $|x - 4| < 7$

c) x está al menos a 7 unidades del -3: $|x - (-3)| \geq 7$ o $|x + 3| \geq 7$

d) x se encuentra estrictamente dentro de un radio de 3 unidades del 7: $|x - 7| < 3$

e) x está dentro de c unidades de a: $|x - a| \leq c$. ☛ **18**

☛ **18.** Exprese lo siguiente utilizando valores absolutos:
a) x está a lo más a 4 unidades del 3
b) $5 - x$ está 4 unidades alejado de x

Consideremos ahora algunas desigualdades que incluyen valores absolutos. La desigualdad $|x| < 5$ implica que la distancia entre x y el origen es menor que 5 unidades. Dado que x puede estar a la derecha o a la izquierda del origen, x está entre -5 y 5 o $-5 < x < 5$. (Véase la figura 14). De manera similar, $|x| > 5$ implica que x está a más de 5 unidades del origen (a la derecha o a la izquierda); es decir, $x < -5$ o $x > 5$. (Véase la figura 15). Este resultado se generaliza en el teorema siguiente:

Respuesta *a*) $|x - 3| \leq 4$
b) $|5 - 2x| = 4$

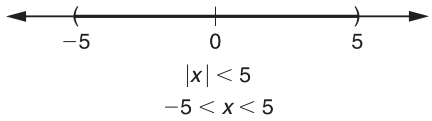


FIGURA 14

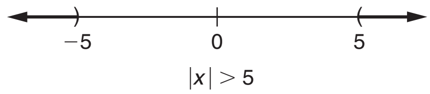


FIGURA 15

TEOREMA 1 Si $a > 0$, entonces,

$\|x\| < a$ si y sólo si $-a < x < a$	(1)
$\|x\| > a$ si y sólo si $x > a$ o bien $x < -a$	(2)

Las figuras 16 y 17 se refieren al teorema 1.

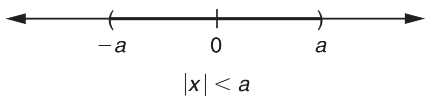


FIGURA 16

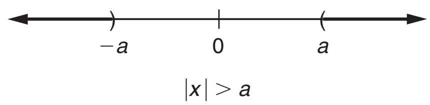


FIGURA 17

EJEMPLO 4 Resuelva $|2x - 3| < 5$ para x y exprese el resultado en términos de intervalos.

Solución Usando la proposición (1) del teorema 1, la desigualdad dada implica que

$$-5 < 2x - 3 < 5$$

Sumando 3 a cada lado de la doble desigualdad y simplificando, obtenemos

$$-5 + 3 < 2x - 3 + 3 < 5 + 3$$
$$-2 < 2x < 8$$

Enseguida dividimos todo entre 2:

$$-1 < x < 4$$

En consecuencia, la solución consta de todos los números reales x situados en el intervalo abierto $(-1, 4)$. (Véase la figura 18).

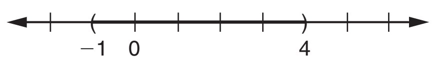


FIGURA 18

EJEMPLO 5 Resuelva $|2 - 3x| > 7$ para x y exprese el resultado en notación de intervalos.

Solución Utilizando la proposición (2) del teorema 1, la desigualdad dada implica que

$$2 - 3x > 7 \quad \text{o bien} \quad 2 - 3x < -7$$

Considerando la primera desigualdad, tenemos que

$$2 - 3x > 7$$

Restando 2 a ambos lados y dividiendo entre -3 (y cambiando el sentido de la desigualdad):

$$x < -\tfrac{5}{3}$$

De manera similar, resolviendo la segunda desigualdad,

$$x > 3$$

Así, $|2 - 3x| > 7$ es equivalente a

$$x < -\tfrac{5}{3} \quad \text{o bien} \quad x > 3$$

Por tanto, la solución consta de todos los números reales que *no* están en el intervalo cerrado $[-\frac{5}{3},\ 3]$. (Véase la figura 19).

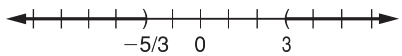


FIGURA 19

EJEMPLO 6 Resuelva $|2x - 3| + 5 \leq 0$ para x.

Solución La desigualdad dada se puede reescribir como

$$|2x - 3| \leq -5$$

Pero $|2x - 3|$ nunca puede ser negativo, de modo que no existen valores de x para los cuales sea verdadera la desigualdad dada. Así no existe solución. ☛ **19**

☛ **19.** Resuelva las desigualdades.
a) $|1 - x| < 4$
b) $|7 - 4x| \geq 3$
c) $|x - 1| + |x + 1| < 0$

EJEMPLO 7 Resuelva la desigualdad $|3x - 5| \leq x + 1$

Solución Si $(x + 1) < 0$, allí claramente no habría solución, ya que el valor absoluto del lado izquierdo no puede ser menor que un número negativo. Así el conjunto solución está restringido de inmediato a $x \geq -1$.

Si $x + 1 \geq 0$, podemos utilizar el teorema 1 para expresar la desigualdad dada en la forma

$$-(x + 1) \leq 3x - 5 \leq (x + 1)$$

La mitad izquierda de esta desigualdad doble, $-(x + 1) \leq 3x - 5$, conduce a $x \geq 1$. La mitad derecha, $3x - 5 \leq x + 1$, lleva a $x \leq 3$. Deben satisfacerse las tres condiciones, $x \geq 1$, $x \leq 3$ y $x \geq -1$. Así, el conjunto solución es $1 \leq x \leq 3$ o el intervalo cerrado [1, 3].

Respuesta *a*) $-3 < x < 5$
b) $x \leq 1$ o $x \geq \frac{5}{2}$
c) no hay solución

Concluimos esta sección estableciendo dos propiedades básicas del valor absoluto. Si a y b son dos números reales, entonces

$$|ab| = |a| \cdot |b| \tag{3}$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0). \tag{4}$$

EJEMPLO 8

a) $|(-3)(5)| = |-3|\,|5| = (3)(5) = 15$

b) $\left|\dfrac{x-2}{1+x}\right| = \dfrac{|x-2|}{|1+x|} \qquad (x \neq -1)$

c) $\left|\dfrac{x-7}{-3}\right| = \dfrac{|x-7|}{|-3|} = \dfrac{|x-7|}{3}$

Las ecuaciones (3) y (4) se deducen con facilidad del hecho que para cualquier número real x, $|x| = \sqrt{x^2}$. Por ejemplo, la ecuación (3) se deduce como sigue:

$$\begin{aligned}|ab| &= \sqrt{(ab)^2}\\ &= \sqrt{a^2b^2}\\ &= \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} \qquad \text{(usando una propiedad de los radicales)}\\ &= |a| \cdot |b|\end{aligned}$$

EJERCICIOS 3-4

(1-4) Evalúe.

1. $\sqrt{2}|-2| + 5|-\sqrt{2}|$

2. $|\sqrt{3}-2| + |\sqrt{3}-1|$

3. $|\pi - 5| - |-2|$

4. $|3-\sqrt{5}| - |\sqrt{5}-2|$

(5-18) Resuelva las ecuaciones siguientes para x.

5. $|3-7x| = 4$

6. $|2x+5| = 7$

7. $|x+2| = |3-x|$

8. $\left|\dfrac{2x+1}{3}\right| = |3x-7|$

9. $|3x-2| = 4-x$

10. $|x+3| = 5-x$

11. $|x+3| = x-5$

12. $|3x-2| = x-4$

13. $|x-3| + 7 = 0$

14. $|2x+1| + |3x-2 = 0$

15. $\left|\dfrac{x-3}{3x-5}\right| = 6$

16. $\left|\dfrac{-5x-2}{x+3}\right| = 5$

17. $\left|\dfrac{1}{x} - 3\right| = 4$

18. $\left|3 - \dfrac{1}{x-2}\right| = 7$

(19-36) Resuelva las desigualdades siguientes y exprese la solución en forma de intervalos, si es posible.

19. $|3x+7| < 4$

20. $|2x-6| \leq 3$

21. $|2-5x| \geq 3$

22. $|3-4x| < \frac{1}{2}$

23. $5 + 2|3-2x| < 7$

24. $5 - 2|3-2x| \leq 1$

25. $7 + |3x-5| \leq 5$

26. $|3x-13| + 6 \geq 0$

27. $|x+2| + |2x-1| \geq 0$

28. $|3x-2| + |2x-7| < 0$

29. $\left|\dfrac{5-x}{3}\right| + 4 \leq 2$

30. $\left|\dfrac{2-5x}{4}\right| \geq 3$

31. $|5-2x| + 5 \geq 0$

32. $|2x-3| + |7+3x| < 0$

***33.** $|2x-3| < x-4$

***34.** $|x-2| < 3-x$

***35.** $|x-3| < x-2$

***36.** $|3x-2| > 2x-3$

(37-38) Exprese las siguientes afirmaciones en términos de la notación de intervalos.

37. *a*) x está a menos de 5 unidades de 3.

b) y está a lo más a 4 unidades de 7.

c) t está a una distancia de 3 unidades de 5.

d) z está estrictamente a menos de σ (sigma) unidades de μ (mu).

e) x difiere de 4 en más de 3 unidades.

f) $\bar{x}$ difiere de μ por más de 3 unidades.

38. *a*) x está al menos a 4 unidades de -5.

b) y está a lo más a 7 unidades de 3.

c) x está a menos de 3 unidades de 9.

d) x es menor que 4 y mayor que -4.

e) x es mayor que 3 o menor que -3.

f) $\bar{x}$ excede a μ en más de 2 unidades.

g) y es menor que 7 por más de 3 unidades.

h) x difiere de y por más de 5 unidades.

39. *(Acciones)* De acuerdo con una predicción de una revista financiera, el precio p de las acciones de la Bell Co no cambiarán de su valor actual de \$22 por más de \$5. Utilice la notación de valor absoluto para expresar esta predicción como una desigualdad.

40. *(Mercado de viviendas)* De acuerdo con una encuesta de bienes raíces, el precio (en dólares) de una casa promedio en Vancouver el próximo año estará dado por

$$|x - 210{,}000| < 30{,}000$$

Determine el precio más alto y el más bajo de la casa para el año próximo.

REPASO DEL CAPÍTULO 3

Términos, símbolos y conceptos importantes

3.1 Los símbolos de desigualdad $<, >, \leq, \geq$. Desigualdad estricta. Desigualdad doble.
Conjunto, miembro o elemento de un conjunto. Conjunto finito, conjunto infinito.
Conjunto vacío
Método de enumeración, enumeración parcial.
Método por comprensión o método de la regla; la notación $\{x \mid x \text{ satisface la regla}\}$.
Subconjunto, subconjunto propio. Igualdad de dos conjuntos.
Intervalos, puntos extremos. Intervalos cerrados, abiertos y semiabiertos.
Intervalos infinitos y semiinfinitos.
Notaciones equivalentes, tales como: $\{x|a < x \leq b\}$, $(a, b]$, o bien sobre la recta numérica,

o


3.2 Desigualdad lineal, conjunto solución de un desigualdad.
Las reglas de suma y multiplicación para la manipulación de desigualdades.
Procedimiento para la resolución de una desigualdad lineal o una desigualdad lineal doble.

3.3 Desigualdad cuadrática.

Procedimiento paso a paso para la resolución de una desigualdad cuadrática.

3.4 Valor absoluto de un número real y su interpretación geométrica.

Fórmulas

Si $|a| = b$ y $b > 0$, entonces $a = b$ o $a = -b$. Si $|a| = |b|$, entonces $a = b$ o $a = -b$.

Si $|a| < b$ y $b > 0$, entonces $-b < a < b$. Si $|a| > b$, entonces $a < -b$ o bien $a > b$.

$$|a| = \sqrt{a^2}; \quad |ab| = |a| \cdot |b|; \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad (b \neq 0)$$

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 3

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las proposiciones siguientes. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) Si $x > 0$ entonces $x^2 > x$

b) Al sumar en ambos lados de una desigualdad el mismo número negativo, la desigualdad cambia su sentido.

c) Cuando se multiplican ambos lados de una desigualdad por el mismo número positivo, la desigualdad preserva su sentido.

d) Si $|a| = |b|$, entonces $a = b$

e) El valor absoluto de todo número real siempre es un número positivo.

f) Si $|x^2| = |y^2|$ entonces $x = y$ o bien $x = -y$

g) La ecuación $|x - 1| + 1 = 0$ no tiene solución.

h) La ecuación $|x + 1| = x + 1$ se satisface para cualquier número real x.

i) Si $0 > x > y$ entonces $|x| > |y|$

j) Si $|x| < |y|$ entonces $x^2 < y^2$

k) Una desigualdad cuadrática tiene dos soluciones, una solución o no tiene soluciones.

l) $|x + y| <= |x| + |y|$, para cualesquiera números reales x y y.

m) Si $x, y > 0$ y $x > y$, entonces $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$

(2-40) Resuelva las desigualdades siguientes.

2. $2(x - 3) + 3(x + 5) < 9(2x - 5) + 2$

3. $3x + 2(x - 1) > 6x - 9$

4. $3(2x + 3) + 5(2x - 3) \leq 5(5x - 3)$

5. $x^2 - 5x + 6 < 0$

6. $4(x + 1) \geq (3x + 1) + 2(9 - 2x)$

7. $x^2 \geq 3 - 2x$

8. $3x^2 \geq 24x - 48$

9. $2(x^2 + 5x) - 20 > (1 - x)^2 + (1 + x)^2 - 2$

***10.** $1 - \frac{14}{x} \leq 20 - 3x$

***11.** $\frac{x}{6} \leq \frac{3}{x} + \frac{1}{2}$

12. $\frac{1}{x} > x$

13. $(x + 1)^2 < (x + 2)^2 - 2(x + 1)$

***14.** $\frac{12}{x - 1} > 2(x + 6)$

15. $(3x - 2) + 1 \leq (6x - 1)(6 - x) - 5(x - 2)$

16. $21x + 30 \geq 45x - 26$

17. $x^2 \leq 3x - 2$

***18.** $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 \geq (x + 1)^2$

***19.** $(x - 1)(x + 3)(2x - 5) \leq 0$

20. $4x^2 \leq 12x - 9$

21. $\frac{1}{x - 3} < \frac{1}{6}$

22. $\frac{1}{x + 1} > \frac{1}{12}$

23. $\frac{x}{3} + \frac{x - 5}{7} + \frac{8x}{21} \leq 1$

24. $5x^2 - 6 \leq 13x$

25. $(x + 2)(x - 3) > 2 + (x - 1)(x - 2)$

***26.** $\frac{x - 2}{7} \geq \frac{x}{7} - \frac{8 - x}{x + 1}$

27. $6x^2 < x + 1$

28. $(x + 1)(1 - 2x) \leq (2x + 7)(19 + x)$

29. $(x - 1)^2 + 1 \leq 0$

30. $(1 + 2x)^2 + (1 + x)(1 - x) \geq 3x^2 + 2x + 4$

31. $|x - 2| + 5 < 8$

32. $|2x - 1| - 4 \geq 0$

33. $|1 - 7x| + 3 \geq 0$

34. $|2x - 3| + |5x + 1| < 0$

35. $|7x - 2| + |5x - 1| \leq 0$

36. $|x - 1| > |1 - x|$

37. $\frac{3}{|x - 8|} \leq 1$

38. $\frac{|2x + 5|}{8} \leq 3$

39. $\frac{|7 - 3x|}{2} \geq 15$

40. $9 - |3x - 7| < 0$

(41-50) Resuelva las siguientes ecuaciones.

41. $|7x + 2| + 5 = 21$

42. $|2x| + |x| = 12$

*43. $|x^2 - 3x| = 2x$

44. $|x^2 - 3| = 6$

45. $|1 - x^2| = 24$

46. $|5x - 1| + |2x - 8| = 0$

47. $|3x - 4| - 7|x + 2| = 0$

48. $|2 - 6x| + |9x - 3| = 0$

*49. $|3x - 5| = 1 - x$

*50. $|2x - 1| = 3x$

51. *(Decisión sobre la renta de un teléfomo celular)* Adriana Rojas va a contratar los servicios de telefonía celular, después de analizar diversos planes, su decisión queda entre los dos siguientes. El plan A, con una renta mensual de 10 dólares mensuales más \$0.20 por cada minuto de tiempo aire. El plan B, con una renta mensual de \$20 más \$0.12 por cada minuto de tiempo aire. Determine el número de minutos mensuales que debe utilizar Adriana para que el plan B sea más barato que el plan A.

52. *(Ingresos del fabricante)* Daniela Espejel puede vender x paquetes de software cada semana al precio de p dólares cada uno, en donde $p = 70 - x$. ¿Cuántos paquetes debe vender Daniela para obtener ingresos mínimos de \$1200 a la semana?

53. *(Ingresos del fabricante)* Manuel Zamora, gerente de una distribuidora de televisores, sabe que a un precio de p dólares por unidad de cierto modelo pueden venderse x unidades al mes y la relación entre precio y las unidades vendidas es $p = 1000 - 2x$. ¿Cuántas unidades deben vender Manuel para que los ingresos mensuales sean de al menos \$45,000? El precio de ese modelo de televisor no puede ser menor a \$300.

54. *(Decisiones de producción)* En el ejercicio 53, si cuesta $(6000 + 300x)$ dólares producir x televisores al mes, ¿cuántas unidades deberán producirse y venderse cada mes para que la utilidad mensual sea al menos \$13,200? (Recuerde que el precio de ese modelo de televisor no puede ser menor a \$300).

55. *(Fijación de precios)* En un terreno de cultivo familiar, Dina Vogt tuvo una cosecha de 500 kilogramos de fresas, pero debe venderlas rápidamente, pues los costos de almacenamiento son muy altos. Además, sabe que el precio que fije debe ser menor a \$20. Por otro lado, si las fresas se ofrecen a p pesos por kilogramo, venderá x kilogramos, con $x = 500 - 8p$. ¿Qué precio debe fijar Dina con el propósito de obtener ingresos de al menos \$5700?

56. *(Precio de automóviles)* De acuerdo con la revista *El mundo de la velocidad*, el año próximo el precio, p en dólares, de un automóvil compacto estará dado por

$$|p - 12000| \leq 1500$$

Determine el precio más alto y el más bajo que tendrá un automóvil compacto el próximo año, de acuerdo con esa.

57. *(Producción y utilidades)* Jorge Iñigo elabora rompecabezas de madera; puede vender todos los que produce al precio de \$12 por unidad. Los costos de materia prima y mano de obra por unidad son de \$6 y los costos fijos semanales son \$1000. ¿Cuántos rompecabezas deberá producir si desea obtener utilidades semanales de al menos \$500?

58. *(Decisión sobre inversiones)* Rubén Nava invertirá un total de \$55,000. Puede elegir entre bonos emitidos por el estado, que ofrecen una tasa de interés de 6% anual, o bien, con un riesgo mayor, bonos hipotecarios con una tasa de interés de 9% anual. ¿Qué cantidad máxima debe invertir en los bonos del estado, si desea recibir un ingreso anual, por concepto de intereses de al menos \$3900?

59. *(Decisión sobre inversiones)* Con respecto al ejercicio anterior, si Rubén puede comprar una obra de arte en \$55,000 y considera que es posible venderla dentro de un año en \$59,200. Ahora, ¿qué cantidad máxima debe invertir en los bonos del estado, si desea recibir un mayor ingreso anual, por concepto de intereses que la ganancia con la venta de la obra de arte?

60. (Decisión sobre fijación de precios) En una clínica veterinaria, un servicio que se ofrece es el aseo de perros. En promedio se atiende a 100 a la semana, cobrándoles \$20 a cada uno. Por cada incremento de \$1 en el precio, la clínica pierde 2 clientes. ¿Cuál es el menor precio que deberá fijarse para obtener ingresos semanales de al menos \$2250?

CASO DE ESTUDIO

¿COMPRAR O RENTAR?

Retomando el problema que aparece al inicio del capítulo, en el que se debe determinar el precio por kilómetro que la empresa estaría dispuesta a pagar para adoptar el plan B (renta de un automóvil) en vez del plan A (compra de un automóvil), a continuación se plantea el problema. Si se denota con p al precio por kilómetro recorrido, entonces, cada mes el costo de rentar el automóvil sería de

$$3000 + 2000p$$

Puesto que son 24 meses, el costo total de rentar el automóvil sería

(Costo del seguro) + (Costo de renta y uso del automóvil durante 36 meses),

es decir,

$$5000 + 24 \times (3000 + 2000p)$$

El costo en el plan A, era

(Pago inicial) + (24 mensualidades de \$4700 cada una) − (Valor de rescate),

por lo que el costo del plan A sería de

$$5000 + (24 \times 4700) - 70,000 = \$103,400$$

Ahora, lo que se necesita determinar es el precio, p, para el cual el costo del plan B sea menor o igual al costo con el plan A, es decir,

$$5000 + 24 \times (3000 + 2000p) \leq 103,400$$

Con los métodos estudiados en este capítulo es fácil determinar que la solución es $p \leq 0.55$. Quiere decir que un precio de \$0.55 por kilómetro hace que los dos planes tengan el mismo costo, pero con un precio por kilómetro inferior a \$0.55, el plan B es superior al plan A.

Responda las siguientes preguntas, tome como base el planteamiento original y sólo cambie lo que se indica en cada caso:

i. ¿A lo más, cuántos kilómetros mensuales, en promedio, debe viajar el representante de ventas para que el plan B sea mejor que el plan A?

ii. Después de negociar con el distribuidor de automóviles, la empresa logra que el pago mensual en la compra del automóvil sea de \$4400. ¿A lo más cuántos kilómetros debe recorrer el representante de ventas, para que el plan B sea mejor que el plan A?

Una consideración que en este momento no se tomó en cuenta es que el valor del dinero cambia con el tiempo, en capítulo 7 se tratará este tema, *matemáticas financieras*. Esto es muy importante para la toma de decisiones, pues no tiene el mismo valor desembolsar, por ejemplo, \$60,000 hoy, que \$5000 cada mes durante los siguientes 12 meses. Como se comentó aprenderá más de este tema posteriormente en este libro.

CAPÍTULO 4

Líneas rectas

El problema de la señora Benítez

Con frecuencia nos preguntamos, ¿para qué me puede servir lo que estudiamos en matemáticas? En particular, ¿hay aplicaciones "reales" de la línea recta? Para muestra baste el siguiente ejemplo: consideremos una situación a la que se enfrentan algunas personas cuando tienen que decidir acerca de elegir un trabajo, o distintas posibilidades de pago de su salario mensual.

La señora Lucy Benítez se dedica a la venta de paquetes de cómputo y tiene que elegir entre las siguientes opciones:

1. Sueldo base mensual de $4000 más 4% de comisión sobre las ventas realizadas en el mes.
2. Sueldo mensual de $2500 más 5% de comisión sobre las ventas realizadas durante el mes.
3. Sueldo base mensual de $4500 más 2.6% de comisión sobre las ventas realizadas durante el mes.
4. Comisión de 6% sobre las ventas realizadas durante el mes.

Cada paquete de cómputo tiene un valor de $6,000.

Usted, ¿qué le recomendaría a la señora Benítez? ¿Por qué? En este capítulo se estudiará la línea recta y algunas aplicaciones; al final del capítulo resolveremos este problema y lo podrá comparar contra la solución que haya obtenido.

TEMARIO

■ 4-1 COORDENADAS CARTESIANAS

Una relación entre dos variables por lo regular se expresa mediante de una ecuación algebraica que contiene las dos variables. Por ejemplo, si x es la longitud (en centímetros) del lado de un cuadrado y si y es su área (en centímetros cuadrados), entonces la relación entre x y y se expresa por la ecuación $y = x^2$. Para cada valor de x, el valor respectivo de y se obtiene elevando al cuadrado el valor de x.

Una ecuación algebraica de este tipo puede representarse en forma geométrica mediante una gráfica. A menudo es cierto que las características significativas de la relación se aprecian con mayor claridad en la gráfica que en la relación algebraica entre las variables. Al estar frente a una relación algebraica, es muy útil (en particular en las aplicaciones de matemáticas) desarrollar el hábito de preguntarnos qué forma tendría su gráfica.

Las gráficas se construyen utilizando las llamadas *coordenadas cartesianas*. Dibujamos dos rectas perpendiculares denominadas **ejes de coordenadas**, una horizontal y otra vertical, intersecándose en un punto O. La línea horizontal se denomina **eje *x***, la vertical, **eje *y*** y O es el **origen**. Un plano con tales ejes de coordenadas se denomina **plano cartesiano** o simplemente **plano *xy***.

Seleccionamos una unidad de longitud a lo largo de los dos ejes. (Por lo regular, las unidades de longitud sobre ambos ejes son las mismas, pero no es necesario que sean iguales). Partiendo del origen O que hace las veces de cero, marcamos escalas numéricas como se muestra en la figura 1. Los números positivos se disponen a la derecha de O, sobre el eje x y por encima de O a lo largo del eje y.

Consideremos cualquier punto P sobre el plano. Desde P, trazamos la perpendicular PM al eje x y la perpendicular PN al eje y, como se observa en la figura 1. Si el punto M representa al número x sobre el eje x y el punto N representa al punto y sobre el eje y, entonces x y y se denominan las **coordenadas cartesianas** del punto P. Escribimos estas dos coordenadas encerradas entre paréntesis, en el orden (x, y).

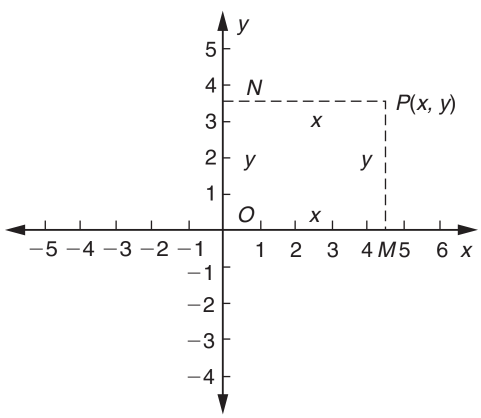


FIGURA 1

En esta forma, correspondiendo a cada punto P del plano, existe una única pareja de números reales (x, y), que son las coordenadas del punto. Y recíprocamente, observemos que a cada pareja de números reales (x, y) le corresponde un único punto en el plano. Esta representación de puntos en el plano por parejas de números reales se llama **sistema de coordenadas cartesianas**.

Si la pareja (x, y) representa al punto P en el plano, entonces x (el primer elemento) se llama la **abscisa** o **coordenada** x del punto P y y (el segundo elemento) se denomina la **ordenada** o **coordenada** y de P. La abscisa y la ordenada de P se conocen como las **coordenadas cartesianas o rectangulares** del punto P. La notación $P(x, y)$ se utiliza para denotar al punto P con coordenadas (x, y).

Las coordenadas del origen son (0, 0). Para cada punto del eje x, la coordenada y es cero; cada punto del eje y tiene coordenada x cero. En la figura 2 aparecen varias parejas de números reales y los puntos correspondientes. ☛ **1**

☛ **1.** Grafique los puntos $(-4, 0)$, $(0, 4)$, $(2, -1)$, $(-2, -1)$ y $(-3, 3)$

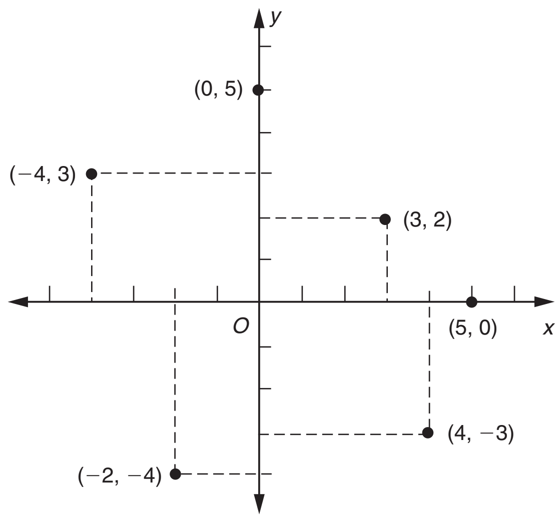
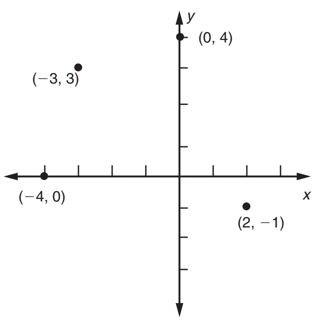


FIGURA 2

Respuesta



Los ejes de coordenadas dividen al plano xy en cuatro porciones, llamadas **cuadrantes**. Los cuadrantes se conocen como el *primero, segundo, tercero* y *cuarto*, como se observa en la figura 3.

$$(x, y) \text{ está en el primer cuadrante si } x > 0 \text{ y } y > 0$$

$$(x, y) \text{ está en el segundo cuadrante si } x < 0 \text{ y } y > 0$$

$$(x, y) \text{ está en el tercer cuadrante si } x < 0 \text{ y } y < 0$$

$$(x, y) \text{ está en el cuarto cuadrante si } x > 0 \text{ y } y < 0$$

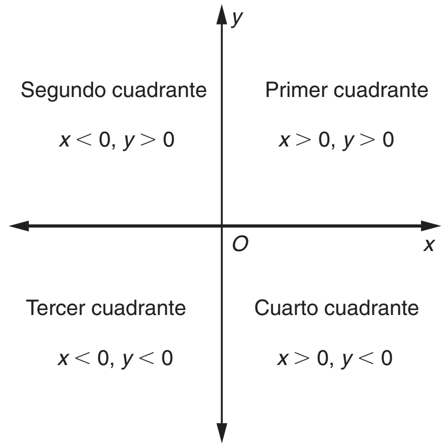


FIGURA 3

TEOREMA 1 (FÓRMULA DE LA DISTANCIA) Si $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera en el plano, entonces la distancia d entre P y Q está dada por

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Antes de probar esto, veamos si es válido para dos puntos situados sobre la misma línea horizontal. Sea P el punto (4, 3) y Q el punto (−2, 3). (Véase la figura 4). Entonces $y_2 - y_1 = 3 - 3 = 0$, mientras que $x_2 - x_1$, $-2 - 4 = -6$. En consecuencia,

$$d = \sqrt{(-6)^2 + 0^2} = 6$$

Nótese que cuando, $y_2 - y_1 = 0$,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$$

De manera similar, para dos puntos situados sobre la misma línea vertical, $d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|$

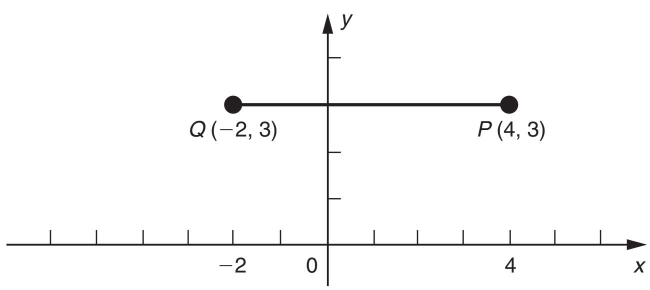


FIGURA 4

DEMOSTRACIÓN Si PM y QN son perpendiculares de los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ al eje x y PA y QB son perpendiculares al eje y, como se observa en la figura 5, entonces las coordenadas de los puntos M, N, A y B son las que se dan en esa mis-

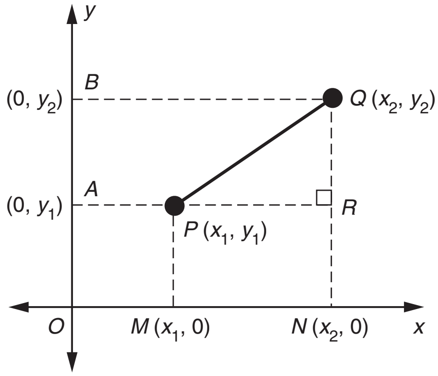


FIGURA 5

ma figura. Sea R el punto en que la línea PA corta la línea QN, de modo que PQR es un triángulo rectángulo con ángulo recto en R.

De la figura 5* tenemos que

$$PR = MN = ON - OM = x_2 - x_1$$

y también

$$RQ = AB = OB - OA = y_2 - y_1$$

Enseguida aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo PQR.

$$PQ^2 = PR^2 + RQ^2$$

o bien

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Extrayendo raíz cuadrada (la raíz cuadrada es no negativa dado que la distancia siempre es no negativa), tenemos

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1}$$

que prueba el resultado. La ecuación (1) se conoce como **fórmula de la distancia en el plano**.

EJEMPLO 1 Encuentre la distancia entre los puntos $A(-1, 3)$ y $B(4, 15)$.

---

* La figura 5 se dibujó con P y Q en el primer cuadrante. Las ecuaciones para PR y RQ se aplican para cualesquier cuadrantes donde estén situados los puntos. Sin embargo, en la figura 5, Q se dibujó a la derecha de P, de modo que $x_2 > x_1$ y $y_2 > y_1$. En el caso más general (cuando estas condiciones no se satisfacen) las distancias vertical y horizontal entre P y Q están dadas por $PR = |x_2 - x_1|$ y $RQ = |y_2 - y_1|$. Puede verse entonces que la ecuación (1) para d aún es válida en este caso general.

Solución Identificamos los dos puntos dados como

$$(-1, 3) = (x_1, y_1) \quad \text{y} \quad (4, 15) = (x_2, y_2)$$

Ahora utilizamos la fórmula de la distancia.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(4 - (-1))^2 + (15 - 3)^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \end{aligned}$$ ☛ **2**

☛ **2.** ¿Cuál es la distancia de $(-3, -2)$ a *a*) $(0, 2)$; *b*) $(1, 4)$?

Respuesta *a*) 5; *b*) $\sqrt{52}$

EJEMPLO 2 La abscisa de un punto es 7 y su distancia al punto $(1, -2)$ es 10. Determine la ordenada del punto.

Solución Sea P el punto cuya ordenada se requiere y A el punto $(1, -2)$. Sea y la ordenada del punto P. Entonces las coordenadas de P son $(7, y)$, dado que su abscisa se hizo igual a 7. Del enunciado del problema, tenemos que

$$PA = 10$$

Ahora, identificando los puntos P y A como

$$(7, y) = (x_1, y_1) \quad \text{y} \quad (1, -2) = (x_2, y_2)$$

y usando la fórmula de la distancia, tenemos

$$PA = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1 - 7)^2 + (-2 - y)^2}$$

o bien

$$10 = \sqrt{36 + (2 + y)^2}$$

de la ecuación (1). Enseguida elevamos ambos lados al cuadrado.

$$100 = 36 + (2 + y)^2 = 36 + 4 + 4y + y^2$$

Por tanto,

$$y^2 + 4y - 60 = 0$$

o bien

$$(y + 10)(y - 6) = 0$$

En consecuencia, una de las condiciones siguientes debe ser válida:

$$\begin{aligned} y + 10 &= 0 \quad \text{o bien} \quad & y - 6 &= 0 \\ y &= -10 & y &= 6 \end{aligned}$$

La ordenada del punto requerido P es 6 o -10. ☛ **3**

☛ **3.** Encuentre a si los puntos $(0, a)$ y $(-1, 1)$ están a la misma distancia de $(1, 2)$

Respuesta $a = 0$ o 4

DEFINICIÓN La **gráfica** de una ecuación con dos incógnitas, tales como x y y, es el conjunto de todos aquellos puntos cuyas coordenadas (x, y) satisfacen la ecuación.

Por ejemplo, consideremos la ecuación $2x - y - 3 = 0$. Uno de los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación es $(1, -1)$, dado que la ecuación se satisface cuando sustituimos $x = 1$ y $y = -1$. Otros puntos son $(0, -3)$ y $(2, 1)$. La gráfica de la ecuación se obtiene graficando estos puntos y otros que satisfagan la ecuación.

Dibujar la gráfica *exacta* de una ecuación con dos incógnitas, es por lo regular, una tarea imposible que requeriría graficar un número infinito de puntos. En la práctica, se elige un número suficiente de puntos que satisfagan la ecuación dada y que exhiban la naturaleza general de la gráfica. Estos puntos se grafican y se unen mediante una curva suave.

Cuando encontramos los puntos que satisfacen una ecuación determinada, a menudo conviene despejar una de las incógnitas de la ecuación en términos de la otra. Por ejemplo, si resolvemos la ecuación $2x - y - 3 = 0$ para y en términos de x, tenemos

$$y = 2x - 3$$

Ahora, si damos valores a x, podemos calcular los valores correspondientes para y. Digamos si $x = 1$, $y = 2(1) - 3 = -1$; si $x = 5$, $y = 10 - 3 = 7$; etcétera.

EJEMPLO 3 Dibuje la gráfica de la ecuación $2x - y - 3 = 0$.

Solución Resolviendo la ecuación dada para y, tenemos

$$y = 2x - 3$$

Los valores de y que corresponden a distintos valores de x se dan en la tabla 1. Graficando estos puntos, observamos que están situados sobre una línea recta. (Véase la figura 6). Esta línea es la gráfica de la ecuación dada.

TABLA 1

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5

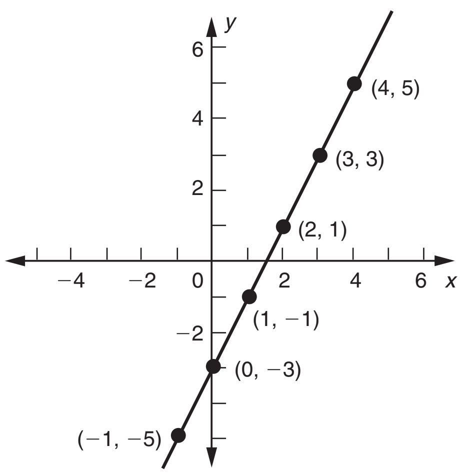


FIGURA 6

EJEMPLO 4 Dibuje la gráfica de la ecuación $y = 5 - x^2$

Solución Puesto que x aparece en la ecuación elevada a la segunda potencia y $(x)^2 = (-x)^2$, la tabla de los valores de x y de y puede abreviarse combinando valores positivos y negativos de x. (Véase la tabla 2).

TABLA 2

x	0	± 1	± 2	± 3
y	5	4	1	-4

☛ **4.** Grafique las ecuaciones $y = 1 - x$ y $y = \sqrt{1 - x}$

Graficamos estos puntos y los unimos mediante una curva suave, obteniendo la gráfica de la ecuación $y = 5 - x^2$ que se aprecia en la figura 7. ☛ **4**

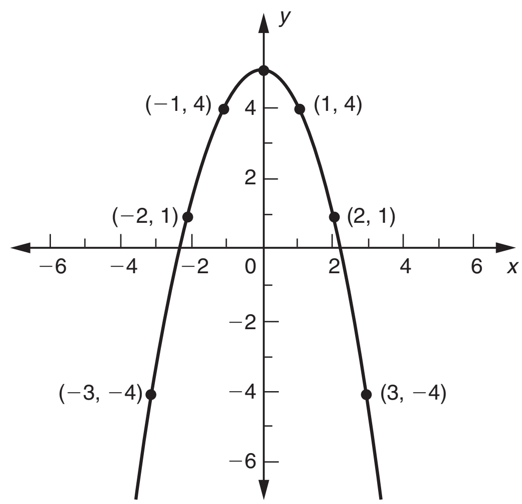
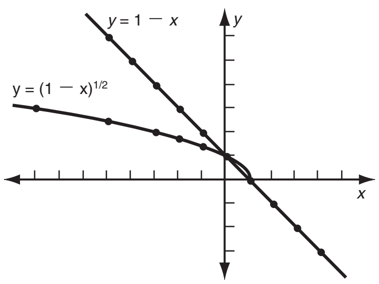


FIGURA 7

Respuesta

x	-8	-5	-3	-2	-1	0	1	2	4	6
$y = 1 - x$	9	6	4	3	2	1	0	-1	-3	-5
$y = \sqrt{1 - x}$	3	2.45	2	1.73	1.41	1	0	No definido		



EJEMPLO 5 ***(Demanda)*** Si un artículo se ofrece a la venta al precio p por unidad, la cantidad q demandada en el mercado está dada por la relación $3q + p = 10$. Dibuje la gráfica de esta relación.

Coloque q en lugar de x (eje horizontal) y p en lugar de y (eje vertical).

Solución En este caso, dado que ni el precio p ni la cantidad demandada q pueden ser negativos, sólo tiene interés práctico la porción de la gráfica situada en el primer cuadrante.

Resolviendo la ecuación para p, tenemos

$$p = 10 - 3q$$

En la tabla 3 se dan valores de p que corresponden a un número de diferentes valores de q. Por ejemplo, cuando el precio es 7, la cantidad demandada sólo es de una unidad. Cuando el precio se reduce a 4, en el mercado se demandan 2 unidades, etcétera.

TABLA 3

q	0	1	2	3
p	10	7	4	1

Graficando estos puntos, obtenemos la gráfica que aparece en la figura 8.

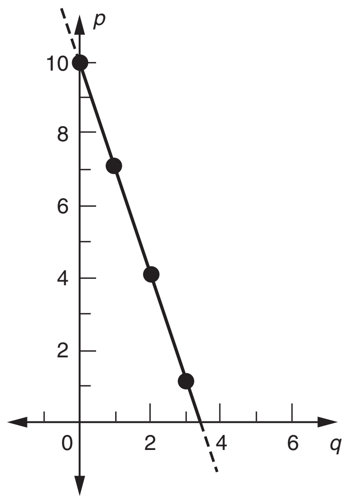


FIGURA 8

Obsérvese que la gráfica de nuevo es una línea recta, o más bien, la porción de una línea recta que está situada en el primer cuadrante.

EJERCICIOS 4-1

1. Grafique los puntos siguientes:

$(2, -5)$; $(-1, 4)$; $(0, 2)$; $(-3, -2)$; $(5, 0)$

Identifique cada punto con sus coordenadas.

2. Determine los cuadrantes en que están situados los puntos del ejercicio 1.

(3-6) Encuentre la distancia entre cada pareja de puntos.

3. $(4, -1)$ y $(2, 0)$

4. $(-3, 1)$ y $(-2, -3)$

5. $(\frac{1}{2}, 2)$ y $(-2, 1)$

6. $(a, 2)$ y $(b, 2)$

7. La ordenada de un punto es 6 y su distancia al punto $(-3, 2)$ es 5. Determine la abscisa del punto.

8. La abscisa de un punto es 2 y su distancia al punto $(3, -7)$ es $\sqrt{5}$. Encuentre la ordenada del punto.

9. Si P es el punto $(1, a)$ y su distancia al punto $(6, 7)$ es 13, determine el valor de a.

10. Se nos da el punto $P(x, 2)$. La distancia de P al punto $A(9, -6)$ es dos veces la distancia al punto $B(-1, 5)$. Encuentre el valor de x.

11. Si P es el punto $(-1, y)$ y su distancia al origen es la mitad de su distancia al punto $(1, 3)$, determine el valor de y.

(12-15) Encuentre la ecuación que deben satisfacer las coordenadas del punto $P(x, y)$, de modo que se satisfagan las siguientes condiciones.

12. P está a una distancia de 5 unidades del punto $(2, -3)$.

13. P está a una distancia de 3 unidades del punto $(-1, 3)$.

14. La distancia de P al punto $A(2, 1)$ es dos veces su distancia al punto $B(-1, 3)$.

15. La suma de los cuadrados de las distancias de los puntos $A(0, 1)$ y $B(-1, 0)$ a P es 3.

(16-19) Dibuje la gráfica de cada ecuación.

16. $2x + 3y = 6$

17. $3x - 4y = 12$

18. $x^2 - y - 6 = 0$

19. $x = y^2 - 2$

(20-23) Dibuje la gráfica de las relaciones de demanda siguientes, donde p denota el precio por unidad y q es la cantidad demandada.

20. $p = -2q + 5$

21. $2p + 3q = 8$

22. $p + q^2 = 14$

23. $p = 25 - q^2$

■ 4-2 LÍNEAS RECTAS Y ECUACIONES LINEALES

En esta sección, examinaremos algunas propiedades de las líneas rectas. Nuestro primer objetivo será investigar la ecuación algebraica que tiene una línea dada, así como su gráfica.

Una de las propiedades más importantes de una línea recta es qué tan pronunciadamente sube o baja, por lo que primero introducimos una cantidad que mida el grado de inclinación de una línea. Empecemos considerando un ejemplo. La ecuación $y = 2x - 4$ tiene como gráfica la línea recta que aparece en la figura 9. Elijamos dos puntos sobre esta línea, tales como los puntos $(3, 2)$ y $(5, 6)$, que se denotan, respectivamente, por P y Q en la figura citada. La diferencia entre las coordenadas x de estos dos puntos, denotados por PR, se denomina el *recorrido* o distancia de P a Q:

$$\text{Recorrido} = PR = 5 - 3 = 2$$

La diferencia entre las coordenadas y de P y Q, igual a la distancia QR, se denomina *elevación* de P a Q:

$$\text{Elevación} = QR = 6 - 2 = 4$$

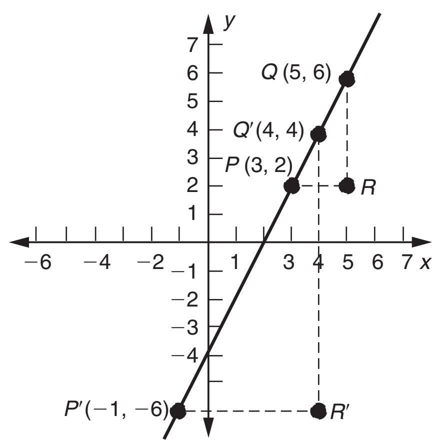


FIGURA 9

Observemos que la elevación es igual a dos veces el recorrido. Éste es el caso, no importa qué pares de puntos elijamos sobre la gráfica. Por ejemplo, tomemos los puntos $P'(-1, -6)$ y $Q'(4, 4)$. (Véase la figura 9). Entonces

$$\text{Recorrido} = P'R' = 4 - (-1) = 5 \quad \text{y} \quad \text{Elevación} = Q'R' = 4 - (-6) = 10$$

De nuevo, la razón de la elevación al recorrido es igual a 2.

La misma razón de la elevación al recorrido se obtiene en los dos casos porque los triángulos PQR y $P'Q'R'$ son semejantes. Por tanto, las razones de los lados correspondientes son iguales: $QR/PR = Q'R'/P'R'$. Esta razón se denomina **pendiente** de la línea recta. La línea de la figura 9 tiene una pendiente igual a 2.

La pendiente de una línea recta arbitraria se define de manera similar. Sean P y Q dos puntos cualesquiera sobre la línea. (Véase la figura 10). Sean sus coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), respectivamente. Sea R la intersección de la línea horizontal que pasa por P y la línea vertical a través de Q. Entonces, definimos el **desplazamiento** (o **recorrido**) **desde *P* a *Q*** como $x_2 - x_1$ y la **elevación desde *P* a *Q*** como $y_2 - y_1$:

$$\text{Desplazamiento} = x_2 - x_1 \qquad \text{Elevación} = y_2 - y_1$$

De la figura 10, el desplazamiento es la distancia horizontal PR y la elevación es la distancia vertical QR. (Si Q estuviese por debajo de R, lo cual sucede si la inclinación de la recta descendiera hacia la derecha, entonces la elevación sería negativa. También podríamos elegir a Q que estuviese a la izquierda de P, en cuyo caso $x_2 < x_1$ y el desplazamiento sería negativo).

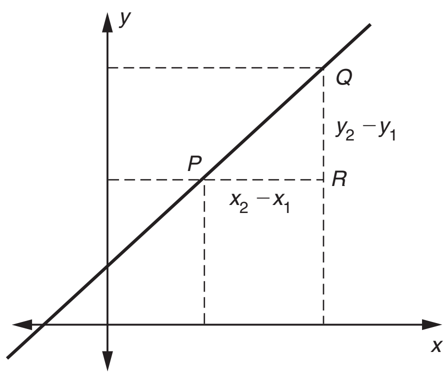


FIGURA 10

La **pendiente** de una línea recta se define como la razón de la elevación al recorrido. Por lo regular, se denota con la letra m. De aquí

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{recorrido}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

Nótese que la ecuación (1) para la pendiente carece de sentido a menos que $x_2 - x_1 \neq 0$; es decir, con tal de que la línea no sea vertical. *La pendiente no está definida para líneas verticales.*

Debe observarse que la pendiente de una línea es la misma, no importando las posiciones de los puntos P y Q sobre la línea.

Si la pendiente m de una línea es positiva, la línea asciende hacia la derecha. Cuanto más grande sea el valor de m, la inclinación de la línea será mayor con respecto a la horizontal. Si m es negativa, la línea desciende hacia la derecha. Si $m = 0$, la línea es horizontal. Estas propiedades se ilustran en la figura 11.

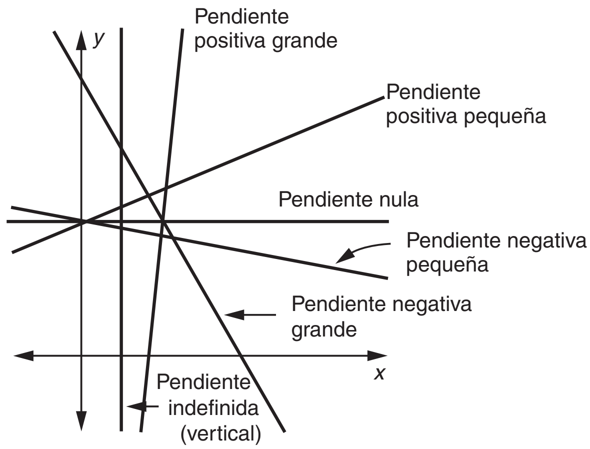


FIGURA 11

EJEMPLO 1 Encuentre la pendiente de la línea que une los puntos $(1, -3)$ y $(3, 7)$.

Solución Usando la ecuación (1), la pendiente es

$$m = \frac{7 - (-3)}{3 - 1} = \frac{10}{2} = 5$$

EJEMPLO 2 La pendiente de la línea que une los puntos $(3, 2)$ y $(5, 2)$ es

$$m = \frac{2 - 2}{5 - 3} = 0$$

De modo que la línea que une estos dos puntos es horizontal.

EJEMPLO 3 La pendiente de la línea que une $P(2, 3)$ con $Q(2, 6)$ está dada por

$$m = \frac{6 - 3}{2 - 2} = \frac{3}{0}$$

que no está definida. En consecuencia, la línea que une P con Q *no* tiene pendiente. En este caso, la línea PQ es vertical. ☛ **5**

☛ **5.** Calcule la elevación y el desplazamiento de P a Q y la pendiente de PQ en cada caso:
a) $P(1, 0)$ y $Q(-1, -6)$
b) $P(-3, 4)$ y $Q(-3, 6)$
c) $P(-2, 2)$ y $Q(5, 2)$

Respuesta *a*) elevación $= -6$, desplazamiento $= -2$, pendiente $= 3$; *b*) 2, 0, no está definida la pendiente; *c*) 0, 7, 0

¿Qué información necesitamos para dibujar una línea recta particular? Una forma en que puede especificarse una línea recta es dando dos puntos situados sobre ella. Una vez que los dos puntos se han dado, la línea completa está determinada, ya que sólo una línea recta puede pasar por esos dos puntos.

A través de *cualquier* punto, hay por supuesto muchas rectas diferentes con pendientes que van de grandes a pequeñas, positivas o negativas. Sin embargo, si se conoce la pendiente, existe sólo una recta que pasa por el punto en cuestión. En consecuencia, una segunda forma en que puede especificarse una línea recta es dando un punto sobre ella y su pendiente.

Ahora nuestra tarea inmediata será determinar la ecuación de una línea recta no vertical con pendiente m que pase por el punto (x_1, y_1). Sea (x, y) un punto sobre la línea distinto del punto dado (x_1, y_1). (Véase la figura 12). Entonces, la pendiente m de la línea que une los puntos (x_1, y_1) y (x, y) está dada por

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

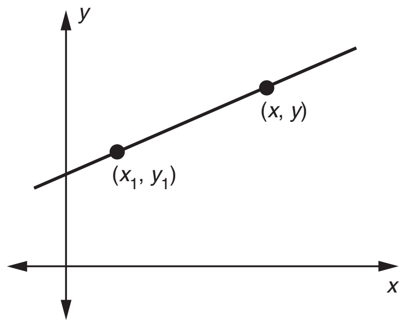


FIGURA 12

Por tanto, se sigue que

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (2)}$$

Ésta se conoce como la fórmula **punto-pendiente** de la línea.

EJEMPLO 4 Encuentre la ecuación de la línea que pasa por el punto $(5, -3)$ con pendiente -2.

Solución Usando la ecuación (2) con $m = -2$ y $(x_1, y_1) = (5, -3)$, encontramos que la ecuación requerida de la línea recta es la siguiente:

$$\begin{aligned} y - (-3) &= -2(x - 5) \\ y + 3 &= -2x + 10 \\ y &= -2x + 7 \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Determine la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos $(1, -2)$ y $(5, 6)$.

Solución La pendiente de la línea que une a $(1, -2)$ con $(5, 6)$ es

$$m = \frac{6 - (-2)}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2$$

Usando la fórmula punto-pendiente, la ecuación de la línea recta a través de $(1, -2)$ con pendiente $m = 2$ es

☛ **6.** En el ejemplo 5, utilice el punto (5, 6) en la fórmula punto pendiente en lugar de $(1, -2)$. ¿La ecuación final es la misma?

Respuesta $y - 6 = 2(x - 5)$ al igual que antes.

$$y - (-2) = 2(x - 1)$$
$$y = 2x - 4$$

Ésta es la línea que aparece en la figura 9. ☛ **6, 7**

En la fórmula punto-pendiente, sea (x_1, y_1) igual a $(0, b)$. (Véase la figura 13). Entonces la ecuación (2) se transforma en

$$y - b = m(x - 0)$$

o bien

$$\boxed{y = mx + b \qquad (3)}$$

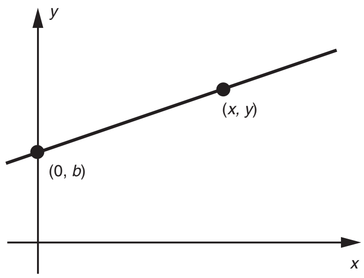


FIGURA 13

☛ **7.** Determine una ecuación de la línea recta *a*) que pase por $(3, -1)$ con pendiente -2 *b*) que pase por (5, 0) y por $(3, -6)$

Respuesta *a*) $y = -2x + 5$ *b*) $y = 3x - 15$

La cantidad b, que da la distancia a lo largo del eje y, al corte con la línea recta, se conoce como la **ordenada al origen** (intersección y) de la línea. La ecuación (3) se llama fórmula **pendiente-ordenada al origen** de la línea.

Si la línea es horizontal, entonces su pendiente es $m = 0$ y la ecuación (3) se reduce a

$$\boxed{y = b \qquad (4)}$$

Ésta es la ecuación de una línea horizontal a una distancia b del eje x. (Véase la figura 14). En particular, si tomamos $b = 0$ en la ecuación (4), obtenemos $y = 0$, que es la ecuación del eje x mismo.

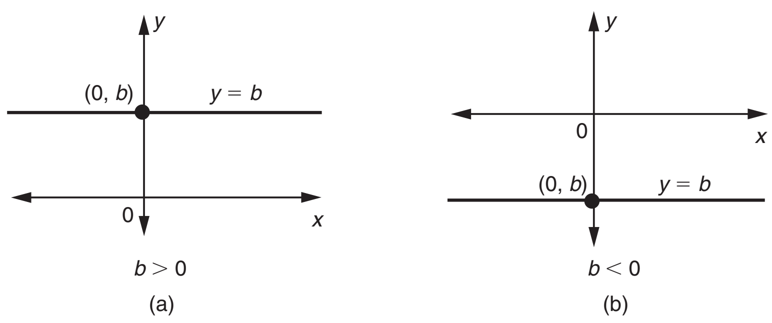


FIGURA 14

Enseguida, supóngase que la línea en cuestión es *vertical* y que su intersección con el eje x sea el punto $A(a, 0)$, como se aprecia en la figura 15. Si $P(x, y)$ es un punto arbitrario sobre la línea, entonces, los puntos P y A tienen la misma abscisa; es decir, $x = a$. Cada punto sobre la línea satisface esta condición, de modo que podemos decir que

$$\boxed{x = a \qquad (5)}$$

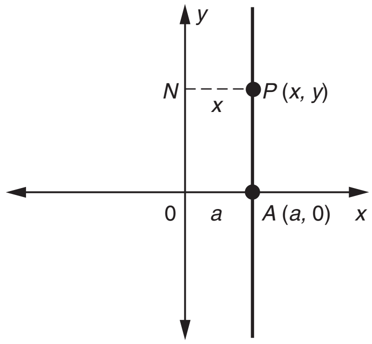


FIGURA 15

Por ejemplo, si $a = 0$, tenemos la ecuación $x = 0$, que es la ecuación del eje y. De manera similar, $x = 2$ es la ecuación de la línea vertical situada dos unidades a la derecha del eje y y $x = -4$ es la ecuación de la línea vertical situada cuatro unidades a la izquierda del eje y. ☛ **8**

☛ **8.** Determine ecuaciones de las rectas horizontal y vertical que pasan por el punto $(4, -2)$

EJEMPLO 6 Encuentre la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos (2, 5) y (2, 9).

Solución La pendiente de la línea que une (2, 5) con (2, 9) está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 5}{2 - 2} = \frac{4}{0}$$

que no está definida. De modo que la línea que une estos dos puntos es vertical. Sabemos que la ecuación de cualquier línea vertical es de la forma

$$x = a$$

La línea dada pasa por el punto (2, 5), que tiene una coordenada x igual a 2. Por tanto, $a = 2$ y la ecuación de la línea recta es

$$x = 2$$

Una **ecuación lineal general** (o una ecuación de primer grado) con dos variables x y y es una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0 \qquad (6)$$

en donde A, B y C son constantes y A y B no son cero *a la vez*.

Respuesta Horizontal: $y = -2$, vertical: $x = 4$

Con base en el estudio anterior, podemos describir la gráfica de la ecuación lineal general, ecuación (6), para diferentes valores de A y B.

1. $B \neq 0, A \neq 0$. En este caso, la ecuación (6) toma la forma

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

cuando se despeja y. Comparando con la fórmula (3), advertimos que ésta es la ecuación de una línea recta cuya pendiente es $-A/B$ y ordenada al origen $-C/B$.

2. $B \neq 0, A = 0$. Cuando despejamos y, la ecuación (6) se transforma en

$$y = -\frac{C}{B}$$

A partir de la ecuación (4), observamos que ésta es la ecuación de una línea horizontal, cuya ordenada al origen es $-C/B$.

3. $A \neq 0, B = 0$. Cuando $B = 0$, la ecuación (6) puede escribirse en la forma

$$x = -\frac{C}{A}$$

Ésta es la ecuación de una línea vertical que intersecta al eje x en el punto $(-C/A, 0)$, usando la ecuación (5).

De modo que la gráfica de la ecuación lineal general (6) es, en cada caso, una línea recta. Una ecuación lineal de la forma de la ecuación (6) a menudo se conoce como **ecuación general** de una línea recta. La tabla 4 resume las diversas formas asumidas por la ecuación de una línea recta.

TABLA 4

Nombre de la fórmula	Ecuación
1. Fórmula punto-pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$
2. Fórmula pendiente ordenada al origen	$y = mx + b$
3. Fórmula general	$Ax + By + C = 0$, A y B no son cero a la vez
4. Recta horizontal	$y = b$
5. Recta vertical	$x = a$

EJEMPLO 7 Dada la ecuación lineal $2x + 3y = 6$, determine la pendiente y la ordenada al origen de su gráfica.

Solución Para encontrar la pendiente y la ordenada al origen de la línea, debemos expresar la ecuación dada en la forma

$$y = mx + b$$

Es decir, debemos resolver la ecuación de y en términos de x.

☛ **9.** Determine la pendiente y la intercepción con el eje y:
a) $3x - y - 6 = 0$
b) $4x + 2y + 5 = 0$

Respuesta *a*) 3, -6
b) $-2, -\frac{5}{2}$

$$2x + 3y = 6$$
$$3y = -2x + 6$$
$$y = -\tfrac{2}{3}x + 2$$

Comparando con la fórmula pendiente-ordenada al origen, $y = mx + b$, tenemos que $m = -\frac{2}{3}$ y $b = 2$. De modo que la pendiente es igual a $-\frac{2}{3}$ y la ordenada al origen 2. ☛ **9**

Rectas paralelas y perpendiculares

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son paralelas si $m_1 = m_2$. Dos rectas son perpendiculares si $m_1m_2 = -1$. Esto es,

> Dos rectas paralelas tienen pendientes iguales. (*)
> El producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es igual a -1

EJEMPLO 8 Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 5) y es perpendicular a la recta $x + 2y - 6 = 0$.

Solución La recta dada $x + 2y - 6 = 0$, o $y = (-\frac{1}{2})x + 3$ tiene pendiente $(-\frac{1}{2})$. Sea m la pendiente de la recta que pasa por (2, 5). Como las dos rectas son perpendiculares, el producto de sus pendientes es -1, esto es,

☛ **10.** Determine una ecuación de la recta que pasa por $(-2, 1)$ y que es:
a) paralela a la recta $2x + 5y - 6 = 0$
b) perpendicular a la recta $x - 3y + 1 = 0$

$$(-\tfrac{1}{2})m = -1 \quad \text{o} \quad m = 2$$

Por la fórmula punto-pendiente, la ecuación de la recta que pasa por (2, 5) con pendiente $m = 2$ es

$$y - 5 = 2(x - 2) \quad \text{o} \quad y = 2x + 1$$ ☛ **10**

Graficación de ecuaciones lineales

EJEMPLO 9 Dibuje la gráfica de la ecuación lineal $3x - 4y = 12$.

Solución Sabemos que la gráfica de una ecuación lineal con dos variables siempre es una línea recta, y que una línea recta está completamente determinada por dos puntos. De modo que para graficar la ecuación lineal, encontramos dos puntos *distintos* (x, y) que satisfagan la ecuación, los graficamos y los unimos mediante una línea recta. Haciendo $x = 0$ en la ecuación, obtenemos

$$-4y = 12 \quad \text{o bien} \quad y = -3$$

En consecuencia, un punto sobre la línea es $(0, -3)$. Haciendo $y = 0$ en la ecuación considerada, vemos que

Respuesta *a*) $2x + 5y - 1 = 0$
b) $3x + y + 5 = 0$

$$3x = 12 \quad \text{o bien} \quad x = 4$$

*O de forma equivalente, m_2 es el recíproco negativo de m_1. La demostración está bosquejada en el ejercicio 41.

☛ **11.** Determine los puntos en donde las rectas siguientes cortan los ejes x y y:

a) $2x - 3y + 2 = 0$

b) $y - 4x - 5 = 0$

c) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Por tanto (4, 0) es un segundo punto sobre la línea. Graficando los puntos $(0, -3)$ y (4, 0), los cuales están situados sobre los ejes coordenados y uniéndolos mediante una línea recta, obtenemos la gráfica de la ecuación, que aparece en la figura 16.
☛ **11**

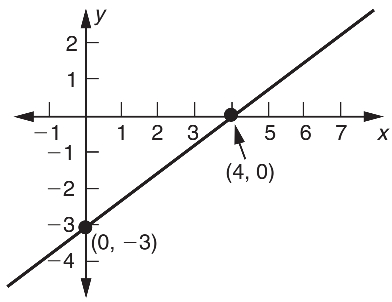


FIGURA 16

Cuando dibujamos la gráfica de una relación lineal, el procedimiento más simple en la mayoría de los casos es encontrar los dos puntos donde la gráfica corta los ejes de coordenadas, como lo hicimos en el ejemplo 9. Sin embargo, hay ocasiones en que esto no es conveniente; por ejemplo, uno de los puntos de intersección puede estar afuera del papel donde se está dibujando. También es imposible usar esta técnica si la gráfica pasa por el origen. En tales casos, podemos usar cualquier pareja de puntos sobre la gráfica con el fin de graficarla, eligiendo los valores de x más convenientes para calcular y.

En forma alternativa, algunas veces es más útil usar la pendiente al dibujar la gráfica. Por ejemplo, la ecuación del ejemplo 9 puede escribirse en la forma $y = \frac{3}{4}x - 3$, lo cual indica que la pendiente es $\frac{3}{4}$ y la ordenada al origen es -3. Así que, podemos graficar el punto $(0, -3)$. Además, por cada 4 unidades que nos movamos a lo largo de la dirección positiva de las x, la gráfica sube 3 unidades, dado que pendiente = elevación/recorrido = $\frac{3}{4}$. De modo que si nos movemos 4 unidades horizontalmente y 3 unidades verticalmente a partir del punto $(0, -3)$; obtenemos un segundo punto sobre la gráfica. O bien podemos movernos horizontalmente 8 unidades y 6 unidades verticalmente para obtener un segundo punto y así sucesivamente.

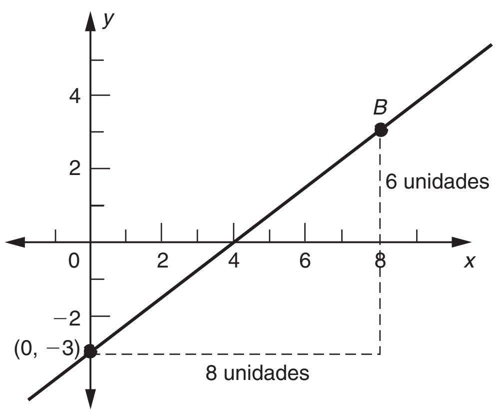


FIGURA 17

Respuesta *a*) $(-1, 0)$ y $\left(0, \frac{2}{3}\right)$

b) $\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$ y (0, 5)

c) $(a, 0)$ y $(0, b)$

Esto se ilustra en la figura 17. De la ordenada al origen que es -3, nos movemos horizontalmente 8 unidades y luego subimos 6 unidades hasta llegar al punto B. Entonces, puede dibujarse una línea recta que una al punto $(0, -3)$ con B. El principio general subyacente en este enfoque es que en cualquier recta no vertical, si x aumenta una cantidad h, entonces y aumenta en h veces la pendiente.

EJERCICIOS 4-2

(1-6) Determine las pendientes de las líneas que unen cada pareja de puntos.

1. $(2, 1)$ y $(5, 7)$ **2.** $(5, -2)$ y $(1, -6)$

3. $(2, -1)$ y $(4, -1)$ **4.** $(3, 5)$ y $(-1, 5)$

5. $(-3, 2)$ y $(-3, 4)$ **6.** $(1, 2)$ y $(1, 5)$

(7-24) Encuentre la ecuación de las líneas rectas que satisfacen las condiciones de cada uno de los siguientes ejercicios. Dibuje la gráfica en cada caso.

7. Pasa a través del punto $(2, 1)$ y tiene pendiente 5

8. Pasa por $(1, -2)$ con pendiente -3

9. Pasa a través del punto $(3, 4)$ y tiene pendiente cero

10. Pasa por $(2, -3)$ y no tiene pendiente

11. Pasa a través de los puntos $(3, -1)$ y $(4, 5)$

12. Pasa por $(2, 1)$ y $(3, 4)$

13. Pasa a través de los puntos $(3, -2)$ y $(3, 7)$

14. Tiene pendiente -2 y ordenada al origen 5

15. Tiene pendiente $\frac{1}{3}$ y ordenada al origen -4

16. Tiene pendiente 3 y ordenada al origen 0

17. Pasa por $(2, -1)$ y es paralela a la recta $3x + y - 2 = 0$

18. Pasa por $(1, 3)$ y es paralela a la recta $2x - y + 3 = 0$

19. Pasa por $(2, 1)$ y es perpendicular a la recta $x + y = 0$

20. Pasa por $(-1, 2)$ y es perpendicular a la recta $2x - 3y + 4 = 0$

21. Pasa por $(3, 4)$ y es perpendicular a la recta $x = 2$

22. Pasa por $(2, -3)$ y es paralela a la recta $3y + 2 = 0$

23. Pasa por $(0, -1)$ y es paralela a la recta determinada por $(2, 2)$ y $(3, 1)$

24. Pasa por $(2, 3)$ y es perpendicular a la recta determinada por $(-1, -2)$ y $(2, 1)$

(25-30) Determine la pendiente y la ordenada al origen de cada una de las relaciones lineales siguientes.

25. $3x - 2y = 6$ **26.** $4x + 5y = 20$

27. $y - 2x + 3 = 0$ **28.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

29. $2y - 3 = 0$ **30.** $3x + 4 = 0$

(31-38) Determine si los siguientes pares de rectas son paralelas, perpendiculares o de ninguno de estos tipos.

31. $2x + 3y = 6$ y $3x - 2y = 6$

32. $y = x$ y $x + y = 1$

33. $y = 2x + 3$ y $x = 2y + 3$

34. $4x + 2y = 1$ y $y = 2 - 2x$

35. $x = -2 - 3y$ y $2x + 6y = 5$

36. $3x + 4y = 1$ y $3x - 4y = 1$

37. $y - 3 = 0$ y $x + 5 = 0$

38. $2x - 5 = 0$ y $3 - x = 0$

39. Una recta pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(2, 1)$. Determine las coordenadas de los puntos en donde esta recta corta los ejes coordenados.

40. Una recta pasa por el punto $(1, 1)$ y es perpendicular a la recta que une $(1, 2)$ y $(1, 4)$. Determine la intercepción de esta recta con el eje y.

***41.** Considere las dos rectas perpendiculares $y = m_1x$ y $y = m_2x$ que pasan por el origen. Seleccione cualesquiera dos puntos P y Q, uno en cada recta. El triángulo OPQ tiene ángulo recto en O. Utilice el teorema de Pitágoras para demostrar que $m_1m_2 = -1$.

■ 4-3 APLICACIONES DE ECUACIONES LINEALES

En esta sección, estudiaremos algunas aplicaciones de las ecuaciones lineales y líneas rectas a problemas en la administración y la economía.

Modelos de costo lineal

En la producción de cualquier bien por una empresa, intervienen dos tipos de costos; que se conocen como *costos fijos* y *costos variables*. A los **costos fijos** hay que enfrentarse sin importar la cantidad producida del artículo; es decir, no dependen del nivel de producción. Ejemplos de costos fijos son las rentas, intereses sobre préstamos y salarios de administración.

Los **costos variables** dependen del nivel de producción; es decir, de la cantidad de artículos producidos. Los costos de los materiales y de la mano de obra son ejemplos de costos variables. El costo total está dado por

$$\boxed{\text{Costo total} = \text{Costos variables} + \text{Costos fijos}}$$

Consideremos el caso en que *el costo variable por unidad del artículo es constante*. En este caso, los costos variables totales son proporcionales a la cantidad de artículos producidos. Si m denota el costo variable por unidad, entonces los costos variables totales al producir x unidades de artículos son de mx dólares. Si los costos fijos son de b dólares, se desprende que el costo total y_c (en dólares) de producir x unidades está dado por

$$\text{Costo total} = \text{Costos totales variables} + \text{Costos fijos}$$

$$y_c = mx + b \tag{1}$$

La ecuación (1) es un ejemplo de un **modelo de costo lineal**. La gráfica de la ecuación (1) es una línea recta cuya pendiente representa el costo variable por unidad y cuya ordenada al origen da los costos fijos.

EJEMPLO 1 ***(Modelo de costo lineal)*** El costo variable de procesar un kilo de granos de café es de 50¢ y los costos fijos por día son de $300.

a) Dé la ecuación de costo lineal y dibuje su gráfica.

b) Determine el costo de procesar 1000 kilos de granos de café en un día.

Solución

a) Si y_c representa el costo (en dólares) de procesar x kilos de granos de café por día, se sigue que de acuerdo con el modelo lineal,

$$y_c = mc + b$$

en donde m representa el costo variable por unidad y b es el costo fijo. En nuestro caso, $m = 50¢ = \$0.50$ y $b = \$300$. Por tanto,

$$y_c = 0.5x + 300$$

Con la finalidad de dibujar la gráfica de la ecuación (2), primero encontramos dos puntos en ella.

Haciendo $x = 0$ en la ecuación (2), tenemos que $y = 300$; haciendo $x = 200$ en la ecuación (2), tenemos que $y_c = 0.5(200) + 300 = 400$. De modo que dos puntos que satisfacen la ecuación de costo (2) son (0, 300) y (200, 400). Graficando estos dos puntos y uniéndolos mediante una línea recta, obtenemos la gráfica que aparece en la figura 18. Nótese que la porción relevante de la gráfica está situada por completo en el primer cuadrante porque x y y_c no pueden ser cantidades negativas.

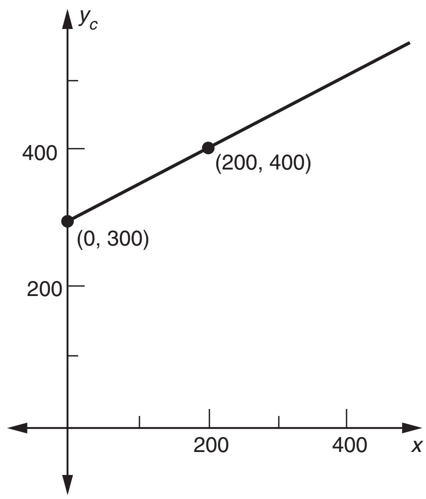


FIGURA 18

☛ **12.** Determine una expresión para y_c en un modelo de costo lineal, si el costo fijo es \$4000 por periodo y cuesta \$7000 producir 200 unidades de producto.

b) Sustituyendo $x = 1000$ en la ecuación (2), obtenemos

$$y_c = 0.5(1000) + 300 = 800$$

En consecuencia, el costo de procesar 1000 kilos de granos de café al día será de \$800. ☛ **12**

EJEMPLO 2 ***(Modelo de costos)*** El costo de fabricar 10 máquinas de escribir al día es de \$350, mientras que cuesta \$600 producir 20 máquinas del mismo tipo al día. Suponiendo un modelo de costo lineal, determine la relación entre el costo total y_c de producir x máquinas de escribir al día y dibuje su gráfica.

Solución Se nos han dado los puntos (10, 350) y (20, 600) que están sobre la gráfica de un modelo de costo lineal. La pendiente de la línea que une estos dos puntos es

$$m = \frac{600 - 350}{20 - 10} = \frac{250}{10} = 25$$

Usando la fórmula punto-pendiente, advertimos que la ecuación requerida de la línea recta (del modelo de costo lineal) con pendiente $m = 25$ y que pasa por el punto (10, 350) es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y_c - 350 = 25(x - 10) = 25x - 250$$

es decir,

$$y_c = 25x + 100 \tag{3}$$

Respuesta $y_c = 15x + 4000$

La gráfica de la ecuación (3) en este caso no es una línea recta continua porque x no puede tomar valores fraccionarios al representar el número de máquinas de escribir producidas. La variable x sólo puede tomar valores enteros 0, 1, 2, 3, 4, 5, . . . Los valores correspondientes de y_c se dan en la tabla 5.

TABLA 5

x	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
y_c	100	125	150	175	200	225	250	$\cdots$

☛ **13.** Si cuesta \$4500 producir 75 unidades semanales y \$5200 producir 100 a la semana, ¿cuáles son los costos fijos semanales y cuál el costo variable por unidad?

Graficando estos puntos, obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 19. Nótese que la gráfica consta de puntos (discretos) separados más que de una línea recta continua. ☛ **13**

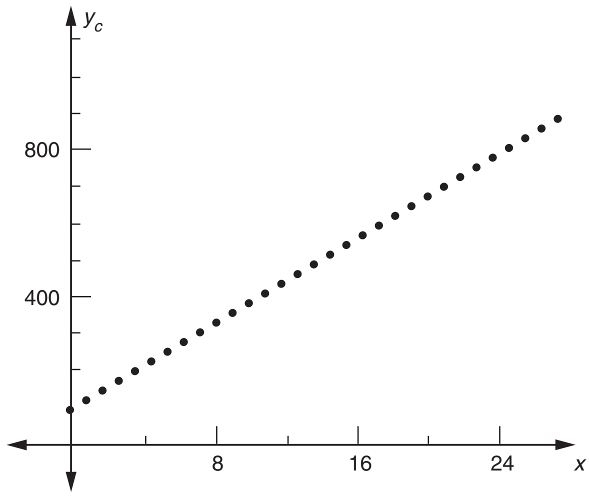


FIGURA 19

Depreciación lineal

Cuando una compañía compra parte de un equipo o maquinaria, reporta el valor de ese equipo como uno de los activos en su hoja de balance. En años subsecuentes, este valor debe disminuir debido al lento desgaste del equipo, o bien, a que se vuelve obsoleto. Esta reducción gradual del valor de un activo se denomina *depreciación*. Un método común de calcular el monto de la depreciación es reducir el valor cada año en una cantidad constante, de forma tal que el valor se reduzca a un valor de desecho al final del tiempo de vida útil estimado del equipo. Esto se denomina *depreciación lineal*. Tenemos

Tasa de depreciación (anual)

= (Valor inicial − Valor de desecho) ÷ (Tiempo de vida en años)

Respuesta \$2400 y \$28 por unidad.

EJEMPLO 3 ***(Depreciación)*** Una empresa compra maquinaria por \$150,000. Se espera que el tiempo de vida útil de la maquinaria sea de 12 años con un valor de desecho de cero. Determine el monto de depreciación anual y una fórmula para el valor depreciado después de x años.

Solución

Depreciación por año = (Precio de adquisición inicial) ÷ (Vida útil en años)
= (150,000 dólares) ÷ (12 años)
= 12,500 dólares

Valor después de x años = (Valor inicial) − (Depreciación por año)(Número de años)
= (150,000 dólares) − (12,500 dólares por año)(x años)
= 150,000 − 12,500x dólares

La gráfica de esta relación aparece en la figura 20. ☛ **14**

☛ **14.** Una compañía está utilizando una depreciación lineal para calcular el valor de su planta recientemente construida. Después de 2 años está valuada en \$8.8 millones y después de 6 años en \$7.2 millones. ¿Cuál fue el costo inicial y después de cuántos años el valor se depreciará a cero?

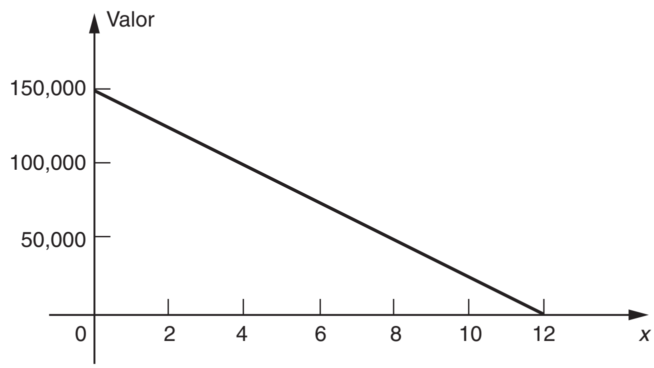


FIGURA 20

Oferta y demanda

Las leyes de la oferta y la demanda son dos de las relaciones fundamentales en cualquier análisis económico. La cantidad x de cualquier artículo que será adquirida por los consumidores depende del precio en que el artículo esté disponible. Una relación que especifique la cantidad de un artículo determinado que los consumidores están dispuestos a comprar, a varios niveles de precios, se denomina **ley de la demanda**. La ley más simple es una relación del tipo

$$p = mx + b \tag{4}$$

en donde p es el precio por unidad del artículo y m y b son constantes. La gráfica de una ley de demanda se llama **curva de demanda**. Obsérvese que p se ha expresado en términos de x. Esto nos permite calcular el nivel de precio en que cierta cantidad x puede venderse.

Es un hecho perfectamente conocido que si el precio por unidad de un artículo aumenta, la demanda por el artículo disminuye, porque menos consumidores po-

Respuesta \$9.6 millones, 24 años.

drán adquirirlo, mientras que si el precio por unidad disminuye (es decir, el artículo se abarata) la demanda se incrementará. En otras palabras, la pendiente m de la relación de demanda de la ecuación (1) es negativa. De modo que la gráfica de la ecuación tiene una inclinación que baja hacia la derecha, como se aprecia en la parte *a*) de la figura 21. Puesto que el precio p por unidad y la cantidad x demandada no son números negativos, la gráfica de la ecuación (4) sólo debe dibujarse en el primer cuadrante.

La cantidad de un artículo determinado que sus proveedores están dispuestos a ofrecer depende del precio al cual puedan venderlo. Una relación que especifique la cantidad de cualquier artículo que los fabricantes (o vendedores) puedan poner en el mercado a varios precios se denomina **ley de la oferta**. La gráfica de una ecuación de la oferta (o ley de la oferta) se conoce como **curva de la oferta**.

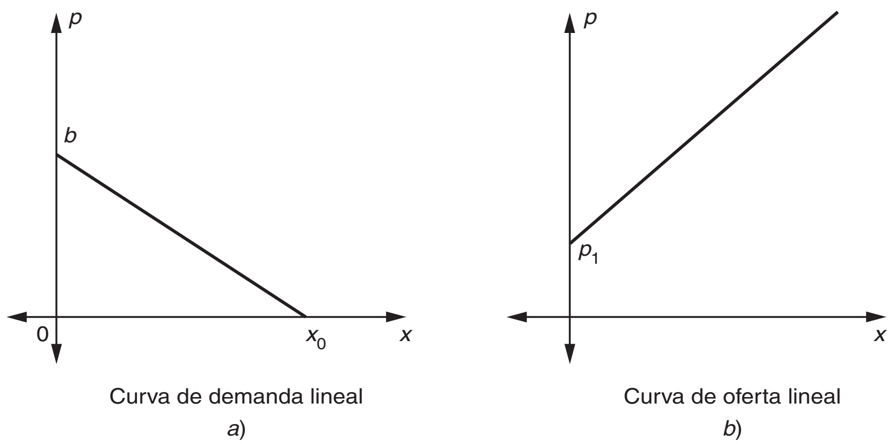


FIGURA 21

En general, los proveedores inundarán el mercado con una gran cantidad de artículos, si pueden ponerle un precio alto, y con una cantidad más pequeña de artículos si el precio obtenido es más bajo. En otras palabras, la oferta aumenta al subir el precio. Una curva de oferta lineal típica aparece en la parte *b*) de la figura 21. El precio p_1 corresponde a un precio bajo del cual los proveedores no ofrecerán el artículo.

EJEMPLO 4 ***(Demanda)*** Un comerciante puede vender 20 rasuradoras eléctricas al día al precio de \$25 cada una, pero puede vender 30 si les fija un precio de \$20 a cada rasuradora eléctrica. Determine la ecuación de demanda, suponiendo que es lineal.

Solución Considerando la cantidad x demandada como la abscisa (o coordenada x) y el precio p por unidad como la ordenada (o coordenada y) los dos puntos sobre la curva de demanda tienen coordenadas.

$$x = 20, p = 25 \quad \text{y} \quad x = 30, p = 20$$

De modo que los puntos son (20, 25) y (30, 20). Dado que la ecuación de demanda es lineal, está dada por la ecuación de una línea recta que pasa por los puntos

(20, 25) y (30, 20). La pendiente de la línea que une estos puntos es

$$m = \frac{20 - 25}{30 - 20} = -\frac{5}{10} = -0.5$$

Por la fórmula punto-pendiente, la ecuación de la línea que pasa por (20, 25) con pendiente $m = -0.5$ es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Dado que $y = p$, tenemos que

$$p - 25 = -0.5x(x - 20)$$
$$p = -0.5x + 35$$

que es la ecuación de demanda requerida. (Véase la figura 22). ☛ **15**

☛ **15.** Cuando el precio por unidad es \$10, la oferta será de 80 unidades diarias, mientras que será de 90 unidades a un precio unitario de \$10.50. Determine la ecuación de oferta, suponiendo que es lineal. Dibuje la curva de oferta

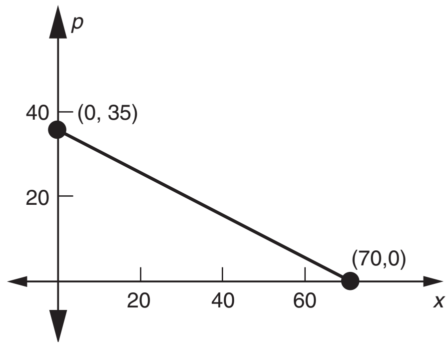
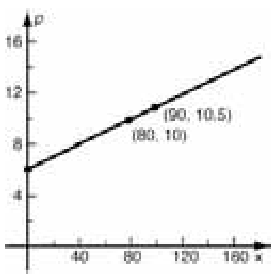


FIGURA 22

Tasa de sustitución

Con frecuencia, los planeadores tienen que decidir entre diferentes maneras de asignar recursos limitados. Por ejemplo, un fabricante tiene que asignar la capacidad de la planta entre dos productos diferentes. Si la relación entre las cantidades de los dos productos es lineal, la pendiente de su gráfica puede interpretarse como la tasa de sustitución de un producto por otro. Considere el ejemplo siguiente.

Respuesta $p = \frac{1}{20}x + 6$



EJEMPLO 5 (***Decisión de tránsito***) El gobierno de una ciudad tiene un presupuesto de \$200 millones de capital para gasto sobre transporte, e intenta utilizarlo para construir metros subterráneos o carreteras. Cuesta \$2.5 millones por milla construir carreteras y \$4 millones por milla para metros subterráneos. Encuentre la relación entre el número de millas de carretera y de subterráneo que puede construirse para utilizar por completo el presupuesto disponible. Interprete la pendiente de la relación lineal que se obtiene.

Solución Suponga que se construyen x millas de carretera y y millas de subterráneo. El costo de construir x millas de carretera a \$2.5 millones por milla es $2.5x$ millones de dólares y el costo de construir y millas de subterráneo a \$4 millones por milla es $4y$ millones de dólares. Como el costo total tiene que ser igual al presupuesto asignado para el propósito,

$$2.5x + 4y = 200$$

Esta ecuación proporciona la relación requerida entre los números de millas que pueden construirse dentro del presupuesto.

Al resolver la ecuación dada para y, tenemos

$$y = -\tfrac{5}{8}x + 50$$

La pendiente de esta recta es $-\frac{5}{8}$, la cual expresa el hecho de que la construcción de cada milla adicional de carretera será a un costo de $\frac{5}{8}$ de milla de construcción de subterráneo. Al resolver la ecuación original para x en términos de y, obtenemos

$$x = -\tfrac{8}{5}y + 80$$

Así, cada milla adicional de construcción de subterráneo sustituye $\frac{8}{5}$ millas de construcción de carretera.

EJERCICIOS 4-3

1. *(Modelo de costo lineal)* El costo variable de fabricar una mesa es de \$7 y los costos fijos son de \$150 al día. Determine el costo total y_c de fabricar x mesas al día. ¿Cuál es el costo de fabricar 100 mesas al día?

2. *(Modelo de costo lineal)* El costo de fabricar 100 cámaras a la semana es de \$700 y el de 120 cámaras a la semana es de \$800.

a) Determine la ecuación de costos, suponiendo que es lineal.

b) ¿Cuáles son los costos fijos y variables por unidad?

3. *(Modelo de costo lineal)* A una compañía le cuesta \$75 producir 10 unidades de cierto artículo al día y \$120 producir 25 unidades del mismo artículo al día.

a) Determine la ecuación de costos, suponiendo que sea lineal.

b) ¿Cuál es el costo de producir 20 artículos al día?

c) ¿Cuál es el costo variable y el costo fijo por artículo?

4. *(Modelo de costo lineal)* La compañía de mudanzas Ramírez cobra \$70 por transportar cierta máquina 15 millas y \$100 por transportar la misma máquina 25 millas.

a) Determine la relación entre la tarifa total y la distancia recorrida, suponiendo que es lineal.

b) ¿Cuál es la tarifa mínima por transportar esta máquina?

c) ¿Cuál es la cuota por cada milla que la máquina es transportada?

5. *(Modelo de costo lineal)* Los costos fijos por fabricar cierto artículo son de \$300 a la semana y los costos totales por fabricar 20 unidades a la semana son de \$410. Determine la relación entre el costo total y el número de unidades producidas, suponiendo que es lineal. ¿Cuál será el costo de fabricar 30 unidades a la semana?

6. *(Modelo de costo lineal)* Un hotel alquila un cuarto a una persona a una tarifa de \$25 por la primera noche y de \$20 por cada noche siguiente. Exprese el costo y_c de la cuenta en términos de x, el número de noches que la persona se hospeda en el hotel.

7. *(Modelo de costo lineal)* Una compañía especializada ofrece banquetes a grupos de personas al costo de \$10 por persona, más un cargo extra de \$150. Encuentre el costo y_c que fijaría la compañía por x personas.

8. *(Modelo de costo lineal)* El costo de un boleto de autobús en Yucatán depende directamente de la distancia viajada. Un recorrido de 2 millas cuesta 40¢, mientras que uno de 6 millas tiene un costo de 60¢. Determine el costo de un boleto por un recorrido de x millas.

9. *(Relación de la demanda)* Un fabricante de detergente encuentra que las ventas son de 10,000 paquetes a la semana cuando el precio es de \$1.20 por paquete, pero que las ventas se incrementan a 12,000 cuando el precio se reduce a \$1.10 por paquete. Determine la relación de demanda, suponiendo que es lineal.

10. *(Relación de la demanda)* Un fabricante de televisores advierte que a un precio de \$500 por televisor, las ventas ascienden a 2000 televisores al mes. Sin embargo, a \$450 por televisor, las ventas son de 2400 unidades. Determine la ecuación de demanda, suponiendo que es lineal.

11. *(Ecuación de la oferta)* A un precio de \$2.50 por unidad, una empresa ofrecerá 8000 camisetas al mes; a \$4 cada unidad, la misma empresa producirá 14,000 camisetas al mes. Determine la ecuación de la oferta, suponiendo que es lineal.

12. *(Relación de la demanda)* Un fabricante de herramientas puede vender 3000 martillos al mes a \$2 cada uno, mientras que sólo pueden venderse 2000 martillos a \$2.75 cada uno. Determine la ley de demanda, suponiendo que es lineal.

13. *(Ecuación de oferta)* A un precio de \$10 por unidad, una compañía proveería 1200 unidades de su producto, y a \$15 por unidad, 4200 unidades. Determine la relación de la oferta, suponiendo que sea lineal.

14. *(Renta de apartamentos)* Bienes Raíces Georgia posee un complejo habitacional que tiene 50 apartamentos. A una renta mensual de \$400, todas los apartamentos son rentados, mientras que si la renta se incrementa a \$460 mensuales, sólo pueden rentarse 47.

a) Suponiendo una relación lineal entre la renta mensual p y el número de apartamentos x que pueden rentarse, encuentre esta relación.

b) ¿Cuántos apartamentos se rentarán, si la renta mensual aumenta a \$500?

c) ¿Cuántos apartamentos se rentarán, si la renta disminuye a \$380 mensuales?

15. *(Depreciación)* Juan compró un automóvil nuevo por \$10,000. ¿Cuál es el valor V del automóvil después de t años, suponiendo que se deprecia linealmente cada año a una tasa del 12% de su costo original? ¿Cuál es el valor del automóvil después de 5 años?

16. *(Depreciación)* Una empresa compró maquinaria nueva por \$15,000. Si se deprecia linealmente en \$750 al año y si tiene un valor de desecho de \$2250, ¿por cuánto tiempo estará la maquinaria en uso? ¿Cuál será el valor V de la maquinaria después de t años de uso y después de 6 años de uso?

17. *(Depreciación)* La señora Olivares compró un televisor nuevo por \$800 que se deprecia linealmente cada año un 15% de su costo original. ¿Cuál es el valor del televisor después de t años y después de 6 años de uso?

18. *(Depreciación)* Sea P el precio de adquisición, S el valor de desecho y N la vida útil en años de una pieza de un equipo. Demuestre que, según la depreciación lineal, el valor del equipo después de t años está dado por $V = P - (P - S)(t/N)$.

19. *(Asignación de máquinas)* Una compañía fabrica dos tipos de cierto producto. Cada unidad del primer tipo requiere de 2 horas de máquina y cada unidad del segundo tipo requiere de 5 horas de máquina. Hay disponibles 280 horas de máquina a la semana.

a) Si a la semana se fabrican x unidades del primer tipo y y unidades del segundo, encuentre la relación entre x y y si se utilizan todas las horas de máquina.

b) ¿Cuál es la pendiente de la ecuación en la parte *a*)? ¿Qué representa?

c) ¿Cuántas unidades del primer tipo pueden fabricarse si 40 unidades del segundo tipo se fabrican en una semana particular?

20. *(Asignación de trabajo)* La compañía Boss-Toss manufactura dos productos, X y Y. Cada unidad de X requiere 3 horas de mano de obra y cada unidad de Y requiere 4 horas de mano de obra. Hay 120 horas de mano de obra disponibles cada día.

a) Si x unidades de X y y unidades de Y son fabricadas diariamente y todas las horas de mano de obra se utilizan, encuentre una relación entre x y y.

b) Dé la interpretación física de la pendiente de la relación lineal obtenida.

c) ¿Cuántas unidades de X pueden fabricarse en un día si ese mismo día se hicieron 15 unidades de Y?

d) ¿Cuántas unidades de Y pueden fabricarse en un día si ese mismo día se manufacturaron 16 unidades de X?

21. *(Reducciones de inventarios)* La tienda “El Mayorista” tiene 650 unidades del artículo X en bodega y su promedio de ventas por día de este artículo es de 25 unidades.

a) Si y representa el inventario (de artículos X en bodega) al tiempo t (medido en días), determine la relación lineal entre y y t. (Use $t = 1$ para representar el término del primer día, etcétera.)

b) ¿Cuánto llevará vaciar la bodega?

c) ¿En cuántos días de ventas deberán hacer un nuevo pedido si han decidido hacerlo cuando el nivel de la bodega sea de 125 unidades?

22. *(Ciencias políticas)* En una elección para la Cámara de Representantes de Estados Unidos, se estima que si los Demócratas ganan el 40% del voto popular, obtendrían 30% de los escaños, y que por cada punto porcentual en que aumenten sus votos, su participación en la Cámara se incrementa en 2.5%. Suponiendo que hay una relación lineal $y = mx + c$ entre x, el porcentaje de votos, y y, el porcentaje de escaños, calcúlese m y c. ¿Qué porcentaje de curules obtendrán los Demócratas si ganaran 55% del voto popular?

23. *(Zoología)* El peso promedio W de la cornamenta de un ciervo está relacionada con la edad del ciervo aproximadamente por la ecuación $W = mA + c$. Para ciertas especies se ha encontrado que cuando $A = 30$ meses, $W = 0.15$ kilogramos; mientras que cuando $A = 54$ meses, $W = 0.36$ kilogramos; Encuentre m y c y calcule la edad en la cual W alcanza 0.5 kilogramos.

24. *(Agricultura)* En los últimos 40 años el rendimiento promedio y (en bushels por acre) de maíz en Estados Unidos se ha incrementado con el tiempo t aproximadamente mediante la ecuación $y = mt + c$. En 1950 el rendimiento promedio era de 38 bushels por acre, mientras que en 1965 fue de 73. Calcule m y c. (Tome $t = 0$ en 1950.) Estime cuál será el rendimiento promedio en 1990 suponiendo que la misma ecuación sigue siendo válida.

25. *(Planeación dietética)* En un hospital un paciente que está a dieta de líquidos tiene que escoger jugo de ciruela o jugo de naranja para satisfacer su requerimiento de tiamina que es de 1 miligramo diario. Una onza de jugo de ciruela contiene 0.05 miligramos de tiamina y 1 onza de jugo de naranja contiene 0.08 miligramos de tiamina. Si consume x onzas de jugo de ciruela y y onzas de jugo de naranja diariamente. ¿Cuál es la relación entre x y y que satisface exactamente el requerimiento de tiamina?

26. *(Planeación dietética)* Un individuo que está bajo una dieta estricta planea desayunar cereal, leche y un huevo cocido. Después del huevo, su dieta le permite 300 calorías para esa comida. Una onza de leche contiene 20 calorías y 1 onza (alrededor de una taza llena) de cereal (más azúcar) contiene 160 calorías. ¿Cuál es la relación entre el número de onzas de leche y el de cereal que puede consumir?

■ 4-4 SISTEMAS DE ECUACIONES

Una gran cantidad de problemas en negocios y economía desembocan en los denominados *sistemas de ecuaciones lineales*. Por ejemplo, consideremos la siguiente situación.

El propietario de una tienda de televisores desea expandir su negocio comprando y poniendo a la venta dos nuevos modelos de televisores que acaban de salir al mercado. Cada televisor del primer tipo cuesta \$300 y cada televisor del segundo tipo \$400. Cada televisor del primer tipo ocupa un espacio de 4 pies cuadrados, mientras que cada uno del segundo tipo ocupa 5 pies cuadrados. Si el propietario sólo tiene disponibles \$2000 para su expansión y 26 pies cuadrados de espacio, ¿cuántos modelos de cada tipo deberá comprar y poner a la venta haciendo uso completo del capital disponible y del espacio?

Supóngase que el propietario compra x televisores del primer modelo y y del segundo. Entonces, le cuesta \$300x comprar el primer modelo y \$400y comprar el segundo tipo de televisores. Dado que la cantidad total que ha de gastar es de \$2000, es necesario que

$$300x + 400y = 2000 \tag{i}$$

Asimismo, la cantidad de espacio ocupada por los dos tipos de televisores es de $4x$ pies cuadrados y $5y$ pies cuadrados, respectivamente. El espacio total disponible para los dos modelos es de 26 pies cuadrados. Por tanto

$$4x + 5y = 26 \tag{ii}$$

Para encontrar el número de televisores de cada modelo que deberá comprar y poner a la venta, debemos resolver las ecuaciones (i) y (ii) para x y y. Es decir, debemos encontrar los valores de x y y que satisfagan a la vez las ecuaciones (i) y (ii). Obsérvese que cada una de ellas es una ecuación lineal en x y y.

DEFINICIÓN Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos variables x y y consta de dos ecuaciones del tipo

$$a_1x + b_1y = c_1 \tag{1}$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \tag{2}$$

de donde a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 y c_2 son seis constantes. La **solución** del sistema definido por las ecuaciones (1) y (2) es el conjunto de los valores de x y y que satisfacen ambas ecuaciones.

Las ecuaciones (i) y (ii) forman uno de tales sistemas de ecuaciones lineales. Si identificamos la ecuación (i) con la ecuación (1) y la ecuación (ii) con la ecuación (2), las seis constantes tienen los valores $a_1 = 300$, $b_1 = 400$, $c_1 = 2000$, $a_2 = 4$, $b_2 = 5$ y $c_2 = 26$.

Nuestro principal interés en esta sección es resolver sistemas de ecuaciones lineales en forma algebraica. La solución por el uso de métodos algebraicos requiere la eliminación de una de las variables, x o y, de las dos ecuaciones; esto nos permite determinar el valor de la otra variable. La eliminación de una de las variables puede lograrse por sustitución o sumando un múltiplo apropiado de una ecuación a la otra. Los dos procedimientos se ilustran en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Resuelva las dos ecuaciones que resultan del problema formulado al inicio de esta sección.

$$300x + 400y = 2000 \tag{i}$$

$$4x + 5y = 26 \tag{ii}$$

Solución ***(Método de sustitución)*** En este caso, despejamos x o y (lo que sea más sencillo) de una de las ecuaciones y sustituimos el valor de esta variable en la otra ecuación. De la ecuación (ii) (despejando x), tenemos

$$4x = 26 - 5y$$

$$x = \frac{26 - 5y}{4} \tag{iii}$$

Sustituimos este valor de x en la ecuación (i) y despejamos y.

$$\begin{aligned} 300\left(\frac{26 - 5y}{4}\right) + 400y &= 2000 \\ 75(26 - 5y) + 400y &= 2000 \\ 1950 - 375y + 400y &= 2000 \\ 25y = 200 - 1950 &= 50 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Sustituyendo $y = 2$ en la ecuación (iii) tenemos que

$$x = \tfrac{1}{4}(26 - 10) = 4$$

☛ **16.** Resuelva el sistema siguiente usando la primer ecuación para sustituir y en la segunda:

$3x - y = 7;\ 2x + 4y = 14$

Respuesta Sustituya $y = 3x - 7$ La solución es $x = 3$, $y = 2$

☛ **17.** Resuelva el sistema siguiente eliminando x por medio del método de suma:

$x + y = 3;\ 2x + 3y = 11$

Respuesta Multiplique la primera ecuación por -2, luego súmela a la segunda. La solución es $x = -2$, $y = 5$

En consecuencia, la solución del sistema de ecuaciones (i) y (ii) es $x = 4$ y $y = 2$. En otras palabras, el comerciante deberá comprar 4 televisores del primer tipo y 2 del segundo, si emplea todo el espacio disponible y utiliza todo su capital. ☛ **16**

Solución alternativa ***(Método de eliminación)***

$$300x + 400y = 2000 \qquad \text{(i)}$$

$$4x + 5y = 26 \qquad \text{(ii)}$$

De acuerdo con este método, hacemos que los coeficientes de x o y en las dos ecuaciones tengan exactamente la misma magnitud y signos opuestos; luego sumamos las dos ecuaciones para eliminar una de las variables. Obsérvese que si multiplicamos ambos lados de la ecuación (ii) por -80, hacemos que el coeficiente de y tenga la misma magnitud que el de la ecuación (i), pero con el signo opuesto. La ecuación se transforma en

$$-320x - 400y = -2080 \qquad \text{(iv)}$$

Recordemos que la ecuación (i) es

$$300x + 400y = 2000$$

Cuando sumamos estas dos ecuaciones; los términos en y se cancelan y obtenemos

$$(-320x - 400y) + (300x + 400y) = -2080 + 2000 \qquad \text{(v)}$$

o bien

$$-20x = -80$$

$$x = 4$$

Sustituyendo $x = 4$ en una de las ecuaciones [usamos la ecuación (ii)], tenemos que

$$16 + 5y = 26$$

$$5y = 26 - 16 = 10$$

$$y = 2$$

Así que, la solución es $x = 4$ y $y = 2$, la misma que se obtuvo por el primer método. ☛ **17**

Observación Las operaciones requeridas en estos dos métodos no alteran las soluciones. Por ejemplo, cualesquiera x y y que satisfagan la ecuación (ii) también satisfarán la ecuación (iv); cualesquiera x y y que satisfagan a la vez la ecuaciones (i) y (iv) también satisfarán la ecuación (v), etc. En consecuencia, los métodos producen valores de x y y que son soluciones de la pareja original de ecuaciones.

EJEMPLO 2 Resuelva el sistema siguiente:

$$\frac{x - y}{3} = \frac{y - 1}{4}$$

$$\frac{4x - 5y}{7} = x - 7$$

Solución La primera etapa consiste en eliminar las fracciones de las dos ecuaciones. Multiplicamos ambos lados de la primera ecuación por 12, el denominador común y simplificamos.

$$4(x - y) = 3(y - 1)$$
$$4x - 4y = 3y - 3$$
$$4x - 7y = -3$$

Multiplicamos ambos lados de la segunda ecuación por 7 y simplificamos, obteniendo

$$4x - 5y = 7(x - 7) = 7x - 49$$
$$-3x - 5y = -49$$

Multiplicando la ecuación completa por -1, resulta

$$3x + 5y = 49$$

De manera que el sistema de ecuaciones es equivalente al sistema de ecuaciones lineales siguientes:

$$4x - 7y = -3 \qquad \text{(i)}$$
$$3x + 5y = 49 \qquad \text{(ii)}$$

Usamos el método de sustitución. Despejamos x en la ecuación (i).

$$4x = 7y - 3 \quad \text{o bien} \quad x = \tfrac{1}{4}(7y - 3) \qquad \text{(iii)}$$

Sustituyendo este valor de x en la ecuación (ii), obtenemos

$$\tfrac{3}{4}(7y - 3) + 5y = 49$$

Multiplicamos ambos lados por 4 y despejamos y.

$$3(7y - 3) + 20y = 196$$
$$21y - 9 + 20y = 196$$
$$41y = 196 + 9 = 205$$
$$y = \frac{205}{41} = 5$$

Haciendo $y = 5$ en la ecuación (iii), resulta

$$x = \tfrac{1}{4}(35 - 3) = 8$$

En consecuencia la solución requerida es $x = 8$ y $y = 5$

Un sistema de ecuaciones lineales y su solución tienen una intepretación geométrica importante. Por ejemplo, consideremos el sistema siguiente.

$$x + y = 3 \qquad (3)$$
$$3x - y = 1 \qquad (4)$$

Usando alguno de los métodos de solución anteriores, fácilmente nos damos cuenta de que la solución es $x = 1$ y $y = 2$.

Cada una de las ecuaciones (3) y (4) es lineal en x y y, por lo que tiene como gráfica una línea recta en el plano xy. En el caso de la ecuación (3), determinamos el punto en que corta el eje x haciendo $y = 0$. Esto da $x = 3$, de modo que la línea pasa por el punto (3, 0). De manera similar, haciendo $x = 0$, encontramos que $y = 3$, por lo que la línea corta al eje y en el punto (0, 3). Estos dos puntos aparecen en la figura 23 y la gráfica de la ecuación (3) se obtiene uniendo con una línea recta los puntos.

☛ **18.** Dibuje las gráficas y encuentre el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones sean

$$3y - 2x = 6 \text{ y } 4y + 3x = 24$$

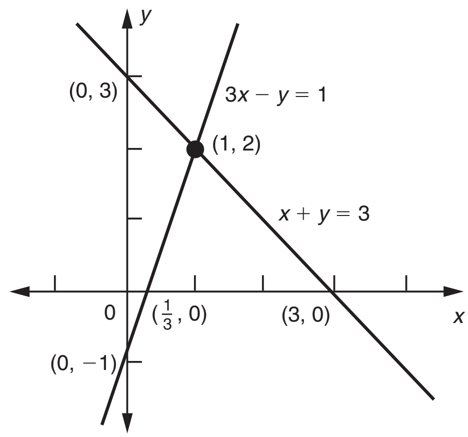


FIGURA 23

En forma análoga, encontramos los puntos (0, −1) y ($\frac{1}{3}$, 0) que pertenecen a la ecuación (4) y están sobre los ejes de coordenadas.

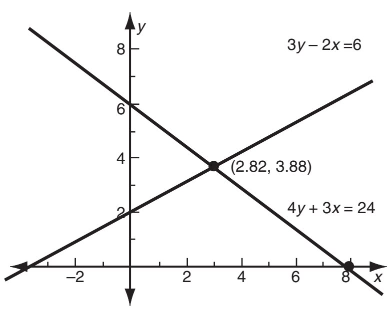
Cualquier pareja de valores x y y que satisfaga la ecuación (3) corresponde a un punto sobre la primera línea recta. Cualquier pareja de valores que satisfaga la ecuación (4) corresponde a un punto (x, y) en la segunda línea recta. En consecuencia, si x y y satisfacen *a la vez* las dos ecuaciones, el punto (x, y) debe estar situado en *ambas* líneas. En otras palabras, (x, y) debe ser el punto en que las líneas se intersecan. En la figura 23, advertimos que este punto es (1, 2), de modo que la solución en este caso es $x = 1$ y $y = 2$, como ya se había establecido. ☛ **18**

Ahora regresamos al sistema general de ecuaciones lineales.

$$a_1x + b_1y = c_1 \tag{1}$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \tag{2}$$

Respuesta $x = \frac{48}{17} \approx 2.82$
$y = \frac{66}{17} \approx 3.88$



Las gráficas de estas dos ecuaciones constan de dos líneas rectas en el plano xy, dado que cualquier ecuación lineal siempre representa una línea recta, como vimos en la sección 4-2. Cualquier pareja de valores x y y que satisfacen a la vez las ecuaciones (1) y (2) deben corresponder a un punto (x, y) que esté situado en ambas líneas.

Denotemos las rectas por L y M, respectivamente. Surgen entonces tres posibilidades.

1. Las líneas L y M se intersecan. Ya que el punto de intersección (x_0, y_0), está situado en ambas, las coordenadas (x_0, y_0) satisfacen las ecuaciones de ambas

líneas, y de aquí, dan una solución al sistema dado. *Esta solución es única,* porque si las dos líneas se intersecan, lo hacen en un solo punto. (Véase la parte *a*) de la figura 24).

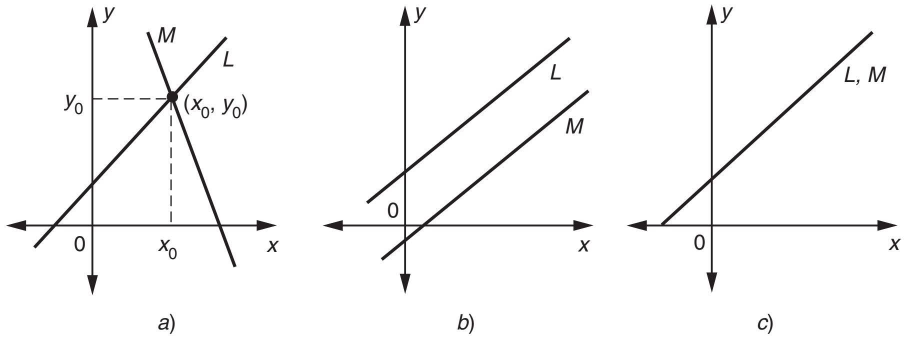


FIGURA 24

2. **Las** líneas L y M son paralelas. En este caso, las líneas no se cortan y no hay ningún punto sobre ambas. Por lo que no habrá valores de x y de y que satisfagan ambas ecuaciones. En otras palabras, en este caso las ecuaciones *no tienen solución*. (Véase la parte *b*) de la figura 24).
3. Las líneas L y M coinciden. En tal caso, cada punto sobre la línea L también está sobre la línea M. En esta situación, el sistema tiene *un número infinito de soluciones*; es decir, cada pareja ordenada (x, y) sobre L ($= M$). (Véase la parte *c*) de la figura 24).

EJEMPLO 3 Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 3x + 6y - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Solución Resolvamos la primera ecuación para x:

$$x = 4 - 2y$$

Luego, sustituyamos este valor de x en la segunda ecuación y simplifiquemos.

$$\begin{aligned} 3(4 - 2y) + 6y - 8 &= 0 \\ 12 - 6y + 6y - 8 &= 0 \\ 4 &= 0 \end{aligned}$$

Esto es imposible. Por tanto, las ecuaciones *no tienen solución*. Esto se ilustra gráficamente en la figura 25. En este caso las dos líneas rectas son paralelas y no se intersectan. Podemos ver esto de inmediato escribiendo las ecuaciones dadas en la forma pendiente-ordenada al origen.

$$y = -\tfrac{1}{2}x + 2$$

$$y = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{4}{3}$$

☛ **19.** ¿Cuántas soluciones tiene cada uno de los sistemas siguientes?

a) $x - 3y = 1,\ y = \dfrac{1}{3}x - 1$

b) $3y = 5x - 2$
$x + y + 2 = 4(y - x + 1)$

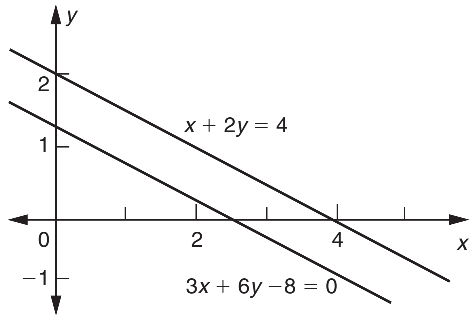


FIGURA 25

Las dos líneas tienen *la misma pendiente* $(-\frac{1}{2})$ pero distintas ordenadas al origen. En consecuencia, las dos líneas son paralelas, sin punto de intersección común.

EJEMPLO 4 Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$2x - 3y = 6 \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1 \qquad \text{(ii)}$$

Solución Multiplicamos ambos lados de la segunda ecuación por -6, y obtenemos

$$-2x + 3y = -6$$

Sumando esta ecuación con la primera, resulta

$$0 = 0$$

una ecuación que siempre es válida.

Escribiendo las dos ecuaciones en la forma pendiente-ordenada al origen, encontramos que se reducen a la ecuación:

$$y = \tfrac{2}{3}x - 2$$

Respuesta *a*) Ninguna solución; *b*) un número infinito de soluciones.

Dado que las dos ecuaciones son idénticas, las dos líneas coinciden en este caso y las dos ecuaciones dadas son equivalentes. En realidad, la ecuación (ii) puede obtenerse de la ecuación (i) multiplicando la última por $\frac{1}{6}$. En este caso, tenemos un número infinito de soluciones: cualquier pareja de valores (x, y) que satisfaga la ecuación (i) dará una solución. Por ejemplo, una de tales parejas es $(6, 2)$, otra es $(0, -2)$. ☛ **19, 20**

☛ **20.** ¿Para qué valores de c el sistema siguiente no tiene solución y para cuáles tiene un número infinito de soluciones?

$$2y + x + 6 = 0,\ y = c - \frac{1}{2}x$$

El método de sustitución a menudo es útil cuando tenemos un sistema de ecuaciones donde una ecuación es lineal y la otra no.

EJEMPLO 5 Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente:

$$2x - y = 3$$

$$x^2 + y^2 = 5$$

Respuesta Si $c \neq -3$, no tiene solución; si $c = -3$ tiene un número infinito de soluciones.

Solución En este sistema, una de las ecuaciones no es lineal. El método de solución consiste en la eliminación de una de las dos variables, x o y, de las dos ecuaciones. De la primera ecuación, tenemos

$$y = 2x - 3$$

Sustituimos este valor de y en la segunda ecuación y simplificamos.

$$\begin{aligned} x^2 + (2x - 3)^2 &= 5 \\ x^2 + 4x^2 - 12x + 9 &= 5 \\ 5x^2 - 12x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

La factorización que resulta es

$$(x - 2)(5x - 2) = 0$$

Por tanto, tenemos las posibilidades

$$\begin{aligned} x - 2 &= 0 \qquad \text{o bien} \qquad & 5x - 2 &= 0 \\ x &= 2 & x &= \tfrac{2}{5} \end{aligned}$$

Ahora, sustituimos estos valores en la ecuación que usamos al principio para sustituir por y, a saber* $y = 2x - 3$.

$$\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ &= 2(2) - 3 \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \left| \qquad \begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ &= 2\left(\tfrac{2}{5}\right) - 3 \\ &= -\tfrac{11}{5} \end{aligned} \right.$$

☛ **21.** Utilice sustitución para resolver el sistema $x + 2y = 8$, $xy = 6$

En consecuencia, hay dos soluciones:

$$x = 2,\ y = 1 \quad \text{y} \quad x = \tfrac{2}{5},\ y = -\tfrac{11}{5}. \qquad ☛\ \mathbf{21}$$

Continuamos con la resolución de un problema aplicado que requiere ecuaciones simultáneas.

EJEMPLO 6 ***(Mezclas)*** La tienda El Sol, que se especializa en todo tipo de frituras, vende cacahuates a \$0.70 la libra y almendras a \$1.60 la libra. Al final de un mes, el propietario se entera de que los cacahuates no se venden bien y decide mezclar cacahuates con almendras para producir una mezcla de 45 libras, que venderá a \$1.00 la libra. ¿Cuántas libras de cacahuates y de almendras deberá mezclar para mantener los mismos ingresos?

Solución Sea x las libras de cacahuates que la mezcla contiene y y las libras correspondientes de almendras. Dado que el peso total de la mezcla es de 45 libras,

$$x + y = 45$$

El ingreso de x libras de cacahuates a \$0.70 la libra es de $0.7x$ dólares y el ingreso

Respuesta Dos soluciones:

$x = 2$, $y = 3$ y $x = 6$, $y = 1$

*Sería incorrecto sustituir los valores de x en la ecuación no lineal.

de y libras de almendras a \$1.60 la libra es de $1.6y$ dólares. El ingreso obtenido de la mezcla de 45 libras a \$1.00 por libra será de \$45. Dado que el ingreso de la mezcla deberá ser el mismo que el de las frutas separadas, tenemos la siguiente ecuación:

Ingreso de los cacahuates + Ingreso de las almendras = Ingreso de la mezcla

$$0.7x + 1.6y = 45$$

$$7x + 16y = 450$$

De esta manera, llegamos al sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$x + y = 45$$

$$7x + 16y = 450$$

De la primera ecuación, obtenemos que $x = 45 - y$. Luego sustituimos este valor de x en la ecuación de abajo y despejamos y.

$$\begin{aligned} 7(45 - y) + 16y &= 450 \\ 315 - 7y + 16y &= 450 \\ 9y &= 450 - 315 = 135 \\ y &= 15 \end{aligned}$$

☛ **22.** En el ejemplo 6, encuentre las cantidades que deben mezclarse para obtener 40 libras de una mezcla que cueste \$1.15 por libra

Por tanto, $x = 45 - y = 45 - 15 = 30$.

En consecuencia, 30 libras de cacahuates deberán mezclarse con 15 libras de almendras para formar la mezcla. ☛ **22**

El método de sustitución también puede utilizarse con frecuencia para resolver sistemas de ecuaciones con tres o más variables. Tales sistemas se estudian con detalle en la sección 9-3, pero mientras tanto hagamos un ejemplo.

EJEMPLO 7 Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente para x, y y z.

$$\begin{aligned} x - y - z &= 1 \\ 2x + y + 3z &= 6 \\ -4x - 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

Solución Resolvemos la primera ecuación para x en términos de y y z.

$$x = 1 + y + z$$

Enseguida sustituimos esta expresión para x en las dos ecuaciones restantes:

$$\begin{aligned} 2(1 + y + z) + y + 3z &= 6 \\ -4(1 + y + z) - 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

Después de simplificar, obtenemos

$$\begin{aligned} 3y + 5z &= 4 \\ -6y - z &= 10 \end{aligned}$$

Respuesta $x = 20$, $y = 20$

Ahora tenemos que resolver dos ecuaciones en y y z. De la última de éstas tenemos que $z = -6y - 10$ y sustituyendo esto en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 3y + 5(-6y - 10) &= 4 \\ -27y &= 54 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Con la finalidad de completar la solución calculamos z y por último x.

$$z = -6y - 10 = -6(-2) - 10 = 2$$

$$x = 1 + y + z = 1 + (-2) + 2 = 1$$

La solución es, por tanto, $x = 1$, $y = -2$ y $z = 2$.

Observación El método de suma también puede utilizarse para eliminar una de las variables, dejando un sistema de dos ecuaciones para las dos variables restantes.

EJERCICIOS 4-4

(1-24) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

1. $x - y = 1$ y $2x + 3y + 8 = 0$

2. $2x - 3y = 1$ y $5x + 4y = 14$

3. $4x - y = -2$ y $3x + 4y = 27$

4. $3u + 2v = 9$ y $u + 3v = 10$

5. $3x + 5t = 12$ y $4x - 3t = -13$

6. $2p - q = 3$ y $p = 5 - 3q$

7. $7x - 8y = 4$ y $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 3$

8. $\dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{3} = 8$ y $\dfrac{x+y}{3} + \dfrac{x-y}{4} = 11$

9. $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{5} + 1 = \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{4} = 23$

10. $\dfrac{x-2y}{3} = 2 + \dfrac{2x+3y}{4}$ y

$\dfrac{3x-2y}{2} = \dfrac{-y+5x+11}{4}$

11. $5x - 7y + 2 = 0$ y $15x - 21y = 7$

12. $2u - 3v = 12$ y $-\dfrac{u}{3} + \dfrac{v}{2} - 4$

13. $x + 2y = 4$ y $3x + 6y = 12$

14. $2p + q = 3$ y $\frac{2}{3}p + \frac{1}{3}q = 1$

15. $\begin{aligned} x + y &= 3 \\ y + z &= 5 \\ x + z &= 4 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 3y + 5z &= 7 \\ 2x - y &= 7 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x - y + 3z &= 9 \\ -x + 2y + z &= 6 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} x + 2y - z &= -3 \\ + 3y + 4z &= 5 \\ 2x - y + 3z &= 9 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= -4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 5 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} 2u - 2v - 4w &= 13 \\ u + v + w &= 6 \\ -3u + 2v - w + 1 &= 0 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} x + 3y + 4z &= 1, \\ 2x + 7y + z &= -7 \\ 3x + 10y + 8z &= -3 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 3 \\ 4x + 3y &= 9 \\ 2x + 4y + z &= 0 \end{aligned}$

23. $x + y = 3$ y $x^2 + y^2 = 29$

24. $2x + y = 5$ y $xy = 2$

25. *(Purificación de minerales)* Dos metales, X y Y, pueden extraerse de dos tipos de mineral, I y II. Cien libras de mineral I producen 3 onzas de X y 5 onzas de Y, por otro lado, 100 libras del mineral II producen 4 onzas de X y 2.5 onzas de Y. ¿Cuántas libras de los minerales I y II se requerirán para producir 72 onzas de X y 95 onzas de Y?

26. *(Asignación de máquinas)* Una empresa fabrica dos productos, A y B. Cada producto tiene que ser procesado por dos máquinas, I y II. Cada unidad del tipo A requiere 1 hora de procesamiento de la máquina I y 1.5 horas por la máquina II y cada unidad del tipo B requiere de 3 horas en la máquina I y 2 horas en la máquina II. Si la máquina I está disponible 300 horas al mes y la máquina II 350 horas, ¿cuántas unidades de cada tipo podrá fabricar al mes si utiliza el tiempo total que dispone en las dos máquinas?

27. *(Decisiones de adquisición)* Una compañía trata de adquirir y almacenar dos tipos de artículos, X y Y. Cada artículo X cuesta $3 y cada artículo Y cuesta $2.50. Cada artículo X ocupa 2 pies cuadrados del espacio del piso y cada artículo Y ocupa un espacio de 1 pie cuadrado del piso. ¿Cuántas unidades de cada tipo pueden adquirirse y almacenarse si se dispone de $400 para la adquisición y 240 pies cuadrados de espacio para almacenar estos artículos?

28. *(Mezcla de cafés)* Una tienda vende dos tipos de café, uno a $2.00 el kilo y el otro a $1.50 por la misma cantidad. El propietario de la tienda produce 50 kilos de una nuevo producto de café mezclando estos dos tipos y vendiéndolo a $1.60 el kilo. ¿Cuántos kilos de café de cada tipo deberá mezclar para no alterar los ingresos?

29. *(Mezclas)* Un almacén de productos químicos tiene dos tipos de soluciones ácidas. Una de ellas contiene 25% de ácido y la otra contiene 15%. ¿Cuántos galones de cada tipo deberá mezclar para obtener 200 galones de una mezcla que contenga 18% de ácido?

30. *(Política tributaria de los ingresos)* La Secretaría de Hacienda fija cierta tasa de impuestos a los primeros $5000 de ingresos gravables, y una tasa diferente sobre los ingresos gravables por encima de los $5000 pero menores que $10,000. El gobierno desea fijar las tasas de impuestos en tal forma que una persona con un ingreso gravable de $7000 tenga que pagar $950 en impuestos; mientras que otra con un ingreso gravable de $9000 deba pagar $1400 de impuestos. Encuentre las dos tasas.

31. *(Plantilla de personal)* Cierta compañía emplea 53 personas en dos sucursales. De esta gente, 21 son universitarios graduados. Si una tercera parte de las personas que laboran en la primera sucursal; y tres séptimos de los que se encuentran en la segunda sucursal, son universitarios graduados, ¿cuántos empleados tiene cada oficina?

32. *(Inversiones)* Una persona invierte un total de $25,000 en tres diferentes inversiones al 8, 10 y 12%. Los intereses totales al cabo de un año fueron de $2440 y los intereses por las inversiones al 8 y 12% fueron iguales. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

33. *(Decisiones de producción)* Una planta de fertilizantes produce tres tipos de fertilizantes. El tipo A contiene 25% de potasio, 45% de nitrato y 30% de fosfato. El tipo B contiene 15% de potasio, 50% de nitrato y 35% de fosfato. El tipo C no contiene potasio, tiene 75% de nitrato y 25% de fosfato. La planta tiene suministros de 1.5 toneladas diarias de potasio, 5 toneladas al día de nitrato y de 3 toneladas al día de fosfato. ¿Qué cantidad de cada tipo de fertilizante deberá producir de modo que agote los suministros de ingredientes?

34. *(Ecología)* Un pez de la especie 1 consume por día 10 gramos de comida 1 y 5 gramos de comida 2. Un pez de la especie 2 consume por día 6 gramos de comida 1 y 4 gramos de comida 2. Si un medio ambiente dado tiene 2.2 kilogramos de comida 1 y 1.3 kilogramos de comida 2 disponible diariamente, ¿qué tamaño de población de las dos especies consumirá toda la comida disponible?

35. *(Ecología)* Tres especies distintas de pájaros comen pulgones de diferentes partes de los árboles. La especie 1 se alimenta la mitad del tiempo en los niveles altos y la otra mitad del tiempo en los niveles medios de los árboles. La especie 2 se alimenta la mitad en los niveles medios y la mitad en los niveles bajos. La especie 3 se alimenta sólo en los niveles bajos. Hay igual cantidad de pulgones aprovechables en los niveles medios y bajos, pero solamente la mitad correspondiente en los niveles superiores. ¿Qué tamaño relativo deben tener las poblaciones de las tres especies de manera que el suministro de pulgones se consuma por completo?

■ 4-5 APLICACIONES A ADMINISTRACIÓN Y ECONOMÍA

En esta sección analizaremos algunas aplicaciones importantes de los sistemas de ecuaciones.

Análisis del punto de equilibrio

Si el costo total y_c de producción excede al de los ingresos y_I obtenidos por las ventas, entonces el negocio sufre una pérdida. Por otra parte, si los ingresos sobrepasan los costos, existe una utilidad. Si el costo de producción es igual a los ingresos obtenidos por las ventas, no hay utilidad ni pérdida, de modo que el negocio está en el punto de equilibrio. El número de unidades producidas y vendidas en este caso se denomina **punto de equilibrio**.

EJEMPLO 1 ***(Análisis del punto de equilibrio)*** Para un fabricante de relojes, el costo de mano de obra y de los materiales por reloj es de \$15 y los costos fijos son de \$2000 al día. Si vende cada reloj a \$20, ¿cuántos relojes deberá producir y vender cada día con objeto de garantizar que el negocio se mantenga en el punto de equilibrio?

Solución Sea x el número de relojes producidos y vendidos cada día. El costo total de producir x relojes es

$$y_c = \text{Costos variables totales} + \text{Costos fijos} = 15x + 2000$$

Dado que cada reloj se vende a \$20, el ingreso y_I obtenido por vender x relojes es

$$y_I = 20x$$

El punto de equilibrio se obtiene cuando los ingresos son iguales a los costos, es decir,

$$20x = 15x + 2000$$

Obtenemos que $5x = 2000$ o $x = 400$.

De modo que deberá producir y vender al día 400 relojes para garantizar que no haya utilidades ni pérdidas. La figura 26 da una interpretación gráfica del punto de equilibrio. Cuando $x < 400$, el costo y_c excede a los ingresos y_I y hay pérdidas. Cuando $x > 400$, los ingresos y_I exceden los costos y_c de modo que se obtiene una utilidad.

Obsérvese que gráficamente, el punto de equilibrio corresponde a la intersección de las dos líneas rectas. Una de las líneas tiene la ecuación $y = 15x + 2000$, la que corresponde al costo de producción, y la otra tiene la ecuación $y = 20x$, la que corresponde a los ingresos. ☛ **23**

☛ **23.** Si los costos fijos son \$5000 semanales, los costos variables son \$21 por unidad y el precio de venta es \$46 por unidad, determine el punto de equilibrio

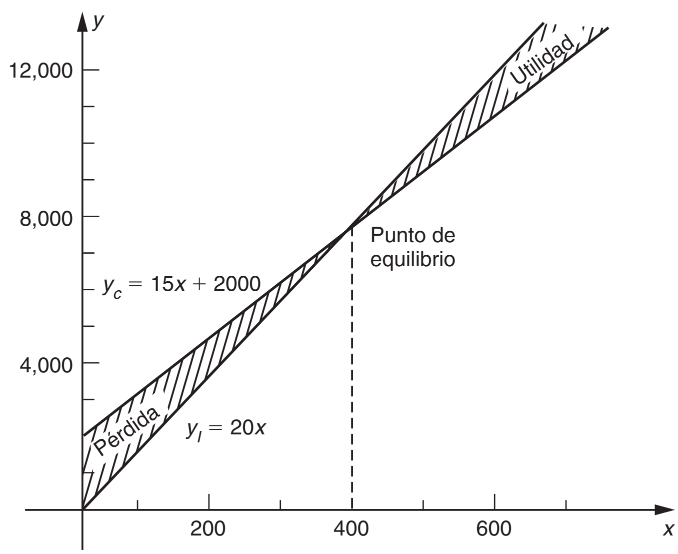


FIGURA 26

Respuesta 200 unidades semanales

EJEMPLO 2 ***(Análisis del punto de equilibrio)*** Supóngase que el costo total diario (en dólares) de producir x sillas está dado por

$$y_c = 2.5x + 300$$

a) Si cada silla se vende a \$4, ¿cuál es el punto de equilibrio?

b) Si el precio de venta se incrementa a \$5 por silla, ¿cuál es el nuevo punto de equilibrio?

c) Si se sabe que al menos 150 sillas pueden venderse al día, ¿qué precio deberá fijarse con el objeto de garantizar que no haya pérdidas?

Solución El costo está dado por

$$y_c = 2.5x + 300$$

a) Si cada silla se vende a \$4, el ingreso (en dólares) obtenido por la venta de x sillas es

$$y_I = 4x$$

En el punto de equilibrio tenemos que $y_c = y_I$; es decir,

$$4x = 2.5x + 300$$

Así, $1.5x = 300$ o $x = 200$. El punto de equilibrio está en 200 sillas.

b) Si el precio de venta se incrementa a \$5 por silla, el ingreso en este caso es

$$y_I = 5x$$

En el punto de equilibrio $y_I = y_c$, de modo que

$$5x = 2.5x + 300$$

En consecuencia, $2.5x = 300$ o $x = 120$. Con el nuevo precio de venta, el punto de equilibrio es de 120 sillas.

c) Sea p dólares el precio fijado a cada silla. Entonces, los ingresos obtenidos por la venta de 150 sillas es $y_I = 150p$ y el costo de producir 150 sillas es $y_c = 2.5(150) + 300 = 675$. Con la finalidad de garantizar una situación de equilibrio debemos tener que $y_I = y_c$; es decir,

$$150p = 675 \quad \text{o} \quad p = 4.50$$

Por tanto, el precio fijado a cada silla debe ser \$4.50 con el propósito de garantizar que no haya ganancias ni pérdidas (en el peor de los casos), si al menos se venden al día 150 sillas.

Debe señalarse que cuando un economista utiliza una relación lineal para describir la dependencia entre dos variables, no se puede afirmar que la verdadera relación pueda ser lineal, sino más bien, que una relación lineal es una buena aproximación de los datos observados sobre el rango que nos interesa. Si los datos observados se encuentran sobre o cerca de una línea recta, podemos usar una relación lineal como una representación aproximada de los datos. La manera en que esto puede realizarse se describirá en la sección 18-6.

Si bien, los datos observados pueden estar cerca de una línea recta, en muchos casos no es así y en tales situaciones no es razonable emplear una ecuación lineal para aproximar la relación entre las dos variables. Por ejemplo, el costo de fabricar x artículos de cierto tipo puede no estar dado por un modelo de costo lineal, $y_c = mx + b$, si no que puede depender de x en una forma más complicada. En principio, un análisis del punto de equilibrio puede quedar sin alteración en tales casos, pero el álgebra requerida para encontrar el punto de equilibrio se complica.

EJEMPLO 3 ***(Análisis no lineal del punto de equilibrio)*** Una compañía de dulces vende sus cajas de chocolates a $2 cada una. Si x es el número de cajas producidas a la semana (en miles), entonces el administrador sabe que los costos de producción están dados, en dólares, por

$$y_c = 1000 + 1300x + 100x^2$$

Determine el nivel de producción en que la compañía no obtiene utilidades ni pérdidas (punto de equilibrio).

Solución Los ingresos por vender x miles de cajas a $2 cada una están dados por

$$y_I = 2000x$$

Con el objeto de quedar en el punto de equilibrio, los ingresos deben ser iguales a los costos; de modo que

$$1000 + 1300x + 100x^2 = 2000x$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre 100 y pasando todos los términos a la izquierda, tenemos que

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

Si factorizamos esta expresión, obtenemos

$$(x - 2)(x - 5) = 0$$

y así $x = 2$ y $x = 5$.

Por tanto, encontramos que hay dos puntos de equilibrio en este problema. La compañía puede decidir fabricar 2000 cajas a la semana ($x = 2$), con ingresos y costos iguales a $4000. O puede fabricar 5000 cajas a la semana ($x = 5$), cuando los ingresos y los costos estén otra vez en un equilibrio de $10,000.

En este ejemplo es conveniente considerar las utilidades de la compañía. La utilidad mensual U está dada por los ingresos menos los costos.

$$\begin{aligned} U &= y_I - y_c \\ &= 2000x - (1000 + 1300x + 100x^2) \\ &= -1000 + 700x - 100x^2 \\ &= -100(x - 2)(x - 5) \end{aligned}$$

☛ **24.** Si los costos diarios de una compañía son 20,000 + 200x – x^2, cuando se producen x unidades en un día, y el precio de venta es \$100 por unidad, determine el punto de equilibrio.

Cuando $x = 2$ o 5, la utilidad es cero y éstos son los puntos de equilibrio. Cuando $2 < x < 5$, tenemos que $x - 2 > 0$ y $x - 5 < 0$. Dado que el producto contiene dos signos negativos, U es positiva en este caso. En consecuencia, la compañía obtiene una utilidad positiva cuando $2 < x < 5$; es decir, cuando fabrica y vende entre 2000 y 5000 cajas a la semana. ☛ **24**

Punto de equilibrio del mercado

Si el precio de cierto artículo es demasiado alto, los consumidores no lo adquirirán, mientras que si es demasiado bajo, los proveedores no lo venderán. En un mercado competitivo, cuando el precio por unidad depende sólo de la cantidad demandada y de la oferta, siempre existe una tendencia del precio a ajustarse por sí mismo, de modo que la cantidad demandada por los consumidores iguale la cantidad que los productores están dispuestos a ofrecer. Se dice que el **punto de equilibrio del mercado** ocurre en un precio cuando la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida. Esto corresponde al punto de intersección de las curvas de la oferta y la demanda. (Véase la figura 27).*

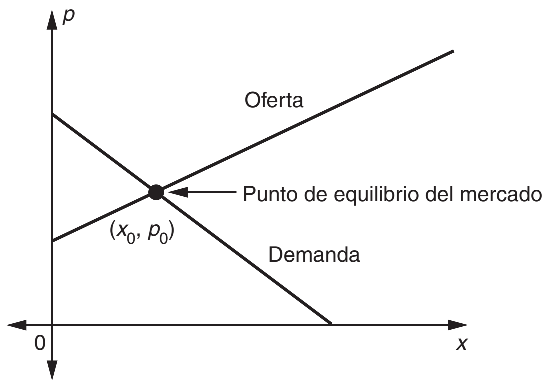


FIGURA 27

Algebraicamente, el precio de equilibrio del mercado p_0 y la cantidad de equilibrio x_0 se determina resolviendo las ecuaciones de la oferta y la demanda simultáneamente para p y x. Nótese que el precio y la cantidad de equilibrio sólo tienen sentido cuando no son negativas.

EJEMPLO 4 Determine el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio de las leyes de la oferta y la demanda siguientes:

$$D: \quad p = 25 - 2x \tag{1}$$

$$S: \quad p = 3x + 5 \tag{2}$$

Solución Igualando los dos valores de p en las ecuaciones (1) y (2), tenemos que

$$3x + 5 = 25 - 2x$$

*Algunos modelos sencillos de la forma en que un mercado se autoajusta al equilibrio se describen en la sección 17-6.

Respuesta 200 unidades diarias.

☛ **25.** Si la ley de la demanda es $2p + 3x = 36$ y la ley de la oferta es $2p = x + 12$, grafique las curvas de la oferta y la demanda y determine el punto de equilibrio del mercado.

Fácilmente se ve que la solución es $x = 4$. Sustituyendo $x = 4$ en la ecuación (1), resulta

$$p = 25 - 8 = 17$$

En consecuencia, el precio de equilibrio es 17 y la cantidad de equilibrio es de 4 unidades. Las gráficas de las curvas de la oferta y la demanda aparecen en la siguiente figura.

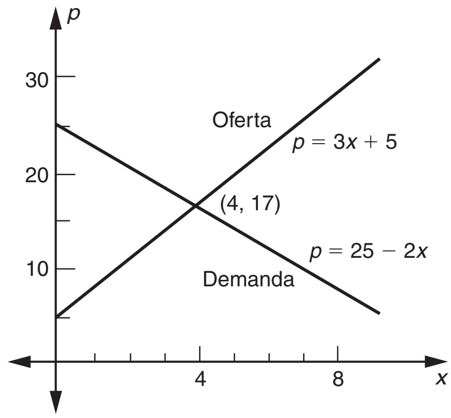


FIGURA 28

EJEMPLO 5 Si las ecuaciones de la demanda y la oferta son, respectivamente,

$$D: \quad 3p + 5x = 22 \tag{3}$$
$$S: \quad 2p - 3x = 2x \tag{4}$$

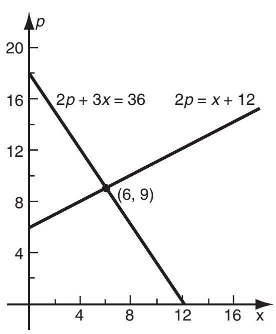
determine los valores de x y p en el punto de equilibrio del mercado.

Solución Las ecuaciones (3) y (4) forman un sistema de ecuaciones lineales en las variables x y p. Resolvamos este sistema por el método de eliminación. Multiplicando ambos lados de la ecuación (3) por 3 y los dos miembros de la ecuación (4) por 5, obtenemos

$$9p + 15x = 66$$
$$10p - 15x = 10$$

Enseguida sumamos estas dos ecuaciones y simplificamos.

Respuesta $x = 6, p = 9$



$$9p + 15x + 10p - 15x = 66 + 10$$
$$19p = 76$$

Así que, $p = 4$. Sustituyendo este valor de p en la ecuación (3), obtenemos

$$3(4) + 5x = 22$$

Por tanto, $x = 2$. El punto de equilibrio del mercado ocurre cuando $p = 4$ y $x = 2$. ☛ **25**

Como la mayoría de las relaciones lineales en economía, las ecuaciones lineales de demanda y oferta dan una representación aproximada de las relaciones exactas entre precio y cantidad, y surgen casos en que tales aproximaciones lineales no son adecuadas. La determinación del punto de equilibrio del mercado, cuando la ecuación de demanda o la ecuación de la oferta (o ambas) no son lineales, pueden requerir cálculos muy complicados.

EJEMPLO 6 ***(Punto de equilibrio del mercado)*** La demanda para los bienes producidos por una industria están dados por la ecuación $p^2 + x^2 = 169$, en donde p es el precio y x es la cantidad demandada. La oferta está dada por $p = x + 7$. ¿Cuáles son el precio y la cantidad del punto de equilibrio?

Solución El precio y la cantidad del punto de equilibrio son los valores positivos de p y x que satisfacen a la vez las ecuaciones de la oferta y la demanda.

$$p^2 + x^2 = 169 \tag{5}$$

$$p = x + 7 \tag{6}$$

Sustituyendo el valor de p de la ecuación (6) en la ecuación (5) y simplificando, resulta:

$$\begin{aligned} (x + 7)^2 + x^2 &= 169 \\ 2x^2 + 14x + 49 &= 169 \\ x^2 + 7x - 60 &= 0 \end{aligned}$$

Factorizando, encontramos que

$$(x + 12)(x - 5) = 0$$

lo cual da $x = -12$ o 5. El valor negativo de x es inadmisible, de modo que $x = 5$. Sustituyendo $x = 5$ en la ecuación (6),

$$p = 5 + 7 = 12$$

En consecuencia, el precio de equilibrio es 12 y la cantidad de equilibrio es 5.

Impuestos especiales y punto de equilibrio del mercado

Con frecuencia, el gobierno grava con impuestos adicionales ciertos artículos con el propósito de obtener más ingresos o dar más subsidios a los productores, para que hagan accesibles estos artículos a los consumidores a precios razonables. Consideraremos el efecto de un impuesto adicional o subsidio sobre el punto de equilibrio del mercado con las suposiciones siguientes:

1. La cantidad demandada por los consumidores sólo depende del precio de mercado. Denote este precio pagado por los consumidores mediante p_c.

2. La cantidad ofrecida por los proveedores está determinada por el precio recibido por ellos. Denote este precio por medio de p_s.

3. El precio pagado por los consumidores iguala al precio recibido por los proveedores más el impuesto t por unidad: $p_c = p_s + t$. Si, en lugar de eso, se da un subsidio de s por unidad, entonces $p_c = p_s - s$.

EJEMPLO 7 ***(Subsidio y punto de equilibrio del mercado)*** La ley de la demanda para cierto artículo es $5p + 2x = 200$ y la ley de la oferta es $p = \frac{4}{5}x + 10$.

a) Determine el precio y cantidad de equilibrio.

b) Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio después de que se ha fijado un impuesto de 6 por unidad. Determine el incremento en el precio y la disminución en la cantidad demandada.

c) ¿Qué subsidio provocará que la cantidad demandada se incremente en 2 unidades?

Solución Las ecuaciones de demanda y de oferta son las siguientes:

$$D: \quad 5p + 2x = 200 \tag{7}$$

$$S: \quad p = \tfrac{4}{5}x + 10 \tag{8}$$

a) Sustituyendo el valor de p de la ecuación (8) en la ecuación (7) y simplificando obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 5(\tfrac{4}{5}x + 10) + 2x &= 200 \\ 4x + 50 + 2x &= 200 \\ 6x &= 150 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

Por tanto, de la ecuación (8),

$$p = \tfrac{4}{5}(25) + 10 = 20 + 10 = 30$$

En consecuencia, el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio antes del gravamen son

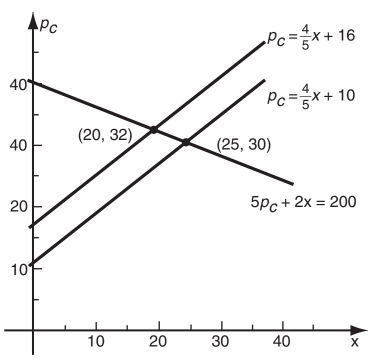
$$p = 30 \quad \text{y} \quad x = 25$$

b) Sea p_c el precio pagado por los consumidores y p_s el precio recibido por los proveedores. Entonces las ecuaciones (7) y (8) se transforman en

$$D: \quad 5p_c + 2x = 200 \tag{9}$$

$$S: \quad p = \tfrac{4}{5}x + 10 \tag{10}$$

Respuesta En el plano de x y precio del consumidor, p_c, el efecto de los impuestos, es mover la curva de la oferta hacia arriba.



Si se cobra un impuesto de 6 por unidad, entonces $p_c = p_s + 6$, de modo que la ecuación de oferta puede escribirse como

$$S: \quad p_c - 6 = \tfrac{4}{5}x + 10$$

o

$$p_c = \tfrac{4}{5}x + 16 \tag{11}$$

Sustituyendo el valor de p_c de la ecuación (11) en la ecuación (9), obtenemos

$$5(\tfrac{4}{5}x + 16) + 2x = 200$$

La solución es $x = 20$. Por tanto, de la ecuación (11),

$$p_c = \tfrac{4}{5}(20) + 16 = 32$$

☛ **26.** En el ejemplo 7, grafique las ecuaciones de la oferta y demandas originales (7) y (8) y las ecuaciones de la oferta y la demanda modificadas (9) y (11) en los mismos ejes. Muestre los dos puntos de equilibrio. Geométricamente, ¿cuál es el efecto de los impuestos a las ventas?

☛ **27.** Vuelva a resolver las partes *a*) y *b*) del ejercicio 7, si la ecuación de la oferta se cambia a $p = x + 12$ y si, en la parte *b*), se cobra un impuesto a las ventas de 7 por unidad.

Respuesta *a*) $x = 20$, $p = 32$
b) $x = 15$, $p_c = 34$

Comparando con la parte *a*), vemos que el efecto de los impuestos es aumentar el precio del mercado en 2 (de 30 a 32) y disminuir la demanda del mercado en 5 (de 25 a 20). ☛ **26, 27**

c) Nuevamente sea p_c el precio pagado por los consumidores y p_s el precio recibido por los proveedores, de modo que las ecuaciones de demanda y oferta aún están dadas por las ecuaciones (9) y (10). Esta vez, $p_c = p_s - s$, en donde s es el subsidio por unidad.

Deseamos tener demanda de 2 más que la demanda de equilibrio de 25, esto es $x = 27$. Entonces, de la ecuación (9),

$$p_c = \tfrac{1}{5}(200 - 2x) = \tfrac{1}{5}(200 - 54) = 29.2$$

y de la ecuación (10),

$$p_s = 10 + \tfrac{4}{5}x = 10 + \tfrac{4}{5}(27) = 31.6$$

Por tanto, $s = p_s - p_c = 31.6 - 29.2 = 2.4$. Un subsidio de 2.4 por unidad aumentará la demanda en 2 unidades.

EJERCICIOS 4-5

1. *(Análisis del punto de equilibrio)* El costo variable de producir cierto artículo es de 90¢ por unidad y los costos fijos son de \$240 al día. El artículo se vende por \$1.20 cada uno. ¿Cuántos artículos deberá producir y vender para garantizar que no haya ganancias ni pérdidas?

2. *(Análisis del punto de equilibrio)* Los costos fijos por producir cierto artículo son de \$5000 al mes y los costos variables son de \$3.50 por unidad. Si el productor vende cada uno a \$6.00, responda a cada uno de los incisos siguientes.
a) Encuentre el punto de equilibrio.
b) Determine el número de unidades que deben producirse y venderse al mes para obtener una utilidad de \$1000 mensuales.
c) Obtenga la pérdida cuando sólo 1500 unidades se producen y venden cada mes.

3. *(Análisis del punto de equilibrio)* El costo de producir x artículos está dado por $y_c = 2.8x + 600$ y cada artículo se vende a \$4.00.
a) Encuentre el punto de equilibrio.
b) Si se sabe que al menos 450 unidades se venderán, ¿cuál debería ser el precio fijado a cada artículo para garantizar que no haya pérdidas?

4. *(Análisis del punto de equilibrio)* Un fabricante produce artículos a un costo variable de 85¢ cada uno y los costos fijos son de \$280 al día. Si cada artículo puede venderse a \$1.10, determine el punto de equilibrio

5. *(Análisis del punto de equilibrio)* En el ejercicio 4, si el fabricante puede reducir el costo variable a 70¢ por artículo incrementando los costos diarios a \$350, ¿es ventajoso hacerlo así? (Tal reducción sería posible; por ejemplo, adquiriendo una nueva máquina que bajara los costos de producción pero que incrementara el cargo por intereses).

6. *(Análisis del punto de equilibrio)* El costo de producir x artículos a la semana está dado por $y_c = 1000 + 5x$. Si cada artículo puede venderse a \$7, determine el punto de equilibrio. Si el fabricante puede reducir los costos variables a \$4 por artículo incrementando los costos fijos a \$1200 a la semana, ¿le convendría hacerlo?

7. *(Análisis no lineal del punto de equilibrio)* El costo de producir x artículos al día está dado en dólares por $y_c = 80 + 4x + 0.1x^2$. Si cada artículo puede venderse a \$10, determine el punto de equilibrio.

***8.** *(Análisis no lineal del punto de equilibrio)* El costo de producir x artículos al día está dado en dólares por $y_c = 2000 + 100\sqrt{x}$. Si cada artículo puede venderse a \$10, encuentre el punto de equilibrio.

(9-14) (*Equilibrio del mercado*) Determine el precio y cantidad de equilibrio para las curvas de demanda y oferta siguientes:

9. D: $2p + 3x = 100$
S: $p = \frac{1}{10}x + 2$

10. D: $3p + 5x = 200$
S: $7p - 3x = 56$

11. D: $4p + x = 50$
S: $6p - 5x = 10$

12. D: $5p + 8x = 80$
S: $3x = 2p - 1$

13. D: $p^2 + x^2 = 25$
S: $p = x + 1$

14. D: $p^2 + 2x^2 = 114$
S: $p = x + 3$

15. *(Equilibrio de mercado)* Un comerciante puede vender diariamente 200 unidades de cierto bien en $30 por unidad y 250 unidades en $27 por unidad. La ecuación de oferta para ese bien es $6p = x + 48$.

a) Determine la ecuación de demanda para el bien, suponga que es lineal.

b) Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio.

c) Determine el precio y la cantidad de equilibrio, si se cobra un impuesto de $3.40 por unidad del bien. ¿Cuál es el aumento en el precio y cuál la disminución en la cantidad demandada?

d) ¿Qué subsidio por unidad aumentará la demanda en 24 unidades?

e) ¿Qué impuesto aditivo por unidad debe cobrarse en el bien, de modo que el precio de equilibrio por unidad aumente en $1.08?

16. *(Equilibrio de mercado)* A un precio de $2400, la oferta de cierto bien es de 120 unidades; mientras que su demanda es 560 unidades. Si el precio aumenta a $2700 por unidad, la oferta y la demanda serán de 160 y 380 unidades, respectivamente.

a) Determine las ecuaciones de demanda y oferta, suponiendo que son lineales.

b) Determine el precio y la cantidad de equilibrio.

c) Si se cobra un impuesto al bien de $110 por unidad, ¿cuáles son los nuevos precio y cantidad de equilibrio? ¿Cuál es el aumento en el precio y la disminución en la cantidad?

d) ¿Qué subsidio por unidad disminuirá el precio de mercado en $15?

(17-18) *(Demanda insuficiente)* Resuelva las siguientes ecuaciones de oferta y demanda. Explique en dónde estaría el equilibrio del mercado.

17. S: $p = x + 5$
D: $3p + 4x = 12$

18. S: $2p - 3x = 8$
D: $3p + 6x = 9$

19. *(Equilibrio de mercado)* Para cierto producto, si el precio es $4 por unidad, los consumidores comprarán 10,000 unidades mensuales. Si el precio es $5 por unidad, los consumidores comprarán 9000 unidades mensuales.

a) Suponiendo que la curva de la demanda es un línea recta, determine su ecuación.

b) La ecuación de oferta para este producto es

$$p = \begin{cases} 3.2 + \left(\dfrac{q}{2000}\right) & \text{si } 0 \le q \le 6000 \\[2ex] 5 + \left(\dfrac{q}{5000}\right) & \text{si } 6000 \le q \end{cases}$$

Determine el punto de equilibrio y la cantidad total gastada por los consumidores en este producto en el precio de equilibrio.

20. *(Múltiples puntos de equilibrio del mercado)* Un proveedor monopolizador de cierto bien está contento con suministrar una cantidad suficiente para garantizar un ingreso constante. Así, la relación de la oferta tiene la forma xp = constante. Si la relación de la oferta es $xp = 3$ y la relación de demanda es $x + p = 4$, encuentre los puntos de equilibrio del mercado.

21. *(Múltiples puntos de equilibrio del mercado)* En el ejercicio anterior encuentre los puntos de equilibrio del mercado para la relación de oferta $xp = 5$ y la relación de demanda $3x + 4p = 30$.

22. *(Múltiples puntos de equilibrio del mercado)* Para un bien en particular la relación de la oferta es

$$x = \begin{cases} 6p & \text{si } 0 \le p < 1 \\[2ex] \dfrac{6}{p} & \text{si } p \ge 1 \end{cases}$$

y la relación de la demanda es $x + 2p = 7$. Determine los puntos de equilibrio del mercado.

***23.** *(Estabilidad del mercado)* Un punto de equilibrio del mercado es estable si, cuando el precio del mercado se mueve ligeramente de su valor de equilibrio, existe una tendencia para que el precio se dirija de regreso hacia el equilibrio. Sea p_0 el precio de equilibrio. Supóngase que para $p > p_0$ la cantidad suministrada, x_p, excede a la cantidad demandada, x_D. Entonces habrá una tendencia a que el precio caiga. Esto es el mercado será estable bajo aumento de precios si $x_s > x_D$ siempre que $p > p_0$. De manera análoga, si $x_s < x_D$ siempre que $p < p_0$, el mercado estará estable bajo disminución de precios. Demuestre que todos los puntos de equilibrio del mercado en los ejercicios 9 a 14 son estables. Discuta la estabilidad de cada uno de los puntos de equilibrio múltiples de los ejercicios 20 a 22.

REPASO DEL CAPÍTULO 4

Términos, símbolos y conceptos importantes

4.1 Plano cartesiano o plano xy, ejes de coordenadas, eje x, eje y, origen.
Coordenadas cartesianas, abscisa o coordenada x, ordenada o coordenada y.
Primero, segundo, tercero y cuarto cuadrantes.
Gráfica de una ecuación.

4.2 Elevación y desplazamiento (recorrido) de P a Q. Pendiente de una recta.
Fórmula punto pendiente. Fórmula pendiente ordenada al origen. Ecuación lineal general.
Rectas horizontal y vertical.
Rectas paralelas y perpendiculares.
Graficación de una ecuación lineal utilizando las intercepciones o usando un punto y la pendiente.

4.3 Modelo lineal de costos, costos fijos, costos variables.
Depreciación lineal. Tasa de sustitución.
Ley de la demanda, curva de demanda. Ley de la oferta, curva de oferta.

4.4 Sistema de ecuaciones lineales. Solución de un sistema de ecuaciones.
Método de sustitución. Método de la suma.
Interpretación geométrica de un sistema y su solución.

4.5 Punto de equilibrio.
Equilibrio del mercado, precio y cantidad de equilibrio.
Impuesto a las ventas, subsidio.

Fórmulas

La fórmula de distancia: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Pendiente de una recta: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Fórmula punto pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Fórmula pendiente ordenada al origen: $y = mx + b$

Recta horizontal: $y = b$. Recta vertical: $x = a$

Ecuación lineal general: $Ax + By + C = 0$

Rectas paralelas: $m_1 = m_2$

Rectas perpendiculares: $m_1 \cdot m_2 = -1$

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 4

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las proposiciones siguientes. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) Cada punto en el eje x tiene abscisaigual a cero.

b) Cada punto en el eje y tiene coordenada y igual a cero.

c) Si un punto está en el tercer cuadrante, entonces $x \leq 0$ y $y \leq 0$.

d) Una recta horizontal tiene pendiente igual a cero.

e) La pendiente de la recta que pasa por los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) tiene pendiente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, para cualesquiera valores x_1, x_2, y_1, y_2.

f) La ecuación $y = k$, con k una constante representa una recta vertical.

g) La distancia del punto (a, b) al origen $(0, 0)$ está dada por $a^2 + b^2$.

h) Si $x \cdot y < 0$, entonces el punto (x, y) está en el segundo o tercer cuadrante.

i) Si $x \cdot y > 0$, entonces el punto (x, y) está en el primero o tercer cuadrante.

j) Si una recta asciende cuando avanza de izquierda aderecha, entonces la pendiente de la recta es positiva.

k) La ecuación de cualquier recta vertical es de la forma $x = k$, con k una constante.

l) Si el costo variable por unidad por producir cierto artículo es constante, entonces el artículo sigue un modelo de costo lineal.

m) La ecuación $Ax + By + C = 0$ representa una línea recta para cualesquiera valores de A, B y C.

(2-12) Determine una ecuación para la recta que cumple conlas condiciones dadas.

2. Pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(-5, 10)$

3. Pasa por los puntos $(7, 3)$ y $(5, 4)$

4. Pasa por los puntos $(2, 0)$ y $(0, -7)$

5. Pasa por los puntos $(3, 0)$ y $(5, 0)$

6. Pasa por los puntos (0, 0) y (7, 6)

7. Pasa por los punto (0, 6) y tiene pendiente 3

8. Pasa por el punto $(-2, 3)$ y tiene pendiente $\frac{1}{2}$

9. Pasa por el punto $(-2, 5)$ y tiene pendiente 0

10. Pasa por el punto $(-3, 8)$ y su pendiente no está definida.

11. Pasa por el punto de intersección de las rectas $x - 2y - 6 = 0$ y $3x - 5y - 8 = 0$ y es paralela a la recta $x - 3y + 1 = 0$

12. Pasa por el punto de intersección de las rectas $3x + 4y - 10 = 0$ y $7x + 9y - 12 = 0$ y es perpendicular a la recta $2x + 5y + 10 = 0$

13. Determine las coordenadas de las intersecciones de la recta $7x - 2y + 42 = 0$ con los ejes de coordenadas.

14. Determine las intersecciones con los ejes de coordenadas de la recta que pasa por $(2, -1)$ y es perpendicular a la recta $5x + 2y - 5 = 0$

(15-30) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

15. $x - 2y = 6;\ 3x - 5y = 8$

16. $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2;\ \frac{3x}{2} + \frac{5y}{3} = 14$

17. $\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{31}{14};\ \frac{3}{2x} - \frac{5}{3y} = \frac{43}{84}$

18. $3a - b = 1;\ a + 2b = 5$

19. $2x + 3y = -1;\ 2x + y = 5$

20. $3p + q = 4;\ 12p + 4q = 10$

21. $6x + 15y = 3;\ 2x + 5y = 1$

22. $2x - 5y = 12;\ 6x - 15y = 24$

23.

$$\begin{aligned} 2u + 3v - 8w &= -47 \\ u + v + w &= 3 \\ 5u + 2v + w &= 4 \end{aligned}$$

***24.**

$$\begin{aligned} 2p - 3q - 2r &= 1 \\ 5p + 6q + r &= 1 \\ -17p + 3q + 6r &= 1 \end{aligned}$$

25.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} - \frac{3}{y} - \frac{2}{z} &= 1 \\ \frac{5}{x} + \frac{6}{y} + \frac{1}{z} &= 1 \\ \frac{-17}{x} + \frac{3}{y} + \frac{6}{z} &= 1 \end{aligned}$$

(*Sugerencia:* Haga $p = \frac{1}{x}$, $q = \frac{1}{y}$ y $r = \frac{1}{z}$)

26.

$$\begin{aligned} 5x + 3y + 2z &= 11 \\ -3x + 2y - 7z &= -26 \\ 8x - y + z &= 3 \end{aligned}$$

***27.** $\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{6};\ xy = 6$

***28.** $2x + 3y = 4;\ 6xy = -21$

***29.** $2u + 3v = 3;\ \frac{2}{u} - \frac{5}{v} = -\frac{7}{3}$

***30.** $pq = 3;\ 14p - 6q = -9$

(31-50)

31. *(Distribución de materia prima)* Una empresa fabrica sillas y mesas, para cada silla utiliza 2 tablones de caoba y para cada mesa 5 tablones de caoba. Si se disponen de 400 tablones de caoba en la bodega, encuentre una relación entre el número de sillas y mesas que pueden fabricarse si se utilizan todos los tablones de caoba.

32. *(Modelo lineal de costo)* Jonathan Chávez produce juguetes didácticos, para la fabricación de estos juguetes tiene costos fijos mensuales de \$2000 y el costo de producir cada unidad es \$25. Determine una ecuación que relacione los costos. ¿Cuál es el costo de producir 200 juguetes?

33. *(Inversiones)* Ana Jimena recibió \$2800 por concepto de intereses por dos inversiones, con la primera ganó 5% y con la segunda 6%. Si este año las tasas de interés se cambian y los ingresos serán de \$2700, ¿cuál es el monto de cada inversión?

34. *(Mezcla de nueces)* Verónica Pérez mezcló 10 kilogramos de nueces con 20 kilogramos de pistaches para obtener una mezcla de 30 kg con un valor de \$420. Después elaboró otra mezcla de 23 kilogramos con un valor de total de \$300, ésta la obtuvo mezclando 15 kilogramos de nueces con 8 kilogramos de pistaches. ¿Cuál es el precio por kilogramo de las nueces y de los pistaches?

35. *(Modelo lineal de costo)* Francisco González en su negocio tiene costos fijos de \$2500 y costos variables de \$20 por unidad. Determine una ecuación que relacione los costos con la producción. ¿Cuál es el costo de producir 150 unidades?

36. *(Modelo lineal de costo)* Christian Jiménez determina que si produce 100 artículos el costo total es de \$500, mientras que si produce 150 artículos el costo total es de \$600. Si supone que el modelo de costo-producción es lineal, determine el costo fijo y los costos variables. ¿Cuál será el costo de producir 200 artículos?

37. *(Inversiones)* Paloma Verónica tiene dos inversiones en la primera obtiene una tasa de interés de 6%, en la segunda la tasa es de 8% y el total de intereses que obtuvo por las dos inversiones fue \$220. Si el monto que invirtió en la primera fue el doble de lo que invirtió en la segunda, ¿cuánto invirtió en cada una de ellas?

38. *(Decisiones sobre fabricación)* Gustavo Maldonado fabrica relojes los entrega en un estuche de madera. Cada estuche lo compra en $5. Él está considerando fabricarlos estuches con costos fijos de $2500 al año y un costo variable de $2.50 por estuche. ¿Cuántos estuches debe requerir Gustavo al año para justificar que éllos produzca?

39. *(Mezclas)* Atenea Acosta, profesora de química, en el laboratorio tiene dos soluciones de ácido sulfúrico una al 10% y otra al 5%. ¿Cuántos litros de cada solución debe mezclar para obtener una solución de ácido al 8%?

40. *(Mezclas)* En su dulcería Gustavo Olivas vende caramelos y chocolates. Los caramelos los vende a $0.50 cada 100 gramos y los chocolates a $0.80 los 100 gramos. Si Gustavo hará 30 bolsitas, con una mezcla de chocolates y caramelos, cada una con 100 gramos, ¿cuántos gramos de chocolates y cuántos gramos de caramelos debe mezclar para que el costo de la mezcla sea de $0.70 por cada 100 gramos?

41. *(Punto de equilibrio)* Áurea y Manuel Ortuño determinan que el punto de equilibrio del mercado para su producto ocurre cuando el volumen de ventas alcanza $70,000. Los costos fijos son $30,000 y cada unidad se vende en $140. Determine el costo variable por unidad.

42. *(Punto de equilibrio, ingresos y pérdidas)* Carolina Leticia vende collares en $9 cada uno, y vende todos los que pueda producir. Si los costos fijos al año son $4500 y los costos variables son $6 por collar.

a) ¿Cuántos collares debe producir y vender Carolina Leticia para que llegue al equilibrio?

b) Determine elingreso total recibido por la venta de collares en el punto de equilibrio.

c) ¿Cuántos collares debe producir y vender para tener una ganancia de $30,000?

d) ¿Cuántos collares debe producir y vender para tener una pérdida de $900?

43. *(Punto de equilibrio del mercado)* Si las leyes de la demanda y la oferta de un producto son las siguientes:

$$D\colon p = 30 - 2x$$

$$S\colon p = 5x + 2$$

determine el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio.

44. *(Punto de equilibrio del mercado)* Una compañía que produce fósforos vende sus cajas de cerillas a $0.50 cada una. Si x es el número de cajas producidas a la semana (en miles), entonces Samantha Omaña, la administradora, sabe que los costos de producción están dados por

$$yc = 20x^2 + 240x + 800$$

Determine el nivel de producción en el que la compañía llega al punto de equilibrio.

45. *(Utilidades y pérdidas)* Con respecto al problema anterior,

a) Determine el nivel de producción para obtener una ganancia de $6080 semanales.

b) Si en una semana se tienen pérdidas por $45, ¿cuál fue el nivel de producción?

46. *(Impuesto y punto de equilibrio del mercado)* La ley de la demanda para cierto artículo es $20 + 8x = 1600$ y la ley de la oferta es $3x - 4p = 140$.

a) Determine el precio y la cantidad de equilibrio.

b) Determine el precio y la cantidad de equilibrio después de que se ha fijado un impuesto de $4 por unidad.

c) Determine el incremento en el precio y la disminución en la cantidad demandada.

47. *(Inversiones)* Gerardo Villaseñor invierte un total de $10,000 en papel comercial, bonos y depósito a plazo fijo, que le producen intereses a tasas de interés de 6%, 5% y 8%, respectivamente. Si el total que recibe por los intereses es $660 y recibe la misma cantidad de intereses por las inversiones en bonos y papel comercial, determine la cantidad que invirtió Gerardo en cada tipo de inversión.

48. *(Decisiones sobre producción)* Para la producción mensual de mochilas para viaje, Blanca Azucena puede hacerlo fabricándolas por completo en su taller, o bien encargar parte del proceso a una empresa y realizar la terminación en su taller. El costo de producir x unidades por el primer método es $(8x + 3500)$ dólares, mientras que por el segundo método cuestan $(13x + 700)$ dólares. Blanca Azucena puede vender todas las mochilas que produzca a $25 cada una. ¿Cuál método de producción deberá utilizar si las ventas proyectadas en un mes son de:

a) 200 mochilas?

b) 400 mochilas?

c) 800 mochilas?

49. (Relación de demanda) Un súbito aumento en el costo de la plata obligó a una compañía fabricante de rollos fotográficos a incrementar el precio del rollo para 20 exposiciones de $2.25 a $2.50. Como resultado de esta decisión, las ventas mensuales cayeron de 3 a 2.6 millones de rollos.

a) Determine la relación lineal (en la forma pendiente-ordenada al origen) que describa el precio p en dólares en términos de las ventas mensuales x expresadas en millones de rollos.

b) Suponiendo que la relación lineal deducida se sigue cumpliendo, ¿qué hubiese sucedido con las ventas si la compañía baja su precio a $2.00 por rollo?

50. *(Decisiones sobre fabricación o maquilación)* Camas *El Sueño Tranquilo* compra las cabeceras para la cama al precio de $250 cada una. Cecilio Shamar, el administrador, está considerando fabricar sus propias cabeceras con costos fijos de $50,000 al año y un costo variable de $130 por cada cabecera. ¿Cuántas cabeceras debe requerir al año para justificar su fabricación por la empresa misma?

CASO DE ESTUDIO

EL PROBLEMA DE LA SEÑORA BENÍTEZ

Recordemos las opciones que tenía la señora Benítez para elegir su pago mensual:

1. Sueldo base mensual de \$4000 más 4% de comisión sobre las ventas realizadas en el mes.
2. Sueldo mensual de \$2500 más 5% de comisión sobre las ventas realizadas durante el mes.
3. Sueldo base mensual de \$4500 más 2.6% de comisión sobre las ventas realizadas en el mes.
4. Comisión de 6% sobre las ventas realizadas durante el mes. Cada paquete de cómputo tiene un valor de \$6,000.

El pago del mes, para cada una de las opciones está dado por:

Pago del mes = sueldo base + (6000) × (número de paquetes vendidos) × (porcentaje de la comisión)

Note que en el caso de la última opción, el sueldo base es cero. Si representamos por x a la cantidad de paquetes de cómputo que vende, entonces vemos que el pago para cada una de las opciones puede escribirse como:

$P_1(x) = 4000 + (6000x)\,(0.04)$

$P_2(x) = 2500 + (6000x)\,(0.05)$

$P_3(x) = 4500 + (6000x)\,(0.026)$ y

$P_4(x) = 0 + (6000x)\,(0.06)$

o bien,

$P1(x) = 4000 + 240x$

$P2(x) = 2500 + 300x$

$P3(x) = 4500 + 156x$ y

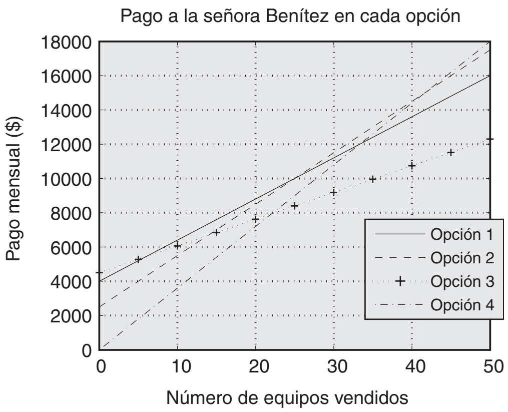
$P4(x) = 360x$

Es interesante comparar las anteriores con la ecuación:

$$y = mx + b$$

que es la ecuación de una recta en la forma pendiente ordenada al origen. Además, note que la ordenada al origen, b, no es otra cosa que el sueldo base; mientras que la pendiente, m, es lo que recibe la señora Benítez por cada paquete de cómputo que vende.

Ahora bien, para decidir cuál de ellas es la mejor opción, utilizando las técnicas vistas en este capítulo, grafiquemos las cuatro rectas de pago mensual. Al hacerlo en el mismo sistema de coordenadas, obtenemos lo siguiente:



La figura anterior nos indica que la decisión de la señora Benítez dependerá del número de equipos de cómputo que espera vender cada mes; con base en la figura y calculando los puntos de intersección podemos construir una "tabla de decisión". Recuerde que en realidad sólo estamos interesados en los valores enteros de la variable x (número de paquetes vendidos).

Número de paquetes que espera vender	Mejor opción
De 0 a 5 paquetes	3
De 6 a 24 paquetes	1
25 paquetes	1 y 2, en ambas recibiría \$10,000, como pago mensual.
26 a 41 paquetes	paquetes 2
Más de 41 paquetes	paquetes 4

Por tanto, dependiendo de las expectativas de venta que tenga la señora Benítez, será la decisión que debe tomar.

Construya una tabla similar a la anterior para cada una de las variantes del problema original.

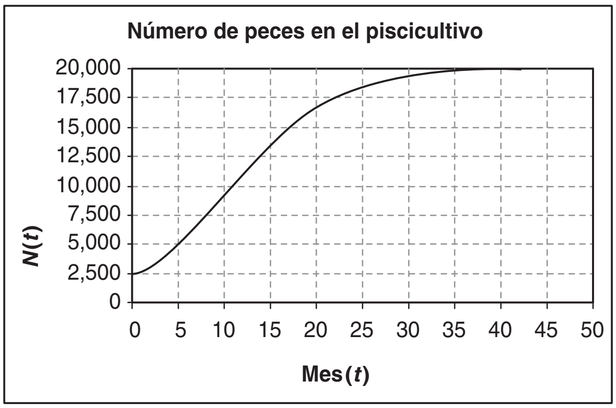
1. En la opción 4, el porcentaje es del 7%.
2. El porcentaje en la opción 3 baja al 2%.
3. El precio de cada paquete de cómputo es de \$8,000.
4. El precio de cada paquete de cómputo es de \$4,000 y que no se pueden vender más de 50 en un mes.
5. No existe la opción 1.

CAPÍTULO 5

Funciones y sus gráficas

¿Cuándo recolectar peces?

"Un dibujo dice más que mil palabras" reza un dicho popular. Y en matemáticas se podría decir "Una gráfica dice más que mil palabras" y, en efecto, en muchas ocasiones puede obtenerse valiosa información de las gráficas. Por ejemplo, observe la siguiente gráfica que representa el número de peces en un piscicultivo durante un periodo de 50 meses.



La gráfica nos "dice" que al inicio había 2500 peces, y que el número de éstos al principio aumentaba rápidamente y aunque seguían creciendo en número, este aumento de la población de peces era cada vez más lento. También se puede ver que a largo plazo el número de peces parece acercarse a 20,000. Al final del capítulo aparece la tabla de valores que se utilizó para crear esta gráfica.

Si el responsable de la "granja" de peces tiene que decidir el mes más adecuado para recolectar 2500 peces de esta granja, ¿cuál es el mes en que se debe realizar la recolección? El mejor mes para hacer la recolección es aquél en el que sea menor el tiempo necesario para que se recupere el número de peces que se retiren. Además de la gráfica, tome como referencia la tabla de valores que se encuentra la final del capítulo, pero antes de consultarla trate de dar una respuesta únicamente con base en la gráfica.

TEMARIO

■ 5-1 FUNCIONES

☛ **1.** ¿Lo siguiente define una función?

a) La regla que asigna a cada persona el número de sus hijos e hijas;

b) la regla que asigna a cada persona los nombres de sus hijos o hijas;

c) la regla que asigna a cada persona el nombre de su primogénito;

d) un diccionario francés-inglés.

El concepto de función es una de las ideas fundamentales en matemáticas. Casi cualquier estudio que se refiera a la aplicación de las matemáticas a problemas prácticos, o que requiera el análisis de datos empíricos, emplea este concepto matemático.

Una función expresa la idea de que una cantidad depende o está determinada por otra. Los ejemplos siguientes aclaran esta idea:

1. El área de un círculo depende de la longitud de su radio; si se conoce la longitud del radio, podemos determinar el área. Decimos que el área es una función del radio.

2. El costo semanal de producir cualquier artículo depende del número de artículos producidos. Decimos que el costo es una función del número de artículos.

3. Las prestaciones otorgadas por el sistema de seguridad social de un país depende de su tasa de desempleo.

4. La cantidad de cierto artículo que el fabricante ofrecerá depende del precio que pueda lograr. La cantidad es una función del precio.

Empezaremos dando la definición formal de una función.

DEFINICIÓN Sean X y Y dos conjuntos no vacíos. Una **función** de X en Y es una *regla* que se asigna a cada elemento $x \in X$ una única $y \in Y$. Si una función asigna y a un $x \in X$ particular, decimos que y es el **valor** de la función en x.

Por lo general, una función se denota por letras como f, g, F o G.

Denotemos con f una función determinada. El conjunto X para el cual f asigna una única $y \in Y$ se denomina el **dominio** de la función f. A menudo se indica mediante D_f. El conjunto de valores correspondiente $y \in Y$ se conoce como el **rango** de la función y por lo regular se denota por R_f.

EJEMPLO 1

a) Sea X el conjunto de estudiantes en una clase. Sea f la regla que asigna a cada estudiante su calificación final. Dado que cada estudiante tiene una sola calificación final, esta regla define una función. En este caso, el dominio es el conjunto de todos los estudiantes en la clase y el rango es el conjunto de todas las calificaciones concedidas. (Por ejemplo, R_f podría ser el conjunto $\{A, B, C, D, F\}$).

b) El valor de los activos de una empresa es una función del tiempo. Aquí el dominio es el conjunto de valores del tiempo, y el rango de la función es el conjunto de valores de los activos (digamos en dólares). ☛ **1**

Si una función f asigna un valor y en el rango a cierta x en el dominio, escribimos

$$y = f(x)$$

Respuesta *a*) Sí; *b*) no; *c*) sí; *d*) no (por lo común más de una palabra en inglés corresponde a cada palabra en francés).

Leemos $f(x)$ como "f de x"; se denomina el *valor de* f *en* x. Observe que $f(x)$ *no* es el producto de f y x.

Si una función f se expresa por una relación del tipo $y = f(x)$, entonces x se denomina la **variable independiente** o **argumento de f** y y se conoce como la **variable dependiente**.

En general, encontraremos funciones que se expresan estableciendo el valor de la función por medio de una fórmula algebraica en términos de la variable independiente de que se trate. Por ejemplo, $f(x) = 5x^2 - 7x + 2$ y $g(p) = 2p^3 + 7/(p + 1)$.

EJEMPLO 2 Dada $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$, calcule el valor de f cuando $x = a$, $x = 3$, $x = -2$ y $x = -\frac{1}{4}$; es decir, determine $f(a)$, $f(3)$, $f(-2)$ y $f(-\frac{1}{4})$.

Solución Tenemos que

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 1 \tag{1}$$

Con objeto de calcular $f(a)$, reemplazamos a x por a en la ecuación (1).

$$f(a) = 2a^2 - 5a + 1$$

Para evaluar $f(3)$, sustituimos 3 en lugar de x en ambos lados de la ecuación (1).

$$f(3) = 2(3)^2 - 5(3) + 1 = 18 - 15 + 1 = 4$$

De manera similar,

$$f(-2) = 2(-2)^2 - 5(-2) + 1 = 19$$

y también

☛ **2.** Si $f(x) = (x + 1)^{-1}$, evalúe $f(1)$, $f(0)$ y $f(-1)$

$$f(-\tfrac{1}{4}) = 2(-\tfrac{1}{4})^2 - 5(-\tfrac{1}{4}) + 1 = \tfrac{19}{8}$$ ☛ **2**

EJEMPLO 3 Dada $g(x) = 3x^2 - 2x + 5$, evalúe: (a) $g(1 + h)$; (*b*) $g(1) + g(h)$; (*c*) $[g(x + h) - g(x)]/h$.

Solución Tenemos

$$g(x) = 3x^2 - 2x + 5 \tag{2}$$

a) Con el propósito de evaluar $g(1 + h)$, debemos sustituir x en la ecuación (2) por $1 + h$.

$$\begin{aligned} g(1 + h) &= 3(1 + h)^2 - 2(1 + h) + 5 \\ &= 3(1 + 2h + h^2) - 2 - 2h + 5 \\ &= 3h^2 + 4h + 6 \end{aligned}$$

b) Reemplazando x por 1 y h, respectivamente, en la ecuación (2) obtenemos

$$g(1) = 3(1^2) - 2(1) + 5 = 3 - 2 + 5 = 6$$

y asimismo

$$g(h) = 3h^2 - 2h + 5$$

Respuesta $f(1) = 0.5$, $f(0) = 1$ y $f(-1)$ no existe.

Por tanto,

$$g(1) + g(h) = 6 + 3h^2 - 2h + 5 = 3h^2 - 2h + 11$$

c) Reemplazando el argumento x en la ecuación (2) por $x + h$, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} g(x + h) &= 3(x + h)^2 - 2(x + h) + 5 \\ &= 3(x^2 + 2xh + h^2) - 2x - 2h + 5 \\ &= 3x^2 + 2x - 5 + h(3h + 6x - 2) \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h}[g(x + h) - g(x)] \\ &\qquad = \frac{1}{h}[3x^2 - 2x + 5 + h(3h + 6x - 2) - (3x^2 - 2x + 5)] \\ &\qquad = 3h + 6x - 2 \end{aligned}$$

☛ **3.** Si $f(x) = |x|$, evalúe $\dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h}$

La cantidad $[g(x + h) - g(x)]/h$ para una función dada g hará evidente su importancia cuando estudiemos cálculo en el capítulo 12. ☛ **3**

EJEMPLO 4 Evalúe $F(0)$, $F(1)$ y $F(4)$ para la función F definida por

$$F(x) = \frac{x - 4}{\sqrt{2 - x}}$$

Solución Primero reemplace x por 0:

$$F(0) = \frac{0 - 4}{\sqrt{2 - 0}} = \frac{-4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

Después, reemplace x por 1:

$$F(1) = \frac{1 - 4}{\sqrt{2 - 1}} = \frac{-3}{\sqrt{1}} = -3$$

Por último, reemplace x por 4:

$$F(4) = \frac{4 - 4}{\sqrt{2 - 4}} = \frac{0}{\sqrt{-2}} \qquad \text{no definido.}$$

$F(4)$ no existe; en otras palabras, 4 no está en el dominio de F.

Respuesta 1 si $h \geq -1$, $h \neq 0$; $\dfrac{-(2 + h)}{h}$, si $h < -1$

En gran parte de los casos considerados, los dominios y rangos de las funciones con las cuales estaremos interesados son subconjuntos de los números reales. En tales casos, la función por lo regular se representa por su *gráfica.* La gráfica de una función f se obtiene dibujando todos los puntos (x, y), en donde x pertenece al dominio de f y $y = f(x)$, manejando x y y como coordenadas cartesianas.

EJEMPLO 5 Consideremos $f(x) = 2 + 0.5x^2$. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales, ya que podemos evaluar $f(x)$ para cualquier valor real de x. Algunos de los valores de esta función aparecen en la tabla 1, en la cual algunos valores de x están listados en el renglón superior y los valores de $y = f(x)$ están debajo de los valores correspondientes de x. Los puntos correspondientes a los valores de x y y se graficaron como puntos en la figura l. La gráfica de la función $f(x) = 2 + 0.5x^2$ es una curva con forma de U que pasa por los puntos ya graficados.

TABLA 1

x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
$y = f(x)$	2	2.5	4	6.5	10	2.5	4	6.5	10

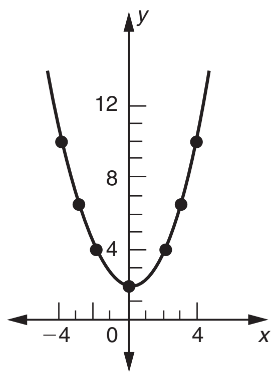


FIGURA 1

EJEMPLO 6 Los costos mensuales de un pequeño fabricante están dados, en miles de dólares, por $C = 10 + 2x$, en donde x es el número de empleados. El costo promedio por empleado está dado por

$$f(x) = \frac{10 + 2x}{x} = \frac{10}{x} + 2$$

Grafique la función f para $1 \leq x \leq 10$.

Solución En este caso x debe ser un número entero positivo, de modo que $D_f = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Determinamos los valores que se muestran en la tabla 2.

TABLA 2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	12	7	5.33	4.5	4	3.67	3.43	3.25	3.11	3

La gráfica se muestra en la figura 2. Observe que la gráfica consiste en puntos discretos, no en una curva continua. ☛ **4**

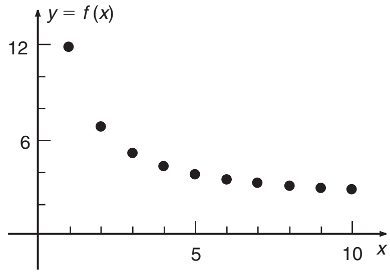
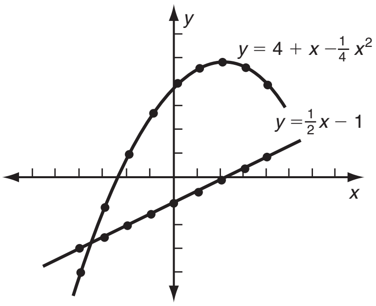


FIGURA 2

☛ **4.** Grafique las funciones $y = 4 + x - \frac{1}{4}x^2$ y $y = \frac{1}{2}x - 1$ para $-4 \le x \le 4$

Respuesta Utilizando la siguiente tabla de valores obtenemos las gráficas que se muestran abajo:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 4 + x - \frac{1}{4}x^2$	-4	-1.25	1	2.75	4	4.75	5	4.75	4
$y = \frac{1}{2}x - 1$	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1



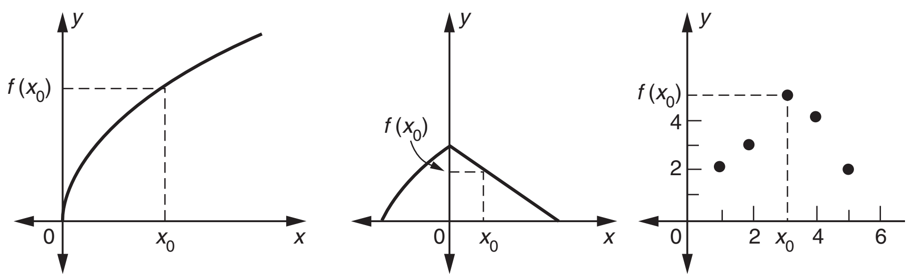
Supóngase que nos dan una curva en el plano xy. ¿Cómo podemos decidir si es o no la gráfica de alguna función $y = f(x)$?

Prueba de la línea vertical:

Cualquier curva dada (o conjunto de puntos) en el plano xy es la gráfica de una función (en la cual y es la variable dependiente) con tal de que cualquier línea vertical corte a la gráfica en a lo más un punto.

Cualquier línea vertical corresponde a algún valor particular, digamos $x = x_0$, de la variable independiente, y el punto en que esta línea vertical corta la gráfica determina el valor de y que le corresponde a x_0. Es decir, la gráfica misma da la regla que relaciona cada valor de x con algún valor de y. Si la línea vertical $x = x_0$ no corta a la gráfica en ningún punto, esto significa que x_0 no pertenece al dominio.

Las gráficas de la figura 3 representan funciones. [Nótese que en la parte *c*), el dominio de la función es el conjunto de enteros $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ de modo que la gráfica sólo consta de cinco puntos en lugar de una curva].



a) *b*) *c*)

FIGURA 3

☛ **5.** Con respecto a las gráficas de las figuras 6 a la 17 del capítulo 4. ¿Alguna de ellas *no* son la gráfica de una función?

Por otra parte, las gráficas de la figura 4 no representan funciones. Éstas no son funciones porque existen líneas verticales que cortan las gráficas en más de un punto. Así, al valor $x = x_o$, en la primera gráfica, le corresponden dos valores y_1 y y_2 de y. En tal caso, el valor de x no determina un *valor único* de y. ☛ **5**

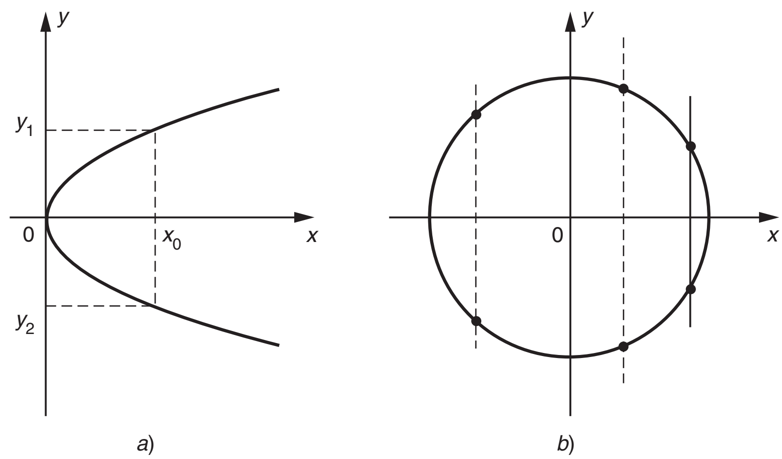


FIGURA 4

En la gráfica de una función, los valores a lo largo del eje x en que la gráfica está definida constituyen el dominio de la función. En forma análoga, los valores a lo largo del eje y en que la gráfica tiene puntos constituyen el rango de la función. Esto se ilustra en la figura 5. Aquí tenemos que

$$D_f = \{x \mid -2 \le x \le 3\} \qquad \text{y} \qquad R_f = \{y \mid 0 \le y \le 2\}$$

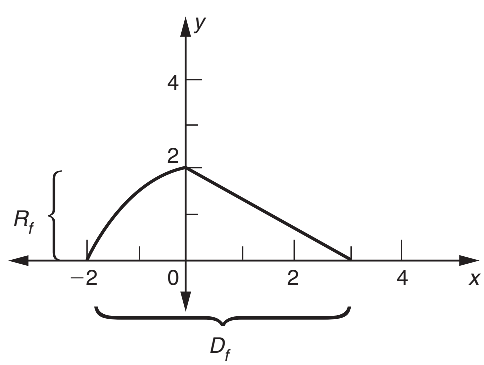


FIGURA 5

A menudo el dominio de una función no se establece de manera explícita. En tales casos, se sobreentiende que es el conjunto de todos los valores del argumento para los cuales la regla dada tiene sentido. En el caso de una función f definida por una expresión algebraica, el dominio de f es el conjunto de todos los números rea-

Respuesta Las rectas verticales de las figuras 11 y 15 no son. Todas las demás son gráficas de funciones.

les x para los cuales $f(x)$ es un número real bien definido. Por ejemplo, el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es el conjunto de los números reales no negativos, dado que la raíz cuadrada sólo tiene sentido si $x \geq 0$. De manera similar, en el caso de la función $g(x) = x^2/(x - 3)$, el dominio es el conjunto de todos los números reales excepto $x = 3$, puesto que cuando $x = 3$ el denominador se hace cero y $g(3)$ no está definido.

En general, al determinar el dominio de una función debemos tener en mente estas dos condiciones: *cualquier expresión dentro de una raíz cuadrada no puede ser negativa y el denominador de cualquier fracción no puede ser cero.* (Más generalmente, cualquier expresión dentro de un radical con índice par tal como $\sqrt[4]{}$ o $\sqrt[6]{}$ no puede ser negativa).

EJEMPLO 7 Determine el dominio de g, en donde

$$g(x) = \frac{x + 3}{x - 2}$$

Solución Es claro que, $g(x)$ no es un número real bien definido si $x = 2$. Para cualquier otro valor de x, $g(x)$ es un número real bien definido. En consecuencia, el dominio de g es el conjunto de todos los reales excepto 2.

EJEMPLO 8 Encuentre el dominio de f si $f(x) = \sqrt{x - 4}$

Solución El dominio de f es el conjunto de todos los valores para los cuales la expresión dentro del radical no es negativa. Esto es,

$$x - 4 \geq 0 \quad \text{o} \quad x \geq 4$$

☛ **6.** ¿Cuál es el dominio de cada una de las funciones
a) $y = (x - 2)^2$
b) $y = \sqrt{x - 2}$?

Si $x < 4$, $f(x)$ no es un número real, dado que la cantidad a la que se extrae raíz cuadrada, $x - 4$, es negativa. La gráfica de f se aprecia en la figura 6, en la que se han graficado algunos puntos. ☛ **6**

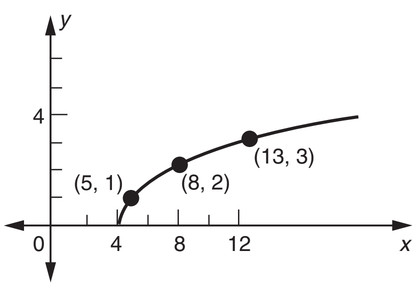


FIGURA 6

EJEMPLO 9 Determine el dominio de h, en donde

$$h(x) = \frac{x}{(x - 2)\sqrt{x - 1}}$$

Respuesta *a*) Todos los números reales
b) $\{x \mid x \geq 2\}$

Solución Aquí el radical sólo está definido para $x \geq 1$. Pero el denominador es cero si $x = 1$ o bien $x = 2$, de modo que estos dos puntos deben excluirse del dominio

☛ **7.** ¿En cada caso, cuál es el dominio?

a) $y = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{(x + 2)}$

b) $y = \dfrac{\sqrt{1 - x}}{(x + 2)}$

Respuesta *a*) $\{x \mid x \geq 1\}$
b) $\{x \mid x \leq 1, x \neq -2\}$

☛ **8.** ¿Cuál es el dominio de la función del ejemplo 10?

Respuesta Matemáticamente, esta función está definida para toda x. En la práctica, el dominio estaría limitado al intervalo $0 \leq x \leq 2$

Por tanto

$$D_h = \{x \mid x > 1, x \neq 2\}$$ ☛ **7**

En problemas prácticos, con frecuencia es necesario construir una función algebraica a partir de cierta información verbal.

EJEMPLO 10 ***(Costo de instalación de una línea telefónica)*** Una línea telefónica debe tenderse entre dos pueblos situados en orillas opuestas de un río en puntos *A* y *B*. El ancho del río es de 1 kilómetro y *B* está situado 2 kilómetros río abajo de *A*. Tiene un costo de *c* dólares por kilómetro tender la línea por tierra y 2*c* dólares por kilómetro bajo el agua. La línea telefónica deberá seguir la orilla del río empezando en *A* una distancia *x* (en kilómetros), y luego cruzar el río diagonalmente en línea recta hacia *B*. Determine el costo total de la línea como función de *x*.

Solución La figura 7 ilustra este problema. La línea telefónica se extiende de *A* a *C*, una distancia *x* a lo largo de la orilla y luego diagonalmente de *C* a *B*. El costo del segmento *AC* es *cx* mientras que el costo de *CB* es 2*c*(*CB*). El costo total (llamémosle *y*) está dado por

$$y = cx + 2c(CB)$$

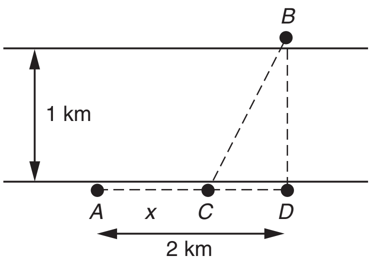


FIGURA 7

Con el propósito de terminar el problema, debemos expresar *CB* en términos de *x*. Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo *BCD*.

$$BC^2 = BD^2 + CD^2$$

Pero $BD = 1$ (el ancho del río) y

$$CD = AD - AC = 2 - x$$

Por tanto,

$$BC^2 = 1^2 + (2 - x)^2 = 1 + (4 - 4x + x^2) = x^2 - 4x + 5$$

En consecuencia, el costo está dado por

$$y = cx + 2c\sqrt{x^2 - 4x + 5}$$

Ésta es la expresión requerida, que da *y* como función de *x*. ☛ **8**

En los ejemplos anteriores, hemos estado interesados en funciones que están definidas por una sola expresión algebraica para todos los valores de la variable independiente. Algunas veces sucede que debemos usar funciones que están definidas por más de una expresión.

EJEMPLO 11 ***(Función de costo de la electricidad)*** La electricidad se cobra a los consumidores a una tarifa de 10¢ por unidad para las primeras 50 unidades y a 3¢ por unidad para cantidades que excedan las 50 unidades. Determine la función $c(x)$ que da el costo de usar x unidades de electricidad.

Solución Si $x \leq 50$, cada unidad tiene un costo de 10¢, de modo que el costo total de x unidades es de $10x$ centavos. Así que, $c(x) = 10x$ para $x \leq 50$. Cuando $x = 50$, obtenemos $c(50) = 500$; el costo de las primeras 50 unidades es igual a 500¢. Si $x > 50$, el costo total es igual al de las primeras 50 unidades (esto es, 500¢) más el costo del resto de las unidades usadas. El número de estas unidades que sobrepasan a 50 es $x - 50$, y cuestan 3¢ cada una, por lo que su costo es de $3(x - 50)$ centavos. Así que la tarifa total cuando $x > 50$ es

$$c(x) = 500 + 3(x - 50) = 500 + 3x - 150 = 350 + 3x$$

☛ **9.** Para enviar un paquete desde Vancouver a París, Francia, un servicio de correo cobra \$50 por paquetes que pesen hasta 2 kilogramos y \$10 por cada kilogramo o fracción adicional. Grafique la función que expresa el costo de enviar un paquete de peso x kilogramos para $x \leq 8$.

Podemos escribir $c(x)$ en la forma

$$c(x) = \begin{cases} 10x & \text{si } x \leq 50 \\ 350 + 3x & \text{si } x > 50 \end{cases}$$

La gráfica de $y = c(x)$ se aprecia en la figura 8. Obsérvese cómo cambia la naturaleza de la gráfica en $x = 50$, en donde una fórmula toma el lugar de la otra. ☛ **9**

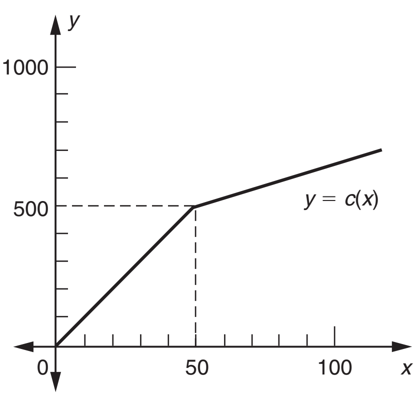
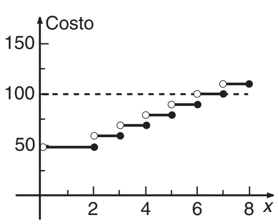


FIGURA 8

Respuesta



EJEMPLO 12 Considere la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{x - 4} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales no negativos. En el caso de que $0 \leq x \leq 4$, la función está definida por la expresión algebraica

☛ **10.** Grafique la función f, en donde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 4 & \text{si } x < 2 \\ 8 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$f(x) = 4 - x$, mientras que si $x > 4$, está definida por la expresión $f(x) = \sqrt{x - 4}$. Algunos valores de $f(x)$ se dan en la tabla 3 y la gráfica de esta función aparece en la figura 9. Consta de dos segmentos: si x está entre 0 y 4, la gráfica está formada por el segmento de línea recta con ecuación $y = 4 - x$. ☛ **10**

TABLA 3

x	0	2	4	5	8	13
$y = f(x)$	4	2	0	1	2	3

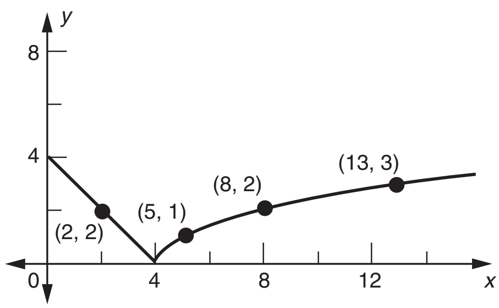


FIGURA 9

En estos ejemplos, la función considerada está definida por dos expresiones algebraicas. Algunas veces es necesario considerar funciones definidas por tres o más expresiones diferentes. (Por ejemplo, véase el ejercicio 50).

Concluimos esta sección estudiando algunas funciones simples. Una función de la forma

$$f(x) = b$$

en donde b es una constante, se denomina **función constante**. (Véase la figura 10). Ya hemos encontrado tales funciones en la sección 4-2. La gráfica de f es una línea recta paralela al eje x a una distancia $|b|$ por encima o por debajo del eje x dependiendo de que b sea positivo o negativo. En este caso,

$$D_f = \text{el conjunto de todos los números reales} \quad \text{y} \quad R_f = \{b\}$$

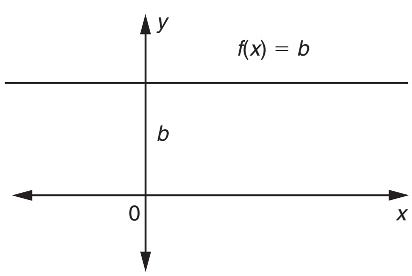
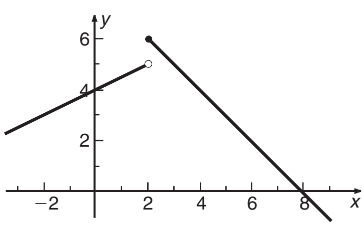


FIGURA 10

Respuesta



Una función f definida por la relación

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (a_n \neq 0)$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constantes y n un entero no negativo, se dice que es una **función polinomial de grado *n***. Por ejemplo, las funciones f y g definidas por

$$f(x) = 3x^7 - 5x^4 + 2x - 1 \quad \text{y} \quad g(x) = x^3 + 7x^2 - 5x + 3$$

son funciones polinomiales de grado 7 y 3, respectivamente.

Si el grado de una función polinomial es 1, la llamaremos **función lineal**. La forma general de la función lineal está dada por

$$f(x) = mx + b \qquad (m \neq 0)$$

donde m y b son constantes. (Véase la figura 11). Como sabemos por lo expuesto en la sección 4-2, la gráfica de una función lineal es una línea recta con pendiente m y ordenada al origen b. Aquí D_f es igual a R_f que a su vez es igual al conjunto de todos los números reales.

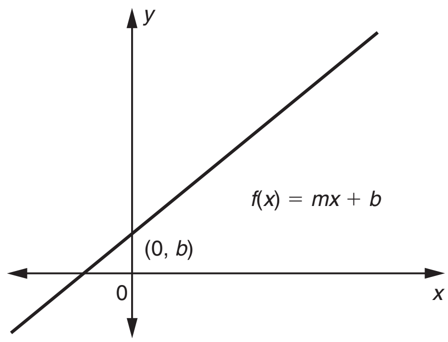


FIGURA 11

Si el grado de la función polinomial es 2, la denominaremos **función cuadrática**. La función cuadrática general puede definirse por

$$g(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

en donde a, b y c son constantes. Estudiaremos esta función con todo detalle en la sección siguiente.

En forma análoga, una función polinomial de grado 3 se conoce como **función cúbica**. Por ejemplo, la función definida por

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 1$$

es una función cúbica.

Si el grado de la función polinomial es cero, se reduce a una función constante.

Si una función puede expresarse como el cociente de dos funciones polinomiales, se denomina **función racional**. Ejemplos de funciones racionales son

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 4} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{2x^3 - 7x + 1}{5x^2 - 2}$$

En general, cualquier función racional tiene la forma $f(x) = p(x)/q(x)$, en donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios en x.

Si el valor $f(x)$ de una función f se encuentra por medio de un número finito de operaciones algebraicas, f se llama **función algebraica**. Las operaciones algebraicas son la adición, la sustracción, la multiplicación, la división, la elevación a potencias y la extracción de raíces. Por ejemplo, las funciones f y g definidas por

$$f(x) = \frac{(2x + 1)^2 - \sqrt{x^3 + 1}}{(x^2 + 1)^4} \quad \text{y} \quad g(x) = (2x^2 - 1)^{-1/7} + 5x^{3/4}$$

son funciones algebraicas.

Aparte de las funciones algebraicas, existen otras funciones llamadas **funciones trascendentes**. Ejemplos de funciones trascendentes son las funciones logarítmicas y las funciones exponenciales, que se expondrán en el capítulo 6.

EJERCICIOS 5-1

1. Dada $f(x) = 3x + 2$, calcule $f(1), f(-2), f(x^2)$ y $f(x + h)$

2. Dada $f(x) = 5 - 2x$, calcule $f(3), f(-1), f(x)$ y $f(x + h)$

3. Dada $f(t) = 5t + 7$, calcule $f(1), f(-3), f(c), f(1 + c)$ y $f(1) + f(c)$

4. Dada $f(x) = 3 - 4x$, calcule $f(a), f(a + 1)$ y $f(a) + f(1)$

5. Dada $f(x) = x^2$, calcule $f(3)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(\sqrt{x})$ y $f(x + h)$

6. Dada $f(x) = 3x^2 + 7$, calcule $f(c)$, $f(c + h)$ y $f(c + h) - f(c)$

7. Dada $f(x) = 3$, calcule $f(1/x), f(x^2), f(x + 2)$ y $f(x + h)$

8. Dada $f(y) = 5$, calcule $f(1/y)$, $f(y^2)$ $f(y + 3)$, $f(7)$ y $f(y + h)$

9. Dada $f(x) = \sqrt{x}$, calcule $f(4), f(x^2)$ y $f(a^2 + h^2)$

10. Dada $f(x) = \sqrt{x - 16}$, calcule $f(25), f(0)$ y $f(7)$

11. Dada $f(t) = 3t^2 - 5t + 7$, calcule $f(0), f(1/t), f(c) + f(h)$ y $f(c + h)$

12. Dada $f(u) = 2u^2 + 3u - 5$, calcule $f(0), f(1/x), f(x + h)$ y $f(x + h) - f(x)$

13. Dada

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \geq 5 \\ 6 - 3x & \text{si } x < 5 \end{cases}$$

encuentre cada uno de los siguientes valores:

a) $f(0)$ *b)* $f(7)$ *c)* $f(-2)$

d) $f(5 + h)$ y $f(5 - h)$, con $h > 0$

14. Dada

$$g(x) = \begin{cases} 4x + 3 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 1 + x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 7 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

evalúe cada uno de los siguientes valores:

a) $g(1)$ *b)* $g(3)$ *c)* $g(-1)$

d) $g(0)$ *e)* $g(-3)$

f) $g(2 + h)$ y $g(2 - h)$ si $2 > h > 0$

***15.** Si $F(t) = t/(1 + t)$ y $G(t) = t/(1 - t)$, demuestre que $F(t) - G(t) = -2G(t^2)$

***16.** Si $y = f(x) = (x + 1)/(x - 1)$, pruebe que $x = f(y)$

17. Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2x - 1$, calcule $f[g(2)]$

18. Si $f(x) = g(x) + h(x)$, $g(x) = x^2 + 3$ y $f(x) = x^3$, calcule $h(2)$

(19-24) Evalúe $[f(x+h) - f(x)]/h$ en donde $f(x)$ está dada a continuación.

19. $f(x) = 2x + 5$

20. $f(x) = 3x - 7$

21. $f(x) = 7$

22. $f(x) = x^2$

23. $f(x) = x^2 - 3x + 5$

24. $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$

(25-42) Determine el dominio de cada función.

25. $f(x) = 2x + 3$

26. $f(t) = 2t^2 - 3t + 7$

27. $h(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

28. $D(p) = \dfrac{2p+3}{p-1}$

29. $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 3x + 2}$

30. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

31. $F(u) = \dfrac{u+2}{u^2+1}$

32. $G(t) = \sqrt{t-2}$

33. $F(y) = -\sqrt{3y - 2}$

34. $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2t-3}}$

35. $G(u) = \dfrac{2}{\sqrt{3-2u}}$

36. $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$

37. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x > 5 \\ 6 - 3x & \text{si } x < 5 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} 4x + 3 & \text{si } -2 \le \text{x} < 0 \\ 1 + x^2 & \text{si } 0 \le \text{x} \le 2 \\ 7 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x < 3 \\ 3x + 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5-x} & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{1}{x+5} & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

41. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+3}{x-4} & \text{si } x \ge 1 \\ \dfrac{1}{1-2x} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

42. $F(t) = \begin{cases} 5t - 7 & \text{si } t > 3 \\ \dfrac{1}{t-4} & \text{si } t < 3 \end{cases}$

(43-46) Trace las gráficas de las siguientes funciones:

43. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

45. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 1 \\ -x & \text{si } x < 1 \end{cases}$

46. $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

47. *(Función de costo)* Una compañía ha determinado que el costo de producir x unidades de su producto por semana está dado por:

$$C(x) = 5000 + 6x + 0.002x^2$$

Evalúe el costo de producir:

a) 1000 unidades por semana.

b) 2500 unidades por semana.

c) Ninguna unidad.

48. *(Función de costo)* Para la función de costo

$$C(x) = 10^{-6}\,x^3 - (3 \times 10^{-3})x^2 + 36x + 2000$$

calcule el costo de producir:

a) 2000 unidades.

b) 500 unidades.

49. *(Fisiología)* En una prueba para metabolismo de azúcar en la sangre, llevada a cabo en un intervalo de tiempo, la cantidad de azúcar en la sangre era una función del tiempo t (medido en horas) y dada por:

$$A(t) = 3.9 + 0.2t - 0.1t^2$$

Encuentre la cantidad de azúcar en la sangre:

a) Al principio de la prueba.

b) 1 hora después.

c) $2\,\frac{1}{2}$ horas después de iniciada.

50. *(Contaminación atmosférica)* El índice de contaminación atmosférica en cierta ciudad varía durante el día de la siguiente manera:

$$p(t) = \begin{cases} 2 + 4t & \text{si } 0 \le t < 2 \\ 6 + 2t & \text{si } 2 \le t < 4 \\ 14 & \text{si } 4 \le t < 12 \\ 50 - 3t & \text{si } 12 \le t < 16 \end{cases}$$

Aquí t es el tiempo en horas, con $t = 0$ correspondiente a 6 a.m. y $t = 16$ a 10 p.m. Haga la gráfica de esta función. ¿Cuáles son los niveles de contaminación a las 8 a.m., 12 del día, 6 p.m. y 8 p.m.?

51. *(Función de costo)* Una empresa que fabrica radios tiene costos fijos de $3000 y el costo de la mano de obra y del material es de $15 por radio. Determine la función de costo, es decir, el costo total como una función del número de radios producidos. Si cada radio se vende por $25, encuentre la función de ingresos y la función de utilidades.

52. *(Función de ingresos)* Un fabricante puede vender 300 unidades de su producto al mes a un costo de $20 por unidad y 500 unidades a un costo de $15 por unidad. Exprese la demanda del mercado x (el número de unidades que pueden venderse al mes) como una función del precio por unidad, suponiendo que es una función lineal. Exprese los ingresos como:

a) Una función del precio

b) Una función de x

53. *(Agricultura)* Un granjero tiene 200 yardas de cerca para delimitar un terreno rectangular. Exprese el área A del terreno como una función de la longitud de uno de sus lados.

54. *(Geometría)* Un rectángulo está inscrito en un círculo de radio igual a 3 centímetros. Exprese el área A del rectángulo como una función de la longitud de uno de sus lados.

55. *(Función de costo)* Se construye una cisterna de modo que su capacidad sea de 300 pies cúbicos de agua. La cisterna tiene como base un cuadrado y cuatro caras verticales, todas hechas de concreto y una tapa cuadrada de acero. Si el concreto tiene un costo de $1.50 por pie cuadrado y el acero cuesta $4 por pie cuadrado, determine el costo total C como una función de la longitud del lado de la base cuadrada.

56. Repita el ejercicio 55 si la cisterna es un cilindro con base y tapa circulares. Exprese el costo C como una función del radio r de la base del cilindro.

57. *(Función de costo)* El azúcar tiene un costo de 25¢ para cantidades hasta de 50 libras y de 20¢ por libra en el caso de cantidades superiores a 50 libras. Si $C(x)$ denota el costo de x libras de azúcar, exprese $C(x)$ por medio de expresiones algebraicas apropiadas y bosqueje su gráfica.

58. *(Función de costo)* Un detallista puede comprar naranjas al mayorista a los precios siguientes: 20¢ por kilo si adquiere 20 kilos o menos; 15¢ por kilo en el caso de cantidades por encima de 20 kilos y hasta de 50 kilos y 12¢ por kilo para cantidades mayores de 50 kilos. Determine el costo $C(x)$ de adquisición de x kilos de naranjas.

59. *(Funciones de ingresos)* Un edificio de departamentos tiene 70 habitaciones que puede rentar en su totalidad si la renta se fija en $200 al mes. Por cada incremento de $5 en la renta, una habitación quedará vacía sin posibilidad alguna de rentarla. Exprese el ingreso mensual total R como una función de:

a) x, si x es el número de incrementos de 5 dólares en la renta

b) La renta mensual p

60. *(Función de utilidades)* La ecuación de demanda del producto de una compañía es $2p + 3x = 16$, en donde x unidades pueden venderse al precio de \$$p$ cada una. Si el costo de producir x unidades es de $(100 + 2x)$ dólares, exprese la utilidad U como función de

a) La demanda x

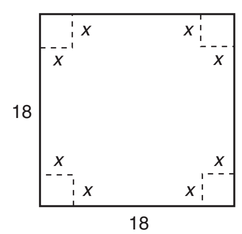
b) El precio p

61. *(Descuento)* Un agente de viajes ofrece un paquete vacacional de $500 por persona para grupos de seis o más personas, con un descuento de 10% de este precio a partir de la persona número doce en el grupo. Construya la función $C(x)$ dando el costo promedio por persona en un grupo de tamaño x $(x \ge 6)$.

62. *(Costo postal)* El costo de envío de una carta en primera clase es de 35 centavos por cada 10 gramos o fracción. Construya la función $C(W)$ que da el costo en centavos por enviar una carta cuyo peso sea W (que no exceda de 50 gramos).

63. Un rectángulo tiene un lado de x pulgadas. El perímetro del rectángulo es de 20 pulgadas. Exprese el área A como una función de x y establezca el dominio de esta función.

64. De un cuadrado de cartón de 18 pulgadas por lado se recortan cuadrados de lado x en cada esquina y luego se doblan hacia arriba para formar una caja abierta. Exprese el volumen V de la caja como función de x y determine el dominio de esta función.

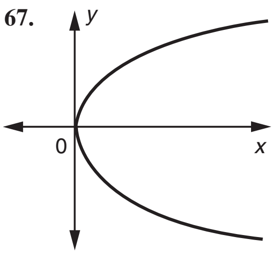


65. De un hoja rectangular de 20×16 cm, se recortan en cada esquina cuadrados iguales de lado x y luego los lados se doblan hacia arriba para formar una caja sin tapa. Si $V = f(x)$ denota el volumen de la caja, determine $f(x)$ y establezca su dominio.

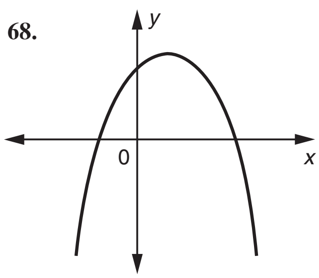
66. Un rectángulo, uno de cuyos lados mide x pulgadas, está inscrito dentro de un círculo de radio c pulgadas. Exprese el área A del rectángulo como una función de x y determine el dominio de esta función.

(67-72) Establezca si las gráficas siguientes representan o no funciones.

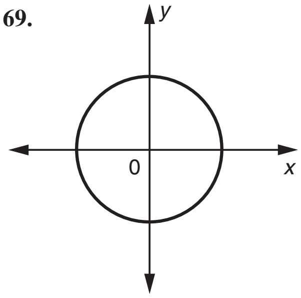
67.



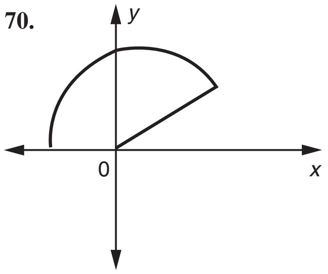
68.



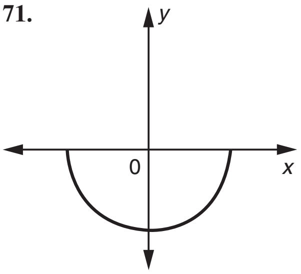
69.



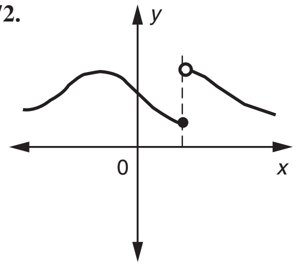
70.



71.



72.



■ 5-2 FUNCIONES CUADRÁTICAS Y PARÁBOLAS

Una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

con *a, b* y *c* constantes, se denomina *función cuadrática.* El dominio de $f(x)$ es el conjunto de todos los números reales.

La función cuadrática más simple se obtiene haciendo b y c iguales a cero, en cuyo caso obtenemos $f(x) = ax^2$. Las gráficas comunes de esta función en los casos en que a es positiva o negativa aparecen en la figura 12. El punto más bajo de la grá-

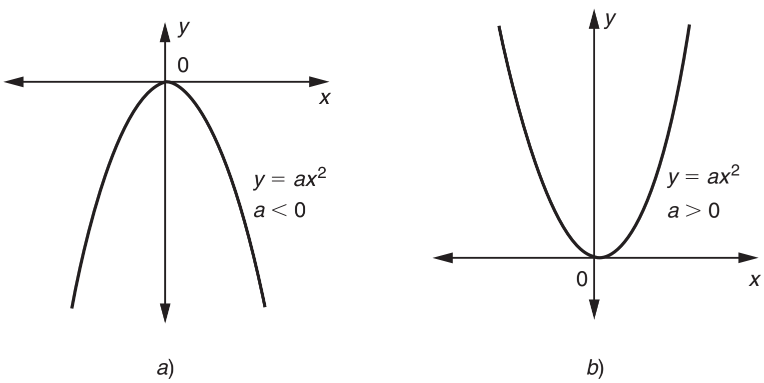


FIGURA 12

☛ **11.** Dé las coordenadas del vértice e indique si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo:
a) $y = 1 + 2x + x^2$
b) $y = (1 - x)^2 - 2$
c) $y = (x + 1)^2 - 2(x - 1)^2$

fica cuando $a > 0$ ocurre en el origen, mientras que este mismo es el punto más alto si $a < 0$. Cada una de estas gráficas se llama **parábola**. El origen (que es el punto más bajo o más alto en los dos casos) se denomina *vértice* de la parábola.

La función cuadrática general $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene una gráfica idéntica en forma y tamaño a la correspondiente a $y = ax^2$; la única diferencia es que el vértice de $f(x) = ax^2 + bx + c$ está trasladado afuera del origen.

TEOREMA 1 La gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ es una parábola que se abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. Su vértice (que es el punto más bajo si $a > 0$ y el punto más alto si $a < 0$) es el punto con coordenadas

$$x = -\frac{b}{2a} \quad \text{y} \quad y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Gráficas características de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ se muestran en la figura 13.

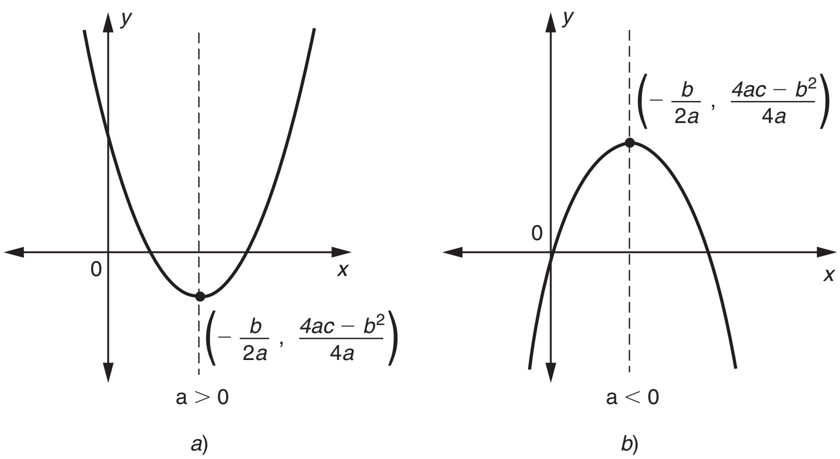


FIGURA 13

***Notas* 1.** Si $b = c = 0$, la función cuadrática se reduce a $f(x) = ax^2$. Las coordenadas del vértice dadas en el teorema 1 se reducen a $x = y = 0$, que es consistente con nuestras afirmaciones anteriores.

2. No tiene caso recordar la fórmula en el teorema 1, para la ordenada del vértice. Es más fácil sustituir el valor $x = -b/2a$ en la ecuación de la parábola, $y = ax^2 + bx + c$ (véase el ejemplo 1).

3. La parábola es simétrica con respecto a la recta vertical que pasa por el vértice. Esta recta se conoce como eje de la parábola.

4. El teorema 1 es más fácil de demostrar utilizando el método de *completar el cuadrado* (véase la sección 2-3). ¿Puede conseguir demostrarlo? ☛ **11**

Respuesta *a*) $(-1, 0)$, hacia arriba
b) $(1, -2)$, hacia arriba
c) $(3, 8)$, hacia abajo

EJEMPLO 1 Bosqueje la parábola $y = 2x^2 - 4x + 7$ y encuentre su vértice.

Solución Comparando la ecuación

$$y = 2x^2 - 4x + 7$$

con la función cuadrática estándar

$$y = ax^2 + bx + c$$

tenemos que $a = 2$, $b = -4$ y $c = 7$. La coordenada x del vértice es

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(2)} = 1$$

Con objeto de encontrar la coordenada y del vértice, lo más sencillo es sustituir $x = 1$ en la ecuación de la parábola dada.

$$y = 2(1)^2 - 4(1) + 7 = 5$$

De modo que el vértice está en el punto (1, 5).

En forma alternativa, podríamos usar la fórmula dada en el teorema 1.

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(2)(7) - (-4)^2}{4(2)} = \frac{56 - 16}{8} = 5$$

Dado que $a = 2 > 0$, la parábola se abre hacia arriba; esto es, el vértice (1, 5) es el punto más bajo de la parábola. La gráfica de esta parábola puede bosquejarse graficando algunos puntos (x, y) situados sobre ella. Los valores de y que corresponden a los valores escogidos de x aparecen en la tabla 4. Graficando estos puntos y uniéndolos por una curva suave, obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 14. (Obsérvese que la gráfica de este ejemplo corta el eje y en el punto (0, 7) pero que no corta al eje x en ningún punto. Al dibujar la gráfica de alguna función dada, a menudo es útil encontrar los puntos en que su gráfica corta los ejes de coordenadas). ☛ **12**

☛ **12.** La parábola que es idéntica a $y = ax^2$ y tiene vértice en (h, k) está dada por la ecuación $y - k = a(x - h)^2$.
¿Cuál es la ecuación de la parábola idéntica a $y = 2x^2$ con vértice en (1, 5)?

TABLA 4

x	−1	0	1	2	3
y	13	7	5	7	13

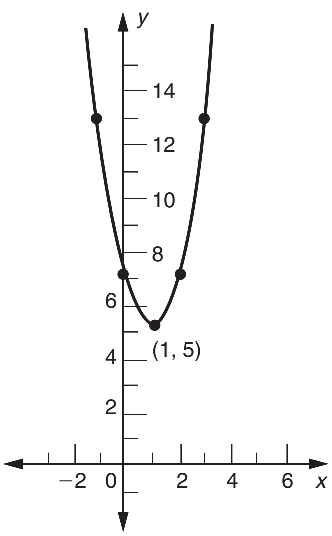


FIGURA 14

Respuesta $y - 5 = 2(x - 1)^2$ o $y = 2x^2 - 4x + 7$ (*cf.* ejemplo 1).

☛ **13.** Sea la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que corta al eje x en $x = p$ y q. Si $a > 0$, la gráfica se encuentra por debajo del eje x para x entre p y q. Esto es, $ax^2 + bx + c < 0$ para x entre p y q y $ax^2 + bx + c > 0$ fuera de este intervalo. Si $ax^2 + bx + c$ nunca es cero para ningún x real, entonces $ax^2 + bx + c > 0$ para toda x. Relacione esto con nuestra técnica para resolver desigualdades cuadráticas de la sección 3.3. ¿Cuáles son las condiciones correspondientes si $a < 0$?

Como establecimos antes, el vértice de la parábola representa el punto más bajo cuando $a > 0$ o el punto más alto si $a < 0$. Se sigue, por tanto, que en el caso de que $a > 0$, la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ toma su valor mínimo en el vértice de la parábola correspondiente. Esto es, $f(x)$ es mínimo cuando $x = -b/2a$. Por otro lado, cuando $a < 0$, la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ toma su valor máximo si $x = -b/2a$. Estos valores más grandes y más pequeños de $f(x) = ax^2 + bx + c$ pueden obtenerse sustituyendo $x = -b/2a$ en $f(x)$. ☛ **13**

Problemas en que se nos pide determinar los valores máximos y mínimos de ciertas funciones aparecen con frecuencia en las aplicaciones. Los estudiaremos con detalle en el capítulo 14. Sin embargo, algunos de estos problemas pueden resolverse apelando a las propiedades de las parábolas. Los ejemplos siguientes pertenecen a esta categoría.

EJEMPLO 2 ***(Cercado)*** Un granjero tiene 200 metros de cerca con la cual puede delimitar un terreno rectangular. Un lado del terreno puede aprovechar una cerca ya existente. ¿Cuál es el área máxima que puede cercarse?

Solución Denotemos los lados del terreno con x y y, como se indica en la figura 15, con el lado y paralelo a la cerca ya existente. Se sigue que la longitud de la nueva cerca es $2x + y$, que debe ser igual a los 200 metros disponibles.

$$2x + y = 200$$

El área encerrada es $A = xy$. Pero $y = 200 - 2x$, de modo que

$$A = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2 \qquad (1)$$

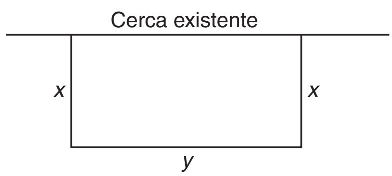


FIGURA 15

Comparando la expresión anterior con $f(x) = ax^2 + bx + c$, advertimos que A es una función cuadrática de x, con $a = -2$, $b = 200$ y $c = 0$. Por tanto, dado que $a < 0$, la función cuadrática tiene un máximo en el vértice, esto es, cuando

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{200}{2(-2)} = 50$$

El valor máximo de A se obtiene sustituyendo $x = 50$ en la ecuación (1):

$$A = 200(50) - 2(50^2) = 10{,}000 - 5000 = 5000$$

El área máxima que puede encerrarse es de 5000 metros cuadrados. Las dimensiones de esta área máxima son $x = 50$ y $y = 100$ metros. (*Recuerde que* $y = 200 - 2x$).

Respuesta Si $a < 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, para x entre p y q y $ax^2 + bx + c < 0$ fuera de este intervalo.
Si $ax^2 + bx + c$ nunca es cero para ningún x real, entonces $ax^2 + bx + c < 0$ para toda x.

☛ **14.** En el ejemplo 3, exprese la utilidad U como una función de p y luego encuentre su valor máximo. ¿La respuesta es la misma?

EJEMPLO 3 ***(Decisiones sobre fijación de precios)*** La demanda mensual x de cierto artículo al precio de p dólares por unidad está dada por la relación

$$x = 1350 - 45p$$

El costo de la mano de obra y del material con que se fabrica este producto es de \$5 por unidad y los costos fijos son de \$2000 al mes. ¿Qué precio por unidad p deberá fijarse al consumidor con la finalidad de obtener una utilidad máxima mensual?

Solución El costo total C (en dólares) de producir x unidades al mes es

$$C = \text{Costos variables} + \text{Costos fijos} = 5x + 2000$$

La demanda x está dada por

$$x = 1350 - 45p$$

Sustituyendo este valor de x en C, resulta que

$$C = 5(1350 - 45p) + 2000 = 8750 - 225p$$

El ingreso I (en dólares) obtenido por vender x unidades a p dólares por unidad es

$$\begin{aligned} I &= \text{Precio por unidad} \times \text{Número de unidades vendidas} \\ &= px = p(1350 - 45p) = 1350p - 45p^2 \end{aligned}$$

La utilidad U (en dólares) está dada entonces por la diferencia entre el ingreso y el costo.

$$\begin{aligned} U &= I - \mathrm{C} \\ &= -45p^2 + 1350p - (8750 - 225p) \\ &= -45p^2 + 1575p - 8750 \end{aligned}$$

La utilidad U es una función cuadrática de p. Puesto que $a = -45 < 0$, la gráfica es una parábola que se abre hacia abajo y la utilidad máxima se alcanza en el vértice. En este caso, tenemos que

$$a = -45, \quad b = 1575 \quad \text{y} \quad c = -8750$$

El vértice de la parábola está dado por

$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{1575}{2(-45)} = \frac{1575}{90} = 17.5$$

En consecuencia un precio de $p = \$17.50$ por unidad debe fijarse al consumidor con el propósito de obtener una máxima utilidad. Entonces la utilidad máxima será

$$U = -45(17.5)^2 + 1575(17.5) - 8750 = 5031.25$$

o \$5031.25 al mes. ☛ **14**

Respuesta $P = x(30 - \frac{1}{45}x) - (5x + 2000) = -\frac{1}{45}x^2 + 25x - 2000$.
El vértice está en $x = 562.5$. Esto corresponde a $p = 17.5$ como en la solución dada.

EJEMPLO 4 ***(Decisiones sobre fijación de alquileres)*** El señor Alonso es propietario de un edificio de departamentos con 60 habitaciones. Él puede alquilarlas todas si fija un alquiler mensual de \$200 por habitación. Con un alquiler más alto, algu-

☛ **15.** En el ejemplo 4, suponga que, debido al cambio en el mercado de las viviendas, todos los departamentos están rentados cuando la renta es \$240, pero aún quedará vacante un departamento por cada \$5 de aumento en la renta. ¿Entonces cuál es la renta óptima?

nas habitaciones quedarán vacías. En promedio, por cada incremento de alquiler de \$5, una habitación quedará vacía sin posibilidad alguna de alquilarse. Determine la relación funcional entre el ingreso mensual total y el número de habitaciones vacías. ¿Qué alquiler mensual maximizaría el ingreso total? ¿Cuál es este ingreso máximo?

Solución Sea x el número de unidades vacías. El número de departamentos alquilados es entonces $60 - x$ y el alquiler mensual por habitación es $(200 + 5x)$ dólares. Si I denota el ingreso mensual total (en dólares), se sigue que

$$\begin{aligned} I &= \text{(Renta por unidad)(Número de unidades rentadas)} \\ &= (200 + 5x)\,(60 - x) \\ &= -5x^2 + 100x + 12{,}000 \end{aligned}$$

El ingreso mensual total I es una función cuadrática de x con

$$a = -5, \quad b = 100 \quad \text{y} \quad c = 12{,}000$$

La gráfica de R es una parábola que se abre hacia abajo (dado que $a < 0$) y su vértice es el punto máximo. El vértice está dado por

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2(-5)} = 10$$

$$I = -5(10)^2 + 100(10) + 12{,}000 = 12{,}500$$

Respuesta $R = (240 + 5x)(60 - x)$ tiene vértice cuando $x = 6$ y la renta óptima es \$270.

En consecuencia, si 10 unidades están desocupadas, los ingresos son máximos. El alquiler por habitación es entonces de $(200 + 5x)$ dólares o \$250 y el ingreso total es de \$12,500 al mes. ☛ **15**

EJERCICIOS 5-2

(1-6) Determine los vértices de las siguientes parábolas.

1. $y = 2x^2 - 3$

2. $y = -1 - x^2$

3. $y = x^2 + 2x + 2$

4. $y = x^2 - 3x - 3$

5. $y = 2 - x - 2x^2$

6. $y = -2x - x^2$

(7-10) Bosqueje las siguientes parábolas y determine sus vértices.

7. $y = 2x^2 + 3x - 1$

8. $y = 4x - x^2$

9. $y = 3 - x - 3x^2$

10. $y = 4x^2 + 16x + 4$

(11-14) Determine el valor mínimo o máximo, según el caso, de las funciones siguientes.

11. $f(x) = x^2 - 3x$

12. $f(x) = 2x - 5x^2$

13. $f(x) = 1 - x - x^2$

14. $f(x) = 3x^2 + x - 1$

15. *(Ingreso máximo)* El ingreso mensual por concepto de la venta de x unidades de cierto artículo está dado por $R(x) = 12x - 0.01x^2$ dólares. Determine el número de unidades que deben venderse cada mes con el propósito de maximizar el ingreso. ¿Cuál es el correspondiente ingreso máximo?

16. *(Utilidad máxima)* La utilidad $P(x)$ obtenida por fabricar y vender x unidades de cierto producto está dada por

$$P(x) = 60x - x^2$$

Determine el número de unidades que deben producirse y venderse con el objetivo de maximizar la utilidad. ¿Cuál es esta utilidad máxima?

17. *(Ingresos y utilidad máximas)* Una empresa tiene costos fijos mensuales de \$2000 y el costo variable por unidad de su producto es de \$25.

a) Determine la función de costo.

b) El ingreso I obtenido por vender x unidades está dado por $I(x) = 60x - 0.01x^2$. Determine el número de unidades que deben venderse al mes de modo que maximicen el ingreso. ¿Cuál es este ingreso máximo?

c) ¿Cuántas unidades deben producirse y venderse al mes con el propósito de obtener una utilidad máxima? ¿Cuál es esta utilidad máxima?

18. *(Costo mínimo)* El costo promedio por unidad (en dólares) al producir x unidades de cierto artículo es $C(x) = 20 - 0.06x + 0.0002x^2$. ¿Qué número de unidades producidas minimizarían el costo promedio? ¿Cuál es el correspondiente costo mínimo por unidad?

19. *(Cercado)* Un granjero tiene 500 yardas de cerca con la cual delimitará un corral rectangular. ¿Cuál es el área máxima que puede cercar?

20. *(Decisiones sobre cultivos)* La producción de manzanas de cada árbol en un huerto es de $(500 - 5x)$ kilos, en donde x es la densidad con que se plantan los árboles (es decir, el número de árboles por acre. Determine el valor de x que haga que la producción total por acre sea máxima.

21. *(Agricultura)* Si las plantas de arroz se siembran con una densidad de x plantas por pie cuadrado, la producción de arroz en cierta plantación es de $x(10 - 0.5x)$ bushels por acre. ¿Qué valor de x maximiza la producción por acre?

22. *(Decisiones sobre cultivos)* Si los manzanos se plantan con una densidad de 30 por acre, el valor de la cosecha producida por cada árbol es de \$180. Por cada árbol adicional que se planta en un acre, el valor de la cosecha disminuye en \$3. ¿Cuál es el número de árboles que deben plantarse por acre con objeto de obtener el valor máximo de la cosecha? ¿Cuál es este valor máximo por acre de la cosecha?

23. *(Fijación del precio de un libro)* Si un editor fija el precio de un libro en \$20 cada uno, venderá 10,000 ejemplares. Por cada dólar de incremento en el precio, las ventas bajan en 400 copias. ¿Qué precio debería fijar a cada libro de modo que el ingreso sea máximo? ¿Cuál es el valor de este ingreso máximo?

24. *(Decisiones sobre fijación de precios)* En el ejercicio 23, el costo de producir cada ejemplar es de \$13. ¿Qué precio deberá fijar el editor a cada ejemplar con el propósito de que la utilidad sea máxima?

25. *(Decisiones sobre fijación de alquileres)* Bienes raíces orientales ha construido una nueva unidad de 40 departamentos para rentar. Se sabe por las investigaciones de mercado que si asigna una renta de \$150 al mes, se ocuparán todos los departamentos. Por cada incremento de \$5 en la renta, un departamento quedará vacío. ¿Qué renta mensual deberá asignar a cada departamento de modo que obtenga ingresos por rentas mensuales máximos? Calcule este ingreso máximo.

26. *(Decisiones sobre fijación de precios)* La demanda del mercado de cierto producto es de x unidades cuando el precio fijado al consumidor es de p dólares, en donde

$$15p + 2x = 720$$

El costo (en dólares) de producir x unidades está dado por $C(x) = 200 + 6x$. ¿Qué precio p por unidad deberá fijarse al consumidor con objeto de que la utilidad sea máxima?

27. Demuestre que el vértice de la parábola cuya ecuación es $y = a(x - h)^2 + k$ está en el punto (h, k).

■ 5-3 MÁS FUNCIONES ELEMENTALES Y SUS GRÁFICAS

☛ **16.** ¿Cuál es la gráfica de f en el caso $n = 1$?

En esta sección, estudiaremos algunas funciones elementales de uso e interés común.

Funciones potencia

Una función de la forma

$$f(x) = ax^n$$

en donde a y n son constantes distintas de cero, se denomina **función potencia**. Consideraremos algunos casos especiales de funciones de este tipo.

1. $\boldsymbol{n = 2}$**:** En este caso $f(x) = ax^2$, y tenemos un caso especial de las funciones cuadráticas expuestas en la sección 2. La gráfica de $y = ax^2$ es una parábola con vértice en el origen, que se abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. ☛ **16**

Respuesta Una línea recta que pasa por el origen con pendiente a.

2. $\boldsymbol{n = \frac{1}{2}}$**:** Ahora, $f(x) = ax^{1/2} = a\sqrt{x}$. La gráfica es la *mitad de una parábola* que se abre hacia la derecha. Si $a > 0$, la gráfica es la mitad superior de la parábola, mientras que si $a < 0$, es la mitad inferior. En consecuencia, la gráfica sube o baja hacia la derecha, dependiendo de si $a > 0$ o $a < 0$. El dominio de f es el conjunto de los números reales no negativos. (Véase la figura 16).

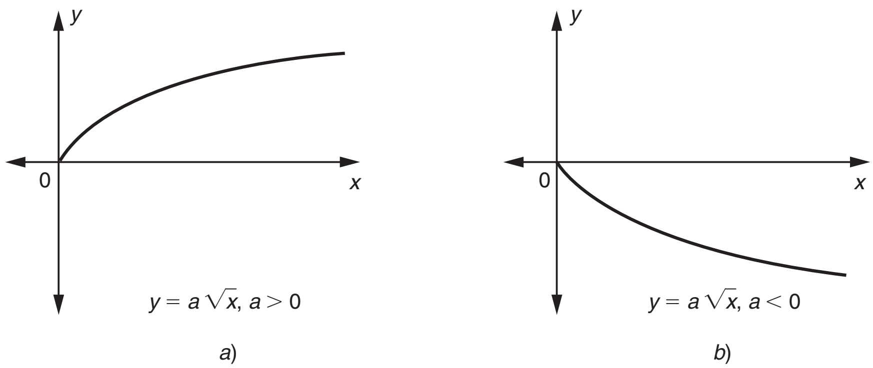


FIGURA 16

3. $\boldsymbol{n = -1}$**:** En este caso, $f(x) = a/x$. El dominio de $f(x)$ consta de todos los números reales excepto cero. La figura 17 contiene las gráficas de $y = 1/x$ y $y = -1/x$ (es decir, las correspondientes a $a = \pm 1$). La gráfica de $y = a/x$ cuando $a > 0$ tiene una forma similar a la de $y = 1/x$ y en el caso de que $a < 0$ es parecida a la forma de $y = -1/x$. La gráfica de $y = a/x$ se denomina una **hipérbola rectangular**. A medida que x se acerca a cero, el denominador de $f(x) = a/x$ se hace muy pequeño, de modo que $f(x)$ tiende a ser numéricamente muy grande. Puede llegar a ser grande y positivo o grande y negativo, dependiendo de los signos de a y de x. Estas posibilidades se ven claras en la figura 17. Se dice que el eje de las y es una **asíntota vertical** de la gráfica.

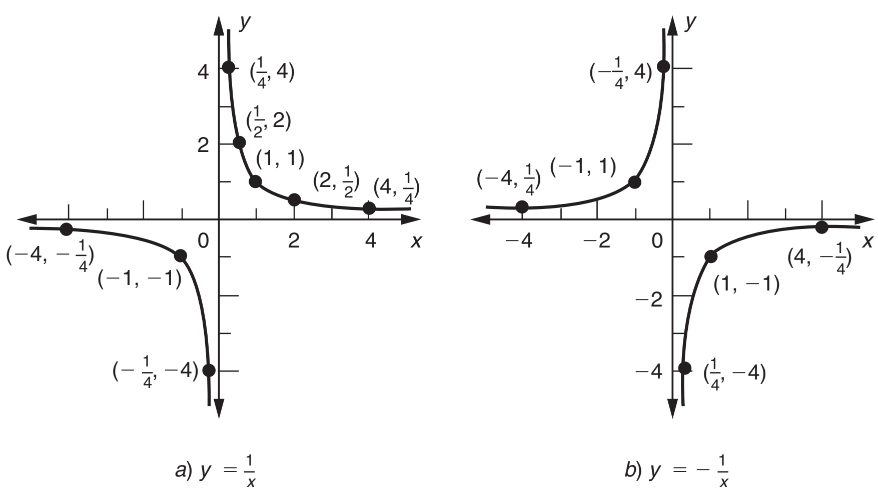


FIGURA 17

☛ **17.** Dibuje las gráficas de $f(x) = x^{-2}$ y $f(x) = x^{-1/2}$, que corresponden a $n = -2$ y $n = -\frac{1}{2}$, respectivamente y a $a = 1$.

En la gráfica puede verse que conforme x se vuelve más grande (positivo o negativo), $f(x)$ se acerca cada vez más a cero; sin embargo, jamás es igual a cero. Se dice que el eje x es una **asíntota horizontal** de la gráfica. ☛ **17**

4. $\boldsymbol{n = 3}$**:** Ahora, $f(x) = ax^3$. La gráfica de $f(x)$ es la curva cúbica que aparece en la figura 18. El dominio es igual al conjunto de todos los números reales.

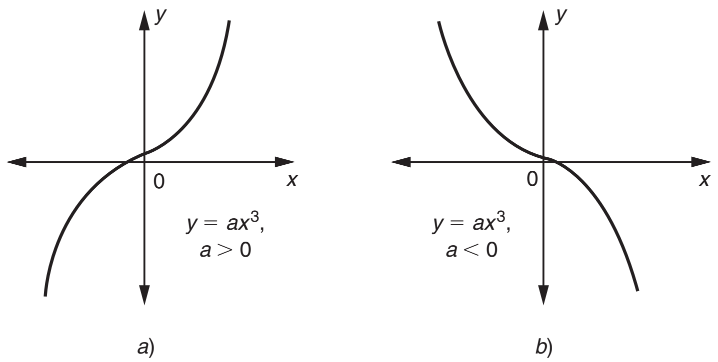


FIGURA 18

La figura 19 compara las gráficas de la función $y = ax^n$ para varios valores de n. Sólo se consideró el caso en que $a > 0$, y las gráficas se dibujaron, en el cuadrante en que x y y no son negativas. (En administración y economía, por lo regular estamos interesados en variables que sólo toman valores no negativos).

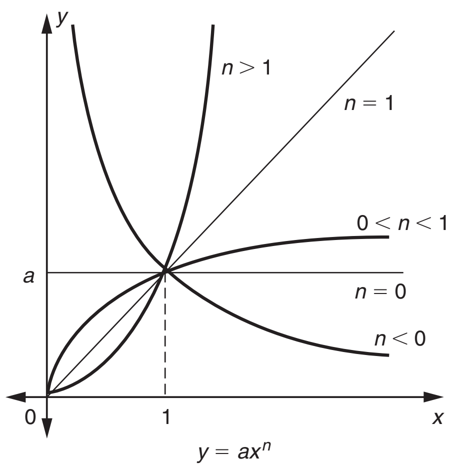
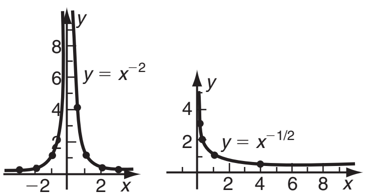


FIGURA 19

Respuesta

x	± 3	± 2	± 1	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{3}$
$y = x^{-2}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9
x	9	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$
$y = x^{-1/2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3



Observemos que todas las gráficas pasan por el punto $(1, a)$. Cuando $n > 1$, la gráfica sube al movernos hacia la derecha y, más aún, crece más y más pronunciadamente a medida que x se incremente. Las funciones $y = ax^2$ y $y = ax^3$ que ya habíamos considerado son ejemplos que caen en esta categoría. El caso $n = 1$ corresponde a la línea recta $y = ax$ que pasa por el origen y por el punto $(1, a)$.

Cuando $0 < n < 1$, la gráfica de $y = ax^n$ crece al desplazarnos hacia la derecha, pero este crecimiento es menos pronunciado a medida que x se incrementa. La función $y = ax^{1/2}$ que, como vimos antes, tiene una gráfica que es la mitad de una parábola, es un ejemplo de este tipo.

El caso $n = 0$ corresponde a una línea recta horizontal. Por último, si $n < 0$, la función $y = ax^n$ posee una gráfica que baja al movernos hacia la derecha y es asintótica a los ejes x y y. La hipérbola rectangular, con ecuación $y = ax^{-1}$, es un ejemplo de una de tales gráficas.

EJEMPLO 1 ***(Ingresos)*** Una empresa tiene un ingreso total de \$500 al día sin considerar el precio de su producto. Determine la relación de la demanda y grafique la curva de demanda.

Solución Si p denota el precio (en dólares) por unidad del producto y x es el número de unidades que pueden venderse al precio p, entonces con el propósito de obtener \$500, debemos tener que

$$500 = \text{Precio por unidad} \times \text{Número de unidades vendidas} = px$$

Es decir,

$$p = \frac{500}{x}$$

TABLA 5

x	25	50	100	125	250	500
p	20	10	5	4	2	1

Algunos valores de x y $p = 500/x$ aparecen en la tabla 5. Graficando estos puntos y uniéndolos por una curva suave, obtenemos la curva de la figura 20. Restringimos la gráfica al primer cuadrante porque ni el precio ni cantidad vendidos pueden ser negativos. La gráfica es la mitad de una hipérbola rectangular.

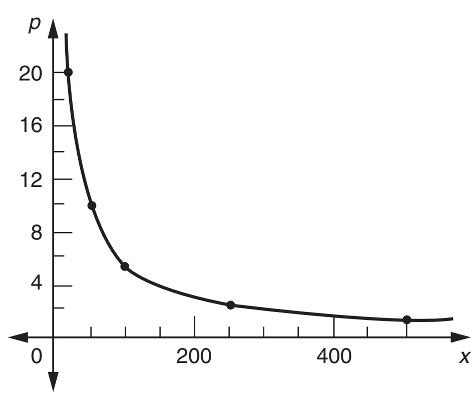


FIGURA 20

☛ **18.** Determine la ecuación del círculo:
a) con centro $(-3, 4)$ y radio 5;
b) con centro $(1, -2)$ y que pasa por el punto $(-2, 1)$.

Círculos

Un **círculo** es el conjunto de puntos que están situados a una distancia constante (llamada el **radio**) de un punto dado (denominado el **centro**).

Determinemos la ecuación del círculo con centro en el punto (h, k) y radio r (Véase la figura 21). Sea (x, y) cualquier punto sobre el círculo. La distancia entre este punto (x, y) y el centro (h, k) está dada por la fórmula de la distancia que es

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

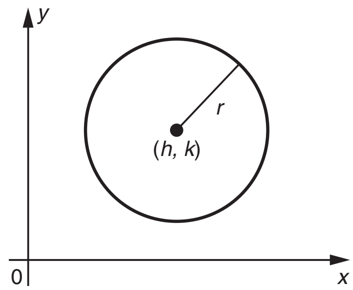


FIGURA 21

Haciéndola igual al radio dado r, obtenemos la ecuación

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

la cual, después de elevar al cuadrado, da la ecuación siguiente:

$$\boxed{(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \qquad (1)}$$

Ésta se conoce como la forma **centro-radio** de la ecuación de un círculo. En particular, si el centro es el origen, $h = k = 0$ y la ecuación (1) se reduce a

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2 \qquad (2)}$$

EJEMPLO 2 Determine la ecuación del círculo con centro en $(2, -3)$ y radio 5.

Solución Aquí $h = 2$, $k = -3$ y $r = 5$. Usando la ecuación estándar de un círculo, tenemos que

$$(x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = 5^2 \quad \text{o bien} \quad (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

Desarrollando los cuadrados y simplificando.

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$ ☛ **18**

Respuesta *a*) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$;
b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 13 = 0$ (Radio $= \sqrt{[1 - (-2)]^2 + [(-2) - 1]^2} = \sqrt{18}$)

La ecuación (1), cuando se desarrolla y simplifica, puede escribirse como

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

☛ **19.** Determine si las ecuaciones siguientes representan círculos.
Si es así encuentre el centro y el radio:
a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 8x + 4y = 0$
c) $x^2 + y^2 - 3x + 3y + 5 = 0$

Ésta es de la forma

$$x^2 + y^2 + Bx + Cy + D = 0 \tag{3}$$

con B, C y D constantes dadas por

$$B = -2h, \quad C = -2k \quad \text{y} \quad D = h^2 + k^2 - r^2$$

La ecuación (3) se llama **forma general** de la ecuación de un círculo.

Dada cualquier ecuación en la forma general, fácilmente podemos determinar el centro y el radio del círculo que representa. Debido a que

$$h = -\frac{B}{2} \quad \text{y} \quad k = -\frac{C}{2}$$

dan de inmediato las coordenadas del centro. Luego, el radio se obtiene de la manera siguiente $r^2 = h^2 + k^2 - D$. Sin embargo, en lugar de tratar de recordar estas fórmulas, es más fácil utilizar el método de completar el cuadrado como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Determine si la gráfica de

$$2x^2 + 2y^2 - 5x + 4y - 1 = 0$$

es un círculo. Si es así, encuentre su centro y su radio.

Solución Dividiendo la ecuación completa entre 2 (con el fin de que los coeficientes de x^2 y y^2 sean iguales a 1), obtenemos la ecuación

$$x^2 + y^2 - \tfrac{5}{2}x + 2y - \tfrac{1}{2} = 0$$

Comparando esto con la ecuación (3), vemos que tenemos una ecuación en la forma general correcta.

Ahora agrupamos todos los términos en x y todos los términos en y y pasamos la constante al lado derecho:

$$(x^2 - \tfrac{5}{2}x) + (y^2 + 2y) = \tfrac{1}{2}$$

Deseamos acomodar esto en la misma forma que la ecuación (1), que implica completar el cuadrado dentro de cada uno de los dos paréntesis. Tomamos la mitad del coeficiente de x, $-\frac{5}{4}$, lo elevamos al cuadrado, $\frac{25}{16}$, y sumamos esto al primer paréntesis. Después la mitad del coeficiente de y, 1, lo elevamos al cuadrado, 1, y sumamos esto en el segundo paréntesis. (Véase la sección 2-3). Por supuesto, también debemos sumar lo mismo del lado derecho. Obtenemos

$$(x^2 - \tfrac{5}{2}x + \tfrac{25}{16}) + (y^2 + 2y + 1) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{25}{16} + 1 = \tfrac{49}{16}$$

Ahora, los dos paréntesis son cuadrados perfectos:

$$(x - \tfrac{5}{4})^2 + (y + 1)^2 = \tfrac{49}{16}$$

Comparando con la ecuación (1) vemos que $h = \frac{5}{4}$, $k = -1$ y $r^2 = \frac{49}{16}$ o $r = \frac{7}{4}$. El centro del círculo es $(\frac{5}{4}, -1)$ y el radio es de $\frac{7}{4}$ unidades.

Nota Si después de completar el cuadrado encontramos un valor negativo para r^2, es decir, el lado derecho, la gráfica no contiene puntos. ☛ **19**

Respuesta *a*) Sí. Centro $(2, -1)$, radio 3; *b*) sí. Centro $(-4, -2)$, radio $2\sqrt{5}$; *c*) no

Algunas veces sucede que una empresa puede elegir entre dos (o más) formas de usar algunos de sus recursos con la finalidad de producir diferentes productos elaborados. Recursos tales como materias primas disponibles, planta industrial, maquinaria y mano de obra, en ciertas condiciones, podrían destinarse a la producción de varios artículos diferentes y la compañía podría elegir cómo producir cada uno de ellos. Por ejemplo, un fabricante de zapatos podría producir zapatos para caballero o para dama con los mismos recursos, una refinería de petróleo podría elegir una variedad de distintos grados de aceites y gasolinas por generar a partir del petróleo crudo, etcétera.

En general, estos diferentes productos compiten por el uso de los recursos disponibles (esto es, un incremento en la cantidad de un producto debe acompañarse por una disminución en las cantidades de los otros). Estas diversas cantidades están relacionadas por una ecuación. Cuando sólo compiten dos productos, esta ecuación puede graficarse, y su gráfica se denomina **curva de transformación de productos**.

EJEMPLO 4 ***(Curva de transformación de productos)*** Una empresa que fabrica zapatos puede producir zapatos para caballero o para dama modificando el proceso de producción. Las cantidades posibles x y y (en cientos de pares) están relacionadas por la ecuación

$$x^2 + y^2 + 40x + 30y = 975$$

Dibuje la curva de transformación de productos de esta empresa.

Solución La ecuación dada tiene la forma general de la ecuación (3) y por ende su gráfica es un círculo. Los coeficientes son

$$B = 40, \quad C = 30 \quad \text{y} \quad D = -975$$

Las coordenadas del centro del círculo son

$$h = -\frac{B}{2} = -\frac{40}{2} = -20 \quad \text{y} \quad k = -\frac{C}{2} = -\frac{30}{2} = -15$$

de modo que el centro está en el punto $(-20, -15)$. El radio es

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{B^2 + C^2 - 4D} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(40)^2 + (30)^2 - 4(-975)} = 40$$

En la figura 22 aparece la curva de transformación de productos. Obsérvese que al

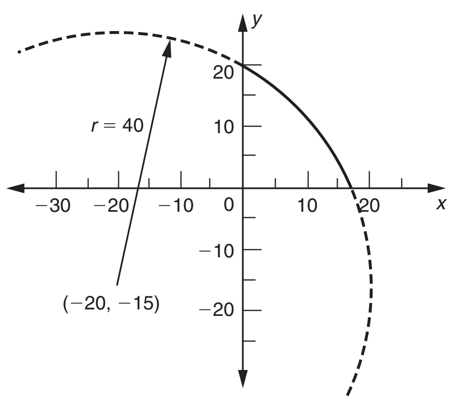


FIGURA 22

ser x y y no negativas en la práctica, sólo la porción de la curva situada en el primer cuadrante tiene sentido práctico. El resto de la curva aparece a trazos en la figura 22.

El conjunto de puntos (x, y) que satisfacen la relación $x^2 + y^2 = a^2$ consta de los puntos sobre el círculo cuyo centro es el origen y con radio a. Podemos referirnos a este círculo como la gráfica de la relación $x^2 + y^2 = a^2$. (Véase la figura 23).

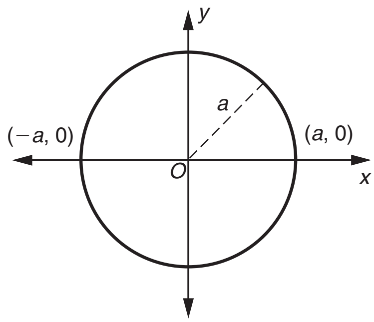


FIGURA 23

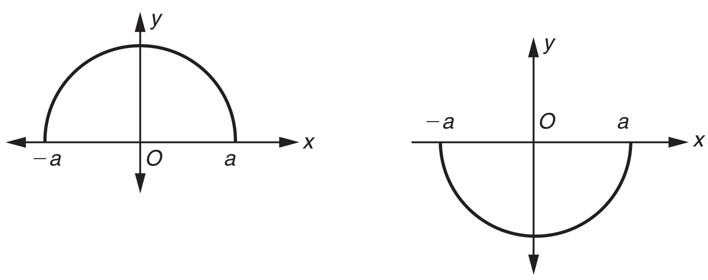
Por medio de la prueba de la recta vertical, es claro que el círculo no puede representar una función porque cada valor de x situado entre $-a$ y $+a$ (excluyendo a $x = \pm a$) tiene asociados dos valores de y. Podemos ver esto en forma algebraica si resolvemos la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ para y:

$$y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$$

☛ **20.** Determine las dos funciones que describen los semicírculos superior e inferior de *a*) el círculo con centro en (0, 2) y radio 1; *b*) el círculo con centro en (2, −1) y radio 3

Esto indica que hay dos valores de y para cada x, dependiendo de que elijamos la raíz cuadrada positiva o negativa.

De hecho, el círculo completo representa dos funciones. El semicírculo superior es la gráfica de la función $y = +\sqrt{a^2 - x^2}$, en la cual se extrajo la raíz cuadrada positiva a y; el semicírculo inferior es la gráfica de la función $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$, en donde se extrajo la raíz cuadrada negativa. (Véase la figura 24). ☛ **20**



$y = +\sqrt{a^2 - x^2}$
D_f: $\{\,x \mid -a \le x \le a\}$

$y = -\sqrt{a^2 - x^2}$
D_f: $\{\,x \mid -a \le x \le a\}$

FIGURA 24

Respuesta *a*) $y = 2 \pm \sqrt{1 - x^2}$
b) $y = -1 \pm \sqrt{9 - (x - 2)^2}$

Funciones valor absoluto

Si x es un número real, el valor absoluto de x, indicado por $|x|$, se define como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Es claro que, $|x| \geq 0$; esto es, el *valor absoluto de un número real siempre es no negativo.*

Llamaremos a $f(x) = |x|$ la **función valor absoluto**. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales y el rango es el conjunto de todos los reales no negativos. La gráfica de $y = |x|$ se aprecia en la figura 25.

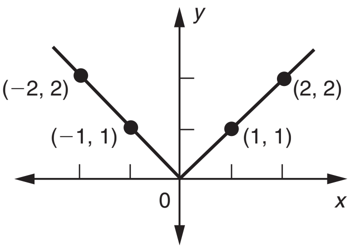


FIGURA 25

EJEMPLO 5 Considere la función

$$f(x) = |x - 2|$$

El dominio de f es el conjunto de todos los reales y el rango es el conjunto de los números reales no negativos. Dibujemos la gráfica de $f(x)$.

Haciendo $y = f(x)$, tenemos

$$y = |x - 2|$$

o, usando la definición anterior para el valor absoluto,

$$y = x - 2 \quad \text{si } x - 2 \geq 0 \quad (\text{esto es, si } x \geq 2)$$

y también

$$y = -(x - 2) \quad \text{si } x - 2 < 0 \quad (\text{esto es, si } x < 2)$$

Por tanto, la gráfica de $f(x)$ consta de porciones de las dos líneas rectas

$$y = x - 2 \quad \text{y} \quad y = -(x - 2) = 2 - x$$

para $x \geq 2$ y $x < 2$, respectivamente. La gráfica aparece en la figura 26. Obsérvese que $y \geq 0$ para toda x. ☛ **21**

☛ **21.** Con respecto a la figura 26, ¿cómo son las gráficas de las funciones siguientes?
a) $y = |2 - x|$
b) $y = |2 - x| - 2$

Respuesta *a*) Igual que la figura 26; *b*) la gráfica de la figura 26 debe moverse 2 unidades hacia abajo.

EJEMPLO 6 Considere la función

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

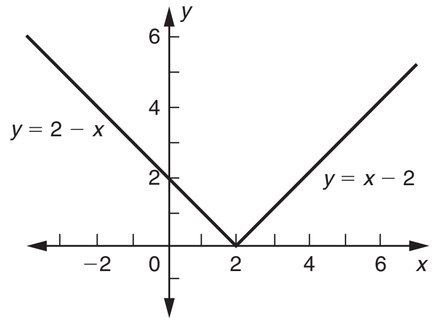


FIGURA 26

Sin duda, la función no está definida si $x = 0$, puesto que en este valor de x el denominador se hace cero. En consecuencia, el dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto cero.

$$\text{Si } x > 0, \quad f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

$$\text{Si } x < 0, \quad f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

Por ejemplo,

$$f(-3) = \frac{|-3|}{(-3)} = \frac{3}{(-3)} = -1$$

Así que el rango sólo consta de dos números, 1 y -1.

La gráfica de f consta de dos líneas rectas (una por encima y otra por debajo del eje x) que son paralelas al eje x y a una distancia 1 de él. Esto se aprecia en la figura 27. Nótese que los puntos extremos en que las dos líneas cortan al eje y *no* están incluidos en la gráfica. Esto se indica dibujando pequeños círculos vacíos en los extremos de las dos líneas.

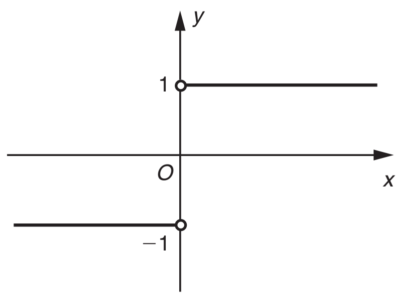


FIGURA 27

EJEMPLO 7 Haga un bosquejo de la gráfica de la función f en donde

$$f(x) = 4 - 2|3 - x|$$

y de aquí determine el valor máximo de f.

Solución Para $3 - x \geq 0$, esto es, para $x \leq 3$, $|3 - x| = 3 - x$ y de aquí

$$f(x) = 4 - 2(3 - x) = 2x - 2$$

Para $3 - x < 0$, esto es, para $x > 3$, $|3 - x| = -(3 - x)$ y así

$$f(x) = 4 - 2[-(3 - x)] = 10 - 2x$$

De modo que la gráfica de f consiste en dos semirrectas, como se muestra en la figura 28. El valor máximo de f es 4, que ocurre para $x = 3$. ☛ **22**

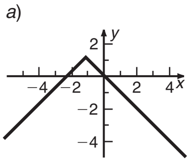
☛ **22.** Haga un bosquejo de las gráficas de

a) $y = 1 - |x + 1|$

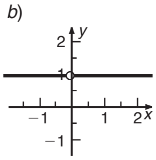
b) $y = \left(\dfrac{|x|}{x}\right)^2$

Respuesta

a)



b)



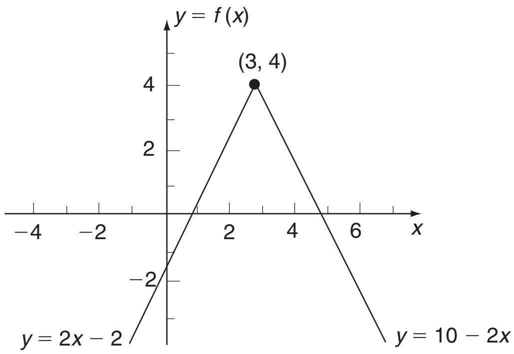


FIGURA 28

EJERCICIOS 5-3

(1-14) Determine los dominios de las siguientes funciones y bosqueje sus gráficas.

1. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ **2.** $f(x) = 2 - \sqrt{9 - x^2}$

3. $g(x) = -\sqrt{3 - x}$ **4.** $f(x) = \sqrt{x - 2}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **6.** $f(x) = \dfrac{-3}{x - 2}$

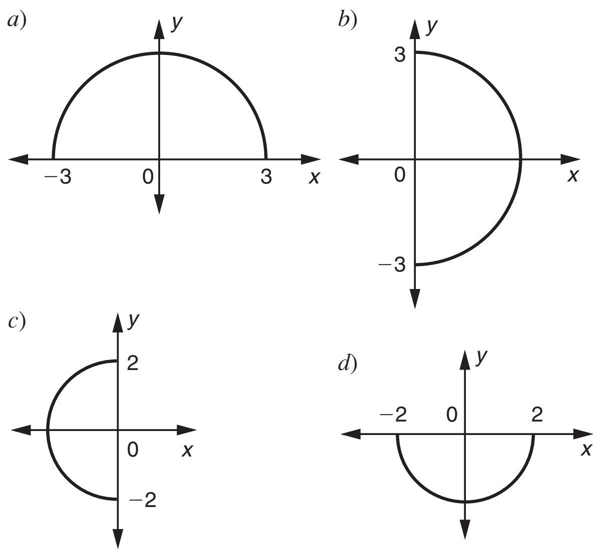
7. $f(x) = x^3$ **8.** $f(x) = 1 - x^3$

9. $f(x) = 2 - |x|$ **10.** $g(x) = |x| + 3$

11. $f(x) = |x + 3|$ **12.** $F(x) = -|x - 2|$

13. $f(x) = \dfrac{|x - 3|}{x - 3}$ **14.** $G(x) = \dfrac{2 - x}{|x - 2|}$

15. ¿Cuáles de los siguientes semicírculos representan gráficas de funciones? En cada caso en que la respuesta sea afirmativa, determine la ecuación de la función a partir de la gráfica.



(16-23) Encuentre la ecuación de cada círculo.

16. Centro (0, 2) y radio 5

17. Centro (2, 5) y radio 3

18. Centro $(-3, 0)$ y radio 4

19. Centro (0, 0) y radio 7

20. Centro $(1, -3)$ y pasa por el punto $(2, -1)$

21. Centro $(-2, 1)$ y pasa por el punto (0, 4)

22. Centro (2, 2) y toca ambos ejes coordenados.

23. Toca ambos ejes coordenados, está en el segundo cuadrante y tiene radio de 3 unidades.

(24-29) Determine si cada una de las siguientes ecuaciones representa un círculo. Si es así, encuentre su centro y radio.

24. $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$

25. $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$

26. $x^2 + y^2 + 3x - 5y + 1 = 0$

27. $2x^2 + 2y^2 - 5x + 4y - 1 = 0$

28. $3x^2 + 3y^2 - 2x + 4y - (\frac{11}{9}) = 0$

29. $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 25 = 0$

30. *(Curva de la demanda)* Al precio de p dólares por unidad, un fabricante puede vender x unidades de su producto, en donde x y p están relacionadas por

$$x^2 + p^2 + 400x + 300p = 60{,}000$$

Dibuje la curva de demanda. ¿Cuál es el precio más alto por encima del cual no hay ventas posibles?

31. *(Relación de la demanda)* Un comerciante de automóviles puede vender x automóviles de un modelo particular al fijar un precio de p por automóvil, con

$$x^2 + p^2 + 4000x + 2500p = 19{,}437{,}500$$

Grafique la curva de la demanda para este modelo de automóvil. ¿Cuál es el precio más alto hasta el cual es posible realizar ventas?

32. *(Curva de transformación de productos)* El propietario de un huerto puede producir manzanas para mesa o manzanas destinadas a la fermentación. Las cantidades posibles x de manzanas para mesa (en kilogramos) y y de sidra (en litros) están relacionadas por la ecuación

$$x^2 + y^2 + 8x + 250y = 6859$$

Dibuje la gráfica de esta relación (denominada la *curva de transformación de productos*) y determine las cantidades máximas de manzanas o sidra que pueden producirse.

33. *(Curva de transformación de productos)* Las industrias de bicicletas Coronado fabrican dos tipos de bicicletas denominadas *Coronado* y *Estrella del este.* Las cantidades posibles x y y (en miles) que puede producir al año están relacionadas por

$$x^2 + y^2 + 6x + 10y = 47$$

Bosqueje la curva de transformación de productos de esta empresa. ¿Cuáles son los números máximos de bicicletas de cada tipo que pueden producirse?

34. *(Distancia mínima)* Un avión vuela una distancia de 1000 millas sobre el océano, y su ruta pasa sobre dos islas, una después de 200 millas y la otra después de 700 millas. Si x es la distancia de un punto de la ruta a un punto dado ($0 \leq x \leq 1000$), determine la función $f(x)$ que es igual a la distancia de ese punto a la tierra más cercana. Trace su gráfica.

35. *(Distancia mínima)* En el ejercicio anterior, la función $g(x)$ es igual a la distancia del punto x desde la tierra más cercana *adelante* del avión. Escriba expresiones algebraicas para $g(x)$.

(36-45) Determine los valores máximos y/o mínimos de las siguientes funciones si existen y los valores de x en donde ocurren. (*Sugerencia:* En cada caso considere la gráfica de la función).

36. $f(x) = 2 - |x + 1|$

37. $f(x) = |2x + 1| + 2$

38. $f(x) = x - |x|$

39. $f(x) = \dfrac{|x - 5|}{5 - x}$

40. $f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2}$

41. $f(x) = \sqrt{1 - 9x^2} - 2$

42. $f(x) = 1 - \sqrt{9 - x^2}$

43. $f(x) = \sqrt{16 - x^2} - 1$

44. $f(x) = 2 - \sqrt{3 - 2x}$

45. $f(x) = 2\sqrt{1 - x} + 1$

■ 5-4 OPERACIONES DE FUNCIONES

Existe una gran variedad de situaciones en que debemos combinar dos o más funciones en una de varias formas con el propósito de obtener nuevas funciones. Por ejemplo, denotemos con $f(t)$ y $g(t)$ los ingresos de una persona de dos fuentes distintas al tiempo t; ahora, el ingreso combinado de las dos fuentes es $f(t) + g(t)$. De las dos funciones f y g, en esta forma hemos obtenido una tercera función, la *suma* de f y g. Si $C(x)$ denota el costo de producir x unidades de cierto artículo e $I(x)$ es el ingreso obtenido de la venta de x unidades, la utilidad $U(x)$ obtenida por producir y vender x unidades está dada por $U(x) = I(x) - C(x)$. La nueva función U así obtenida es la *diferencia* de las dos funciones I y C.

Si $P(t)$ indica la población de un país e $I(t)$ es el ingreso per cápita en el momento t, el ingreso nacional de tal país está dado por $P(t)I(t)$. Éste es un ejemplo en el que se forma una nueva función como el *producto* de dos funciones. De manera análoga, podemos definir el *cociente* de dos funciones. Sea $F(t)$ el suministro diario total de proteínas disponibles en cierto país en el tiempo t y sea $P(t)$ la población. Entonces el suministro diario promedio de proteínas diarias por día es $F(t)/P(t)$.

Estos ejemplos nos conducen a las definiciones abstractas siguientes.

DEFINICIÓN Dadas dos funciones f y g, la **suma**, la **diferencia**, el **producto** y el **cociente** de esas funciones se definen de la manera siguiente:

Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

Diferencia: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

Producto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, con tal de que $g(x) \neq 0$

Los dominios de las funciones suma, diferencia y producto son iguales a la parte común de los dominios de f y g, esto es, al conjunto de las x en las cuales tanto f como g están definidas. En el caso de la función cociente, el dominio es la parte común de los dominios de f y g excepto por aquellos valores de x en los cuales $g(x) = 0$.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = 1/(x - 1)$y $g(x) = \sqrt{x}$. Calcule $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, f/g y g/f. Determine el dominio en cada caso.

Solución Tenemos:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x - 1} + \sqrt{x}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x - 1} - \sqrt{x}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x - 1} \cdot \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{x - 1}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/(x - 1)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}(x - 1)}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x}}{1/(x - 1)} = \sqrt{x}(x - 1)$$

Ya que su denominador se hace cero cuando $x = 1$, $f(x)$ no está definida si $x = 1$, de modo que el dominio de f es igual al conjunto de todos los reales excepto 1.

De manera similar, $g(x)$ está definida en aquellos valores de x para los cuales la expresión dentro del radical no es negativa, esto es, para $x \geq 0$. Así que

$$D_f = \{x \mid x \neq 1\} \quad \text{y} \quad D_g = \{x \mid x \geq 0\}$$

La parte común de D_f y D_g es

$$\{x \mid x \geq 0 \quad \text{y} \quad x \neq 1\} \tag{1}$$

Este conjunto es el dominio de $f + g$, $f - g$ y $f \cdot g$.

Dado que $g(x) = \sqrt{x}$ es cero cuando $x = 0$, este punto debe excluirse del dominio de f/g. En consecuencia, el dominio de f/g es

$$\{x \mid x > 0 \quad \text{y} \quad x \neq 1\}$$

Puesto que $f(x)$ nunca es cero, el dominio de g/f es otra vez la parte común de D_f y D_g, es decir el conjunto (1). Es evidente de la fórmula algebraica de $(g/f)(x)$ que esta función está bien definida cuando $x = 1$. A pesar de esto, es necesario excluir $x = 1$ del dominio de esta función, dado que g/f sólo puede definirse en aquellos puntos en que tanto g como f estén definidas. ☛ **23**

☛ **23.** Dada $f(x) = \sqrt{1 - x}$ y $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, escriba expresiones para los valores de

a) $f \cdot g$; *b)* $\dfrac{f}{g}$; *c)* $\dfrac{g}{f}$

En cada caso proporcione el dominio

Otra forma en que dos funciones pueden combinarse y producir una tercera función se conoce como *composición* de funciones. Consideremos la situación siguiente.

El ingreso mensual I de una empresa depende del número x de unidades que produce y vende. En general, podemos afirmar que $I = f(x)$. Por lo regular, el número x de unidades que pueden venderse depende del precio p por unidad que se fija al consumidor, de modo que $x = g(p)$. Si eliminamos x de las dos relaciones $I = f(x)$ y $x = g(p)$, tenemos

$$I = f(x) = f(g(p))$$

Ésta da I como una función del precio p. Obsérvese la forma en que I se obtuvo como una función de p utilizando la función $g(p)$ como el argumento de la función f. Esto nos conduce a la definición siguiente.

DEFINICIÓN Sean f y g dos funciones. Sea x en el dominio de g de tal manera que $g(x)$ pertenezca al dominio de f. Entonces la **función composición** $f \circ g$ (léase *f compuesta con g*) se define por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

EJEMPLO 2 Sea $f(x) = 1/(x - 2)$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Evalúe:

a) $(f \circ g)(9)$ *b)* $(f \circ g)(4)$ *c)* $(f \circ g)(x)$

d) $(g \circ f)(6)$ *e)* $(g \circ f)(1)$ *f)* $(g \circ f)(x)$

Solución

a) $g(9) = \sqrt{9} = 3$. Por tanto,

$(f \circ g)(9) = f(g(9)) = f(3) = 1/(3 - 2) = 1$

Respuesta
a) $(f \cdot g)(x) = (1 - x)\sqrt{1 + x}$, dominio $= \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$
b) $(f/g)(x) = 1/\sqrt{1 + x}$, dominio $= \{x \mid -1 < x < 1\}$
c) $(g/f)(x) = \sqrt{1 + x}$, dominio $= \{x \mid -1 \leq x < 1\}$

b) $g(4) = \sqrt{4} = 2$. Tenemos

$$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(2) = 1/(2 - 2)$$

Esto no está definido. El valor $x = 4$ no pertenece al dominio de $f \circ g$, de modo que $(f \circ g)(4)$ no puede determinarse.

c) $g(x) = \sqrt{x}$

$$(f \circ g)(x) = (f(g(x)) = f(\sqrt{x}) - 2 = \frac{1}{\sqrt{x} - 2}$$

d) $f(6) = 1/(6 - 2) = \frac{1}{4}$

$$(g \circ f)(6) = g(f(6)) = g(\tfrac{1}{4}) = \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}$$

e) $f(1) = 1/(1 - 2) = -1$

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(-1) = \sqrt{-1}$$

el cual no es un número real. No podemos evaluar $(g \circ f)(1)$ porque 1 no pertenece al dominio de $g \circ f$.

(*f*) $f(x) = 1/(x - 2)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x - 2}\right) = \sqrt{\frac{1}{x - 2}} = \frac{1}{\sqrt{x - 2}}$$

El dominio de $f \circ g$ está dado por

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g \quad \text{y} \quad g(x) \in D_f\}$$

Es posible demostrar que, para las funciones del ejemplo 2,

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \geq 0 \quad \text{y} \quad x \neq 4\}$$

y también

$$D_{g \circ f} = \{x \mid x > 2\}$$ ☛ **24**

☛ **24.** Escriba expresiones para $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ en los siguientes casos. En cada caso proporcione el dominio de las composiciones.
a) $f(x) = \sqrt{1 - x}$ y $g(x) = x + 1$
b) $f(x) = x^{-2}$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$

EJEMPLO 3 ***(Ingresos)*** El ingreso mensual I obtenido por vender zapatos modelo de lujo es una función de la demanda x del mercado. Se observó que, como una función del precio p por par, el ingreso mensual y la demanda son

$$I = 300p - 2p^2 \quad \text{y} \quad x = 300 - 2p$$

¿Cómo depende I de x?

Solución Si $I = f(p)$ y $p = g(x)$, I puede expresarse como una función de x por medio de la composición $I = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. La función $f(p)$ está dada por $I = f(p) = 300p - 2p^2$. Sin embargo, con objeto de obtener $g(x)$, debemos resolver la relación de demanda $x = 300 - 2p$ de modo que expresemos p como función de x. Obtenemos así

$$p = \tfrac{1}{2}(300 - x)$$

Sustituimos este valor de p en I y simplificamos.

Respuesta *a*) $(f \circ g)(x) = \sqrt{-x}$, dominio $x \leq 0$; $(g \circ f)(x) = \sqrt{1 - x} + 1$, dominio $x \leq 1$; *b*) $(f \circ g)(x) = (x - 1)^{-1}$, dominio $x > 1$; $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^{-2} - 1}$, dominio $-1 \leq x \leq 1$, $x \neq 0$

$$
\begin{aligned}
I &= 300p - 2p^2 \\
&= 300 \cdot \tfrac{1}{2}(300 - x) - 2 \cdot \tfrac{1}{4}(300 - x)^2 \\
&= (150)(300) - 150x - \tfrac{1}{2}(300^2 - 600x + x^2) \\
&= 150x - 0.5x^2
\end{aligned}
$$

Éste es el resultado requerido, que expresa el ingreso mensual I como una función de la demanda x en el mercado.

EJERCICIOS 5-4

(1-5) Calcule la suma, la diferencia, el producto y el cociente de las dos funciones f y g en cada uno de los siguientes ejercicios. Determine los dominios de las funciones resultantes.

1. $f(x) = x^2$; $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

2. $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = \sqrt{x}$

3. $f(x) = \sqrt{x - 1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

4. $f(x) = 1 + \sqrt{x}$; $g(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 2}$

5. $f(x) = (x + 1)^2$; $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

(6-13) Dadas $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$, evalúe cada una de las siguientes composiciones.

6. $(f \circ g)(5)$ **7.** $(g \circ f)(3)$

8. $(f \circ g)(\frac{5}{4})$ **9.** $(g \circ f)(-2)$

10. $(f \circ g)(\frac{1}{2})$ **11.** $(g \circ f)(\frac{1}{3})$

12. $(f \circ g)(2)$ **13.** $(g \circ f)(1)$

(14-21) Si $f(x) = 1/(2x + 1)$ y $g(x) = -\sqrt{x}$, evalúe cada una de las funciones siguientes.

14. $(f \circ g)\ (1)$ **15.** $(f \circ g)(\frac{1}{4})$

16. $(f \circ g)\ (-1)$ **17.** $(f \circ g)(4)$

18. $(g \circ f)\ (0)$ **19.** $(g \circ f)(\frac{3}{2})$

20. $(g \circ f)\ (-1)$ **21.** $(g \circ f)(-\frac{1}{2})$

(22-32) Determine $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ en los siguientes ejercicios.

22. $f(x) = x^2$; $g(x) = 1 + x$

23. $f(x) = \sqrt{x} + 1$; $g(x) = x^2$

24. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$; $g(x) = \sqrt{x} + 1$

25. $f(x) = 2 + \sqrt{x}$; $g(x) = (x - 2)^2$

26. $f(x) = x^2 + 2$; $g(x) = x - 3$

27. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$

28. $f(x) = |x|$; $g(x) = x^2$

29. $f(x) = x - 1$; $g(x) = x^{-1}$

30. $f(x) = 3x - 1$; $g(x) = \dfrac{x + 1}{3}$

31. $f(x) = 3$; $g(x) = 7$

32. $f(x) = 4$; $g(x) = x^2$

(33-36) Encuentre $f(x)$ y $g(x)$ de tal manera que cada función composición $f \circ g$ sea como está escrita. (La respuesta no es única. Elija f y g de la manera más simple).

33. $(f \circ g)(x) = (x^2 + 1)^3$

34. $(f \circ g)(x) = \sqrt{2x + 3}$

35. $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x^2 + 7}$

36. $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 5}}$

37. *(Función de ingreso)* La demanda x de cierto artículo está dada por $x = 2000 - 15p$, en donde p es el precio por unidad del artículo. El ingreso mensual I obtenido de las ventas de este artículo está dado por $I = 2000p - 15p^2$. ¿Cómo depende I de x?

38. *(Función de ingreso)* Un fabricante puede vender q unidades de un producto al precio p por unidad, en donde $20p +$

$3q = 600$. Como una función de la cantidad q demandada en el mercado, el ingreso semanal total está dado por $R = 30q - 0.15q^2$. ¿En qué forma depende R del precio p?

39. *(Reacción química)* La velocidad a la cual un químico se produce en cierta reacción depende de la temperatura T de acuerdo con la fórmula $R = T^5 + 3\sqrt{T}$. Si T varía con el tiempo de acuerdo a $T = 3(t + 1)$, exprese R como una función de t y evalúe R cuando $t = 2$.

40. *(Física)* La velocidad de una cuerpo que cae varía con la distancia recorrida de acuerdo con la fórmula $v = 8\sqrt{y}$ (v = velocidad en pies por segundo, y = distancia en pies). La distancia que cae varía con el tiempo t (en segundos) de acuerdo con la fórmula $y = 16t^2$. Exprese v como una función de t.

41. Si $f(x) = ax - 4$ y $g(x) = bx + 3$, determine la condición sobre a y b tal que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ para toda x.

42. Si $f(x) = x + a$ y $g(t) = t + b$, demuestre que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

43. *(Construcción de viviendas)* El número de viviendas construidas por año, N, depende de la tasa de interés hipotecaria r de acuerdo con la fórmula

$$N(r) = \frac{50}{100 + r^2}$$

donde N está en millones. La tasa de interés actualmente está en 12% y se predice que disminuirá a 8% en los siguientes 2 años de acuerdo con la fórmula

$$r(t) = 12 - \frac{8t}{t + 24}$$

donde t es el tiempo medido en meses, a partir de ahora. Exprese N como una función del tiempo t. Calcule el valor de N cuando $t = 6$.

■ 5-5 RELACIONES IMPLÍCITAS Y FUNCIONES INVERSAS

Cuando y es una función conocida de x, esto es, $y = f(x)$, a menudo decimos que y es una **función explícita** de la variable independiente x. Ejemplos de funciones explícitas son $y = 3x^2 - 7x + 5$ y $y = 5x + 1/(x - 1)$.

Algunas veces el hecho de que y sea una función de x se expresa indirectamente por medio de alguna ecuación del tipo $F(x, y) = 0$, en la cual tanto x como y aparecen como argumentos de la función F del lado izquierdo. Una ecuación de este tipo se denomina una **relación implícita** entre x y y.

EJEMPLO 1 Consideremos $xy + 3y - 7 = 0$. En esta ecuación, tenemos una función en el lado izquierdo que incluye tanto a x como a y y la ecuación da una relación implícita entre x y y. En este caso podemos despejar y.

$$y(x + 3) = 7$$
$$y = \frac{7}{x + 3}$$

Por lo que podemos expresar y como una función explícita. En este ejemplo, la relación implícita dada es equivalente a cierta función explícita. Éste no siempre es el caso, como los ejemplos siguientes señalan.

EJEMPLO 2 Considere la relación implícita $x^2 + y^2 = 4$. En este caso, de nuevo podemos despejar y.

$$y^2 = 4 - x^2$$
$$y = +\sqrt{4 - x^2} \quad \text{o} \quad y = -\sqrt{4 - x^2}$$

Estas dos últimas ecuaciones son funciones explícitas. Así que la relación implícita $x^2 + y^2 = 4$ conduce a las dos funciones explícitas,

$$y = +\sqrt{4 - x^2} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{4 - x^2}$$

EJEMPLO 3 Considere la relación implícita $x^2 + y^2 + 4 = 0$. Si tratamos de despejar y, obtenemos

$$y^2 = -4 - x^2$$

Cualquiera que sea el valor de x, el lado derecho de esta ecuación es negativo, de modo que no podemos extraer la raíz cuadrada. En esta situación, la relación implícita no tiene solución. (Decimos que su dominio es vacío).

☛ **25.** Encuentre la función o funciones explícitas que corresponde a las siguientes relaciones:
a) $x(y - 2) = 2y - 1$
b) $x^2 - (y + 1)^2 = 2$
c) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$

EJEMPLO 4 $y^5 + x^3 - 3xy = 0$. Esta relación implica que y es una función de x, pero no podemos escribir a y en términos de x; es decir, no podemos expresar a y como una función explícita de x por medio de alguna fórmula algebraica. ☛ **25**

Cuando el hecho de que y sea una función de x esté **implicado** por medio de alguna relación del forma $F(x, y) = 0$, hablamos de y como una **función implícita** de x. Como en el ejemplo 4, esto no necesariamente significa que en realidad podamos encontrar alguna fórmula que exprese a y como función de x.

Dada una relación implícita $F(x, y) = 0$, por lo regular tenemos la libertad de elegir cuál de las variables x o y será la variable independiente. Consideremos la relación de demanda

$$2p + 3x = 12 \tag{1}$$

en donde x es la cantidad demandada al precio p por unidad. Esta ecuación define a p como una función implícita de x. Despejando a p, obtenemos

$$p = 6 - \tfrac{3}{2}x \tag{2}$$

la cual expresa a p como una función implícita de x. La gráfica de la ecuación (2) aparece en la figura 29.

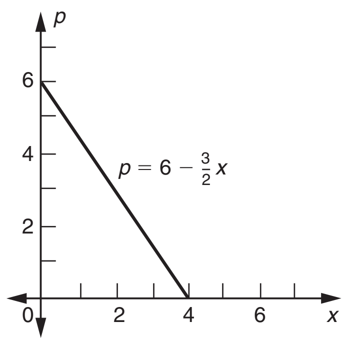


FIGURA 29

Respuesta *a*) $y = \dfrac{2x - 1}{x - 2}$
b) $y = -1 \pm \sqrt{x^2 - 2}$
c) $y = 4 \pm \sqrt{25 - (x + 3)^2}$

La ecuación (1) podría pensarse también como una definición de x como una función implícita de p. Resolviendo la ecuación (1) [o (2)] para x en términos de p, obtenemos

$$x = 4 - \tfrac{2}{3}p \tag{3}$$

La ecuación (3) expresa la demanda x como una función del precio p. Aquí p se considera como la variable independiente y x como la variable dependiente. La gráfica de la ecuación (3) aparece en la figura 30.

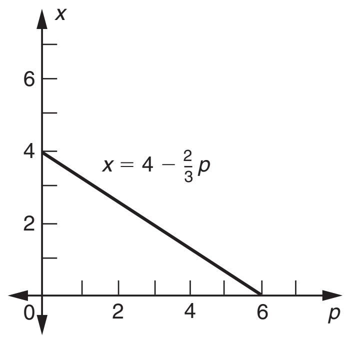


FIGURA 30

Así que, la relación dada en la ecuación (1) no define una sino dos funciones implícitas:

$$p = f(x) = 6 - \tfrac{3}{2}x \qquad \text{si } p \text{ se considera una función de } x$$

y también

$$x = g(p) = 4 - \tfrac{2}{3}p \qquad \text{si } x \text{ se considera una función de } p$$

Las dos funciones de f y g, con

$$f(x) = 6 - \tfrac{3}{2}x \quad \text{y} \quad g(p) = 4 - \tfrac{2}{3}p$$

se denominan **funciones inversas** entre sí.

En general, sea $y = f(x)$ alguna función dada. La ecuación $y - f(x) = 0$ representa una relación implícita entre x y y. Si consideramos a x como la variable independiente, podemos resolver esta relación para y, obteniendo nuestra función original, $y = f(x)$. Por otra parte, puede ser conveniente considerar a y como la variable independiente y resolver para x en términos de y. No siempre se puede hacer esto, pero en caso afirmativo, la solución se escribe como $x = f^{-1}(y)$ y f^{-1} se conoce como la *función inversa* de f.

Notas **1.** $f^{-1}(y)$ no debe confundirse con la potencia negativa

$$[f(y)]^{-1} = \frac{1}{f(y)}$$

2. Si efectuamos la composición de f y su función inversa, encontramos que

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{y} \quad (f \circ f^{-1})(y) = y$$

En otras palabras, la composición de f y f^{-1} da la función identidad, esto es, la función que deja la variable sin cambio.

☛ **26.** Dada $y = f(x)$ como sigue, encuentre $x = f^{-1}(y)$.
a) $y = 3x + 1$; *b*) $y = x^7$
c) $y = x^{1/3} + 1$

EJEMPLO 5 Encuentre la inversa de la función $f(x) = 2x + 1$.

Solución Haciendo $y = f(x) = 2x + 1$, debemos resolver para x como función de y.

$$2x = y - 1$$

$$x = \frac{y - 1}{2}$$

Por tanto la función inversa está dada por $f^{-1}(y) = (y - 1)/2$. Las gráficas de $y = f(x)$ y $x = f^{-1}(y)$ aparecen en las figuras 30 y 31, respectivamente. Ambas gráficas en este caso son líneas rectas. Obsérvese que cuando dibujamos la gráfica de $x = f^{-1}(y)$, el eje y se considera como el eje horizontal y el eje x como el eje vertical porque y es la variable independiente.

Respuesta *a*) $x = \frac{1}{3}(y - 1)$
b) $x = y^{1/7}$; *c*) $x = (y - 1)^3$

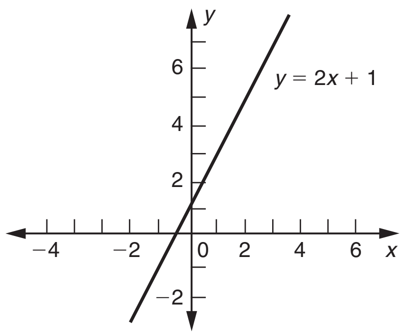


FIGURA 31

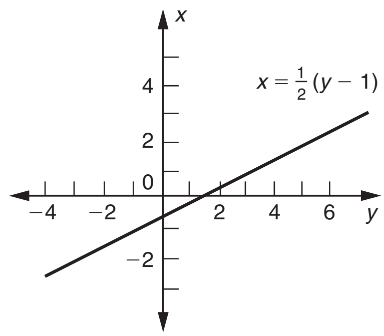


FIGURA 32

☛ **27.** La gráfica de f consiste en sólo los cinco puntos (1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, −1) y (5, 4). Determine los valores de $f(1)$, $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(3)$, $f(5)$, $f^{-1}(5)$. ¿Cuáles son los dominios de f y f^{-1}?

EJEMPLO 6 Determine la inversa de la función $f(x) = x^3$ y trace su gráfica.

Solución Haciendo $y = f(x) = x^3$, despejamos x, obteniendo $x = f^{-1}(y) = y^{1/3}$. Las gráficas de $y = f(x)$ y $x = f^{-1}(y)$ aparecen en las figuras 33 y 34, respectivamente. ☛ **26, 27**

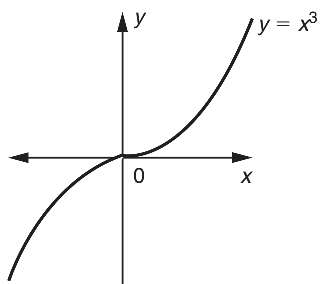


FIGURA 33

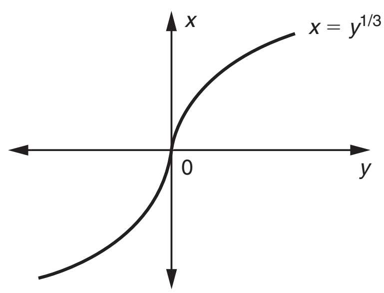


FIGURA 34

Respuesta $f(1) = 2$, $f^{-1}(1) = 3$, $f^{-1}(3) = 2$, $f(5) = 4$, $f^{-1}(5)$ no está definido.
Dominio de $f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Dominio de $f^{-1} = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$

Puede advertirse de estos dos ejemplos que las gráficas de una función $y = f(x)$ y su función inversa $x = f^{-1}(y)$ están muy relacionadas. De hecho, la gráfica de la función inversa se obtiene volteando la gráfica de la función original de modo que los ejes de coordenadas queden intercambiados. Por ejemplo, colocando la gráfica de $y = x^3$ enfrente de un espejo de tal manera que el eje y esté horizontal y el eje x señale verticalmente hacia arriba. La reflexión que el lector observará será la gráfica de $x = y^{1/3}$ que se aprecia en la figura 34.

Las gráficas de $y = f(x)$ y $x = f^{-1}(y)$ constan de exactamente los mismos conjuntos de puntos (x, y). La diferencia reside en que los ejes se dibujan en direcciones distintas en los dos casos.

☛ **28.** Dada $f(x)$ como sigue, encuentre $f^{-1}(x)$.
a) $f(x) = 2x - 4$
b) $f(x) = 1 + x^{-1}$

Sin embargo, algunas veces necesitamos considerar las gráficas de f y f^{-1} en el mismo conjunto de ejes. Para hacer esto, debemos intercambiar las variables x y y en la expresión $x = f^{-1}(y)$ y expresar a f^{-1} en la forma $y = f^{-1}(x)$. Por ejemplo, en el ejemplo 6 iniciamos con $y = f(x)$ como $y = x^3$ y encontramos la inversa $x = f^{-1}(y)$ como $x = y^{1/3}$. Pero, de igual forma bien podemos escribir esto como $y = f^{-1}(x)$, o $y = x^{1/3}$. ☛ **28**

Existe una relación interesante entre las gráficas de las funciones $y = f(x)$ y $y = f^{-1}(x)$ en los mismos ejes. La gráfica de cualquiera de estas funciones puede obtenerse reflejando la otra gráfica con respecto a la recta $y = x$. La figura 35 muestra las gráficas de la función $f(x) = x^3$ y su función inversa, $f^{-1}(x) = x^{1/3}$, dibujadas en los mismos ejes. Claramente, las dos gráficas son reflexiones una de la otra con respecto a la recta $y = x$.

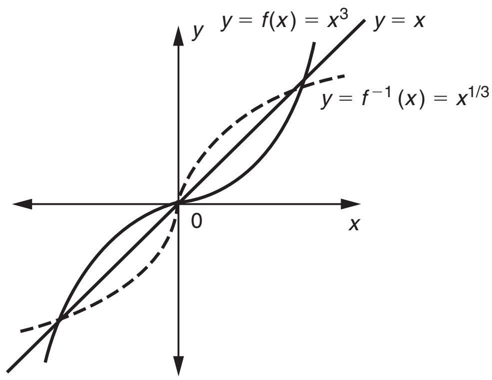


FIGURA 35

En general, sea (a, b) cualquier punto sobre la gráfica de $y = f(x)$. Entonces $b = f(a)$. Se sigue, por tanto, que $a = f^{-1}(b)$, de modo que (b, a) es un punto sobre la gráfica de $y = f^{-1}(x)$. Ahora puede demostrarse* que los puntos (a, b) y (b, a) son reflexiones uno del otro con respecto a la línea $y = x$. En consecuencia, para cada punto (a, b) sobre la gráfica de $y = f(x)$, existe un punto (b, a) sobre la gráfica de $y = f^{-1}(x)$ que es la reflexión del primer punto con respecto a la línea $y = x$.

No toda función tiene inversa. Consideremos, por ejemplo, la función $y = x^2$. Expresando a x en términos de y, obtenemos

$$x^2 = y \qquad \text{o} \qquad x = \pm\sqrt{y}$$

Respuesta *a)* $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 4)$
b) $f^{-1}(x) = (x - 1)^{-1}$

*Demuestre que la recta que une (a, b) y (b, a) es perpendicular a $y = x$ y que el punto medio está en $y = x$.

☛ **29.** Poniendo una restricción adecuada al dominio de f, en cada caso encuentre $x = f^{-1}(y)$:

a) $f(x) = (x - 2)^2$
b) $f(x) = (x + 2)^4$
c) $f(x) = (x^2 - 4)^2$

Así que para cada valor de y en la región $y > 0$, existen dos valores posibles de x. En consecuencia, no podemos afirmar que x sea una función de y.

Este ejemplo se ilustra gráficamente en las figuras 36 y 37. En la figura 36 aparece la gráfica de $y = x^2$, que es una parábola que se abre hacia arriba. La figura 37 muestra la misma gráfica, pero con los ejes cambiados; esto es, el eje y es horizontal y el eje x es vertical. Para cada $y > 0$, tenemos dos valores de x, $x = +\sqrt{y}$ y $x = \sqrt{y}$; por ejemplo, cuando $y = 1$, x tiene el valor $+1$ y -1, ambos de los cuales satisfacen la relación $y = x^2$.

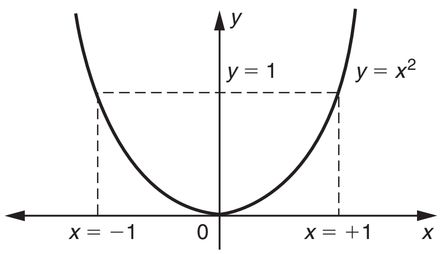


FIGURA 36

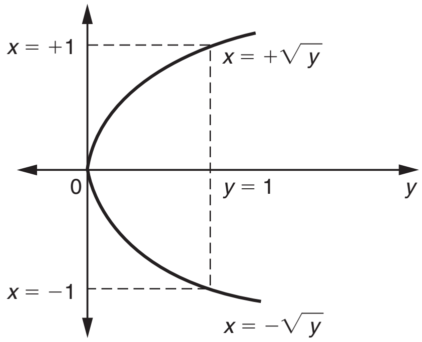


FIGURA 37

La gráfica de la figura 37 corresponde a dos funciones. La rama superior de la parábola es la gráfica de $x = +\sqrt{y}$, mientras que la rama inferior es la gráfica de $x = -\sqrt{y}$. Así que, podemos decir que la función $y = x^2$ tiene dos funciones inversas, una dada por $x = +\sqrt{y}$ la otra por $x = -\sqrt{y}$.

En un caso como éste, es posible definir f^{-1} sin ambigüedad alguna restringiendo los valores de x. Por ejemplo, si x se restringe a la región $x \geq 0$, $y = x^2$ tiene una inversa única $x = +\sqrt{y}$. Por otra parte, si x se restringe a la región $x \leq 0$, la inversa está dada por $x = -\sqrt{y}$. Hacer una restricción sobre x en esta forma significa restringir el dominio de la función original f. Concluimos, por tanto, que en casos en que una función $f(x)$ tiene más de una función inversa, la inversa puede hacerse única efectuando una restricción apropiada sobre el dominio de f. ☛ **29**

Vale la pena observar que *una función $f(x)$ tiene una inversa única siempre que cualquier línea horizontal intersecte su gráfica en a lo más un punto.*

Respuesta
a) $x = 2 + \sqrt{y}$ si el dominio es $x > 2$; $x = 2 - \sqrt{y}$ si el dominio es $x < 2$
b) $x = -2 + \sqrt[4]{y}$ si $x > -2$; $x = -2 - \sqrt[4]{y}$ si el dominio es $x < -2$
c) $x = \sqrt{4 + \sqrt{y}}$ si $x > 2$
$x = -\sqrt{4 + \sqrt{y}}$ si $x < -2$
$x = \sqrt{4 - \sqrt{y}}$ si $0 \leq x < 2$
$x = -\sqrt{4 - \sqrt{y}}$ si $-2 < x \leq 0$

EJERCICIOS 5-5

(1-14) Determine la función explícita o funciones que corresponden a las siguientes relaciones implícitas.

1. $3x + 4y = 12$

2. $5x - 2y = 20$

3. $xy + x - y = 0$

4. $3xy + 2x - 4y = 1$

5. $x^2 - y^2 + x + y = 0$

6. $x^2y + xy^2 - x - y = 0$

7. $x^2 + y^2 + 2xy = 4$

8. $9x^2 + y^2 + 6xy = 25$

9. $4x^2 + 9y^2 = 36$

10. $4x^2 - 9y^2 = 36$

11. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

12. $xy^2 + yx^2 = 6$

13. $xy^2 + (x^2 - 1)y - x = 0$

14. $y^2 - 3xy + (2x^2 + x - 1) = 0$

(15-24) Encuentre la inversa de cada una de las siguientes funciones. En cada caso, dibuje las gráficas de la función y su inversa.

15. $y = -3x - 4$ **16.** $y = x - 1$

17. $p = 4 - \frac{2}{5}x$ **18.** $q = 3p + 6$

19. $y = \sqrt{3x - 4}$ **20.** $y = \sqrt{\frac{1}{4}x + 2}$

21. $y = x^5$ **22.** $y = \sqrt{x}$

23. $y = \sqrt{4 - x}$ **24.** $y = -\sqrt{2 - x}$

(25-30) Efectuando una restricción adecuada sobre el dominio de cada una de las siguientes funciones, determine una función inversa.

25. $y = (x + 1)^2$ **26.** $y = (3 - 2x)^2$

27. $y = x^{2/3}$ **28.** $y = \sqrt{x^2 + 1}$

29. $y = |x - 1|$ **30.** $y = |x| - 1$

REPASO DEL CAPÍTULO 5

Términos, símbolos y conceptos importantes

5.1 Función, valor de una función; dominio y rango de una función.
Variable independiente o argumento, variable dependiente.
Gráfica de una función. Prueba de la recta vertical.
Función polinomial, grado. Funciones lineal, cuadrática y cúbica.
Función racional, función algebraica, función trascendental.

5.2 Parábola, vértice y eje.

5.3 Función potencia, $f(x) = ax^n$. Gráficas de funciones potencia para diferentes valores de n.
Círculo, fórmula del centro-radio. Ecuación general de un círculo. Curva de transformación de productos.
Función valor absoluto y su gráfica.

5.4 Suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones.
Composición de dos funciones: $f \circ g$.

5.4 Relación implícita, función implícita.
La inversa f^{-1} de una función f.
Relaciones entre las gráficas de f y f^{-1}.

Fórmulas

Si $y = ax^2 + bx + c = f(x)$, entonces el vértice está en $x = -b/2a$, $y = f(-b/2a)$.

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, y $a > 0$, entonces f es mínima cuando $x = -b/2a$; si $a < 0$, entonces f es máximo cuando $x = -b/2a$.

Fórmula centro-radio: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Ecuación general de un círculo: $x^2 + y^2 + Bx + Cy + D = 0$

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 5

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) El dominio de $f(x) = (\sqrt{x})^2$ es el conjunto de todos los números reales.

b) Una función es una regla que asigna a cada elemento del dominio al menos un valor del rango.

c) Una curva dada es la gráfica de una función sea cualquier recta vertical corta a la curva en a lo más un punto.

d) El rango de $g(x) = \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$ es $\{1\}$

e) Si $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ y $f(x) = x + 2$, entonces $f(x) = g(x)$ para toda x.

f) Si f y g son dos funciones, entonces $f + g$, $f - g$ y fg tienen el mismo dominio.

g) Si f tiene función inversa, entonces la gráfica de f^{-1} es la reflexión de la gráfica de f con respecto a la recta $y = x$.

h) Si f y g son dos funciones tales que $f \circ g$ y $g \circ f$ están definidas, entonces $f \circ g = g \circ f$.

i) La función inversa de la función $f(x) = 5x - 2$ es $g(x) = \dfrac{x + 2}{5}$

j) La gráfica de cualquier función cuadrática es una parábola.

k) Para cualesquiera valores de a y b, la función $f(x) = ax + b$ representa una recta.

l) La gráfica de cualquier recta siempre representa la gráfica de una función.

m) El dominio de la función cociente $(f/g)(x)$ consiste en todos los números que pertenecen al mismo tiempo al dominio de f y al dominio de g.

n) La relación $4x + 5xy + 8y = 10$ define de manera implícita a la función $y(x) = \dfrac{10 - 4x}{5x + 8}$

o) Una función $f(x)$ tiene una inversa única siempre que cualquier recta horizontal interseque a su gráfica en a lo más un punto.

(2-6) Una función f que satisface la propiedad $f(x) = f(-x)$, para todo x en su dominio, se denomina *función par*. Mientras que si para toda x en su dominio satisface $f(-x) = -f(x)$, se conoce como *función impar*. Determine si las siguientes funciones son par, impar o ninguna de éstas.

2. $f(x) = 3x$

3. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{1 + 2x^2 - x^4}$

4. $f(x) = |x^2 - 2x + 2|$

5. $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 21x^2 - 8x + 11$

6. $f(x) = 0$

7. Proporcione un ejemplo de una función que satisfaga la propiedad $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para todos los valores de x y y en su dominio.

8. Dos funciones f y g se dice que son iguales si $f(x) = g(x)$ para toda x del dominio y $D_f = D_g$. Con este criterio, determine cuál o cuáles de las siguientes funciones son iguales a $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x}$

a) $g(x) = x + 1$

b) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 + 2x^3 + x^2}}{x}$

c) $G(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{x^2}$

d) $H(x) = \dfrac{(x^3 + x)(x + 1)}{(x^2 + 1)x}$

(9-14) Determine una ecuación de la circunferencia que cumple con las condiciones dadas.

9. Centro en $(1, -1)$ y radio 4.

10. Radio 5, se encuentra en el primer cuadrante y toca a los dos ejes coordenados.

11. Pasa por el origen, y por los puntos $(1, 1)$ y $(1, -1)$.

12. Su centro está en el eje x, tiene radio 3 y pasa por el punto $(2, -3)$.

***13.** Un diámetro es el segmento de recta que une los puntos $(1, 1)$ y $(7, 9)$.

14. Tiene radio 2 y es concéntrica a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$.

15. Una circunferencia con radio igual a 3 y centro en el punto $(-2, k)$ pasa por el punto $(1, 8)$, determine el valor de k.

16. Determine una ecuación de la circunferencia con centro en $(-5, -12)$ y que pasa por el origen.

(17-22) Determine si cada una de las ecuaciones siguientes representa una circunferencia. En caso afirmativo, determine su centro y radio, y los puntos (si existen) en donde corta a los ejes coordenados.

17. $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 20 = 0$

18. $x^2 + y^2 + 20x + 16y + 148 = 0$

19. $x^2 + y^2 + 2x + 3 = 0$

20. $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$

21. $x^2 + y^2 + 20x + 30y + 289 = 0$

22. $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 100 = 0$

(23-26) Para cada una de las siguientes funciones, determine el dominio y dibuje su gráfica.

23. $f(x) = \sqrt{x - 1}$

24. $g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

25. $F(x) = \dfrac{9 - x^2}{x + 3}$

26. $G(x) = \sqrt{16 - x^2}$

27. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$, calcule $f \circ g$ y $g \circ f$

28. Si $f(x) = 5 + x$ y $g(x) = |x|$, calcule $f \circ g$ y $g \circ f$

29. Determine $f(x)$ y $g(x)$ tales que $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. (La respuesta no es única).

30. Determine $f(x)$ y $g(x)$ tales que $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{5 - 2x^2}$. (La respuesta no es única).

31. *(Ingresos mensuales)* La señora Benítez tiene una nueva propuesta de trabajo, con sueldo base de $2000 más una comisión de 8% de las ventas totales que haga por arriba de 10 paquetes de cómputo. Recuerde, del capítulo anterior, que cada paquete la señora Benítez lo vende en $6000.

Exprese sus ingresos mensuales, I, como una función de x, en donde x es el número de paquetes de cómputo que vende en un mes.

a) ¿Cuál es el dominio de la función?

b) ¿Cuál será su salario mensual si vende 12 paquetes de cómputo?

c) ¿Cuál será su salario mensual si vende 8 paquetes de cómputo?

32. *(Función de costo)* El costo por enviar un paquete en primera clase es de \$10 por un paquete de 5 kilogramos y tiene un costo de \$13 enviar un paquete de 11 kilogramos. Suponiendo que la relación entre el peso del paquete y el costo de su envío sea lineal, determine:

a) El costo, C, en función del peso, p.

b) El costo por enviar un paquete de 20 kilogramos.

33. El ingreso I por cierto artículo depende del precio p por unidad y está dado por la función $I = h(p) = 600p - 2p^2$. El precio p fijado por unidad es una función de la demanda x, y está dado por $p = f(x) = 20 - 0.2x$. Determine $(h \circ f)(x)$ e interprete su resultado.

34. *(Alquiler óptimo)* Raúl Espinosa, propietario de un edificio de apartamentos, puede alquilar todas las 60 habitaciones si fija un alquiler de \$120 al mes por apartamento. Si el alquiler se incrementa en \$5 dos de las habitaciones quedarán vacías sin posibilidad alguna de alquilarse.

Suponiendo que la relación entre el número de apartamentos vacíos y el alquiler es lineal, determine:

a) El ingreso en función del alquiler mensual por apartamento.

b) El ingreso en función del número de habitaciones ocupadas.

c) El alquiler que maximiza el ingreso mensual.

35. *(Tarifa óptima)* Una revista tiene 5000 suscriptores cuando fija una cuota anual de \$500.

Por cada disminución de \$1 en la cuota anual, puede obtener 25 suscriptores más. ¿Qué cuota maximiza el ingreso anual por suscripciones?

36. *(Curva de demanda)* Un fabricante puede vender x unidades de su producto a p dólares por unidad, con x y p relacionadas por

$$2x^2 + p^2 + 200x + 150p = 60{,}000$$

Dibuje la curva de la demanda. ¿Cuál es el precio más alto por encima del cual no hay posibilidad de ventas?

37. *(Ingresos y utilidades máximas)* Los costos fijos semanales de una empresa por su producto son de \$200 y el costo variable por unidad es de \$0.70. La empresa puede vender x unidades a un precio de \$$p$ por unidad, en donde $2p = 5 - 0.01x$. ¿Cuántas unidades deberán producirse y venderse a la semana de modo que obtenga:

a) Ingresos máximos?

b) utilidad máxima?

38. Un fabricante puede vender x unidades de su producto a un precio de p por unidad, en donde $3p + 0.1x = 10$. Como una función de la cantidad, x, demanda en el mercado, el ingreso I está dado por $I = 3x - 0.02x^2$. Determine la forma funcional de la dependencia de I con respecto del precio p.

39. *(Inversión hipotecaria)* El número de créditos hipotecarios al año, N, depende de la tasa de interés, r, de acuerdo con la expresión

$$N(r) = \frac{80}{1 + 0.01r^2}$$

donde N está en miles de créditos. La tasa de interés actualmente está en 10% y se predice que disminuirá a 5% en los siguientes 18 meses de acuerdo con la fórmula

$$r(t) = 10 - \frac{10t}{t + 18}$$

donde t es el tiempo medido en meses a partir de ahora.

a) Exprese N como una función del tiempo t

b) Calcule el valor de N cuando $t = 6$

40. *(Publicidad y ventas)* El número y de unidades vendidas cada semana de cierto producto depende de la cantidad x (en dólares) gastada en publicidad y está dada por $y = 70 + 150x - 0.3x^2$.

¿Cuánto debería gastarse a la semana en publicidad con objeto de obtener un volumen de ventas máximo? ¿Cuál es el volumen de ventas máximo?

(41-44) Resuelva las relaciones implícitas siguientes para expresar a y como función explícita de x

41. $6x^2 + y^2 = 10$

42. $xy = 10$

43. $x^2y + 2xy + y - 3x^3 - 6x^2 - 3x - 10 = 0$

44. $\sqrt{x} - \sqrt{6y} = 30$

(45-48) Determine la inversa de cada función.

45. $y = 3x - 7$

46. $y = x^2 + 2x$, para $x \geq -1$

47. $y = \sqrt{18 - 2x^2}$, para $0 \leq x \leq 3$

48. $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

49. *(Tamaño de población)* El tamaño de una población de zorros en una reserva natural en el instante t (medido en años), está dado por

$$p(t) = 400 - \frac{350}{1 + 0.1t^2}$$

a) Determine la población inicial, $p(0)$.

b) ¿Cuál es el tamaño de la población después de 3 años? (Redondee al entero más cercano).

c) ¿Cuál es el tamaño de la población después de 10 años? (Redondee al entero más cercano).

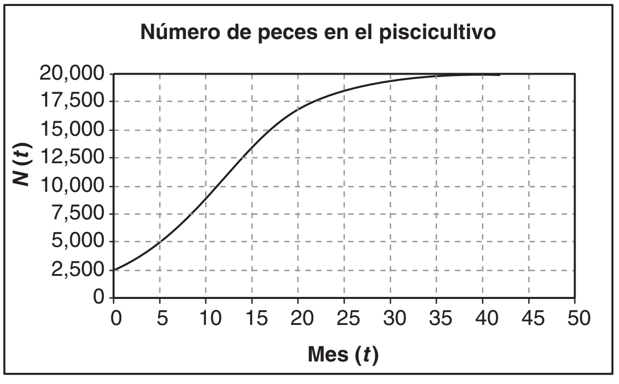
a) Determine la función inversa, expresando a t como una función de p, para $t \geq 0$.

**e*) El tamaño de la población, ¿cuándo será de 300 zorros?

CASO DE ESTUDIO

¿CUÁNDO RECOLECTAR PECES?

Retomando el problema planteado al inicio del capítulo, mostramos la gráfica de la función $N(t)$, que representa al número de peces que hay en la granja piscícola en el instante t.



El problema era determinar el mes más adecuado para hacer la recolección de 2500 peces. El mejor mes, es aquel en que el tiempo de recuperación de los 2500 peces sea el menor posible.

De la gráfica vemos que si hacemos la recolección en el mes 5, en donde hay un poco más de 5000 peces, se necesitarían aproximadamente 5 meses para recuperar los peces recolectados.

Ahora bien, si la recolección se hiciera en el mes 30 se necesitaría aproximadamente de 10 meses para que la población recuperara los 2500 peces que se recolectaran. Como se hizo notar al inicio del capítulo, la gráfica nos muestra que el crecimiento más rápido es alrededor del mes 10. De hecho guiados por la gráfica y la tabla siguiente vemos que, si la recolección se hace en el mes 13, sólo se necesitarían 3 meses para recuperar los 2500 peces recolectados.

a) Si se tuviesen que recolectar 3000 peces, ¿cuál sería el mes más adecuado para hacerlo?

b) ¿Cuál sería su respuesta si la recolección necesaria fuese de 5000?

t	$N(t)$	t	$N(t)$	t	$N(t)$	t	$N(t)$	t	$N(t)$
0	2500								
1	2921	11	10170	21	17245	31	19485	41	19913
2	3399	12	11066	22	17645	32	19568	42	19927
3	3938	13	11945	23	17994	33	19638	43	19939
4	4538	14	12794	24	18297	34	19697	44	19949
5	5200	15	13601	25	18557	35	19746	45	19958
6	5922	16	14358	26	18780	36	19788	46	19965
7	6699	17	15058	27	18971	37	19822	47	19970
8	7523	18	15697	28	19133	38	19851	48	19975
9	8385	19	16274	29	19271	39	19876	49	19979
10	9272	20	16789	30	19387	40	19896	50	19983

CAPÍTULO 6

Logaritmos y exponenciales

Antigüedad de los fósiles

No es extraño ver que de cuando en cuando en el periódico se anuncian hallazgos arqueológicos, y en ellos aparecen declaraciones como las siguientes: "...este trilobite vivió alrededor de hace 570 millones de años...", "...los utensilios de piedra datan de 15,000 años..." o bien "...el hueso procedente de una cueva del Perú indica que en la era Cenozoica, hace aproximadamente 66.4 millones de años, el megaterio vivía en esta zona...".

¿Cómo es que pueden hacer estas afirmaciones? ¿Qué método utilizan para datar fósiles y, en general, muestras antiguas?

Actualmente existen diferentes pruebas para fechar. Algunas de ellas tienen como base la desintegración radiactiva de isótopos de ciertos elementos; otras más avanzadas hacen uso de técnicas físicas conocidas como termoluminiscencia. Pero tal vez la más popular de todas es la que se conoce como la prueba del Carbono 14 (C^{14}), ideada por el físico estadunidense Williard F. Libby en 1946. Este C^{14} es radiactivo y los seres vivos lo asimilan en su organismo y mientras viven tienen una proporción de C^{14} igual a la que existe en la atmósfera; pero cuando mueren, el C^{14} que se desintegra ya no se recupera, pues ya no se tiene intercambio de materia con el medio, por lo que en los restos de los seres vivos se va desintegrando el C^{14}, que se transforma en el carbono ordinario.

Después de aproximadamente 5730 años, la proporción de C^{14} con respecto al total queda reducida a la mitad. Así, si se determina el contenido de C^{14} de un fósil, puede determinarse con relativa precisión la época de la que procede.

Al final del capítulo, y después de estudiar las funciones exponenciales y logarítmicas calcularemos las antigüedades de unos fósiles.

TEMARIO

■ 6-1 INTERÉS COMPUESTO Y TEMAS RELACIONADOS

Considere un capital, digamos \$100, que se invierte a una tasa de interés fija, tal como 6% anual. Después de un año, la inversión se habrá incrementado en valor en un 6%, a \$106. Si el interés es compuesto, durante el segundo año, la suma total de \$106 ganará un interés del 6%. Así que el valor de la inversión al término del segundo año constará de los \$106 existentes al inicio de tal año, más el 6% de \$106 por concepto de interés, lo que da un valor total de

$$\$106 + (0.06)(\$106) = (1 + 0.06)(\$106) = \$100(1.06)^2 = \$112.36$$

Durante el tercer año, el valor se incrementa en una cantidad de interés igual al 6% de \$112.36, lo que da un valor total al finalizar el año de

$$\$112.36 + \$112.36(0.06) = \$100(1.06)^3$$

En general, la inversión crece por un factor de 1.06 con cada año que pasa, de modo que después de n años su valor es $\$100(1.06)^n$.

Consideremos el caso general de una inversión que crece con interés compuesto. Sea P una suma invertida a una tasa de interés del R por ciento anual. Luego, el interés en el primer año es $(R/100)P$, de modo que el valor de la inversión después de 1 año es

$$P + \left(\frac{R}{100}\right)P = P\left(1 + \frac{R}{100}\right) = P(1 + i)$$

en donde $i = (R/100)$.

El interés en el segundo año será el R por ciento de este nuevo valor, $P(1 + i)$:

$$\text{Interés} = \left(\frac{R}{100}\right)P(1 + i)$$

Por tanto, el valor después de 2 años es

$$P(1 + i) + \left(\frac{R}{100}\right)P(1 + i) = P(1 + i)\left(1 + \frac{R}{100}\right) = P(1 + i)^2$$

Observemos que cada año el valor de la inversión se multiplica por un factor de $1 + i$ de su valor el año previo. Después de n años, el valor está dado por la fórmula.

$$\boxed{\text{Valor después } n \text{ años} = P(1 + i)^n, \qquad i = \frac{R}{100}}$$

La expresión $(1 + i)^n$ puede evaluarse para algunos valores de i y n utilizando la tabla A.3.4 o utilizando una calculadora que tenga la tecla y^x.

EJEMPLO 1 ***(Inversiones)*** Una suma de \$200 se invierte a un interés compuesto anual del 5%. Calcule el valor de la inversión después de 10 años.

Solución En este caso $R = 5$ e $i = R/100 = 0.05$. Después de n años, el valor de la inversión es

$$P(1 + i)^n = 200(1.05)^n$$

Cuando $n = 10$, esto es

$$200(1.05)^{10} = 200(1.628895) = 325.78$$

El valor de esta inversión es por tanto \$325.78. ☛ **1**

☛ **1.** \$4000 se invirtieron al 9% por año. ¿Cuál es el valor después de *a*) 5 años; *b*) 11 años?

Respuesta
a) $\$4000(1.09)^5 = \$6154.50$
b) $\$4000(1.09)^{11} = \$10{,}321.71$

En algunos casos, el interés se capitaliza más de una vez por año, por ejemplo, semestralmente (2 veces por año), trimestralmente (4 veces por año) o mensualmente (12 veces por año). En estos casos, el porcentaje R de la tasa de interés anual, la cual por lo regular se cotiza, se denomina la **tasa nominal**. Si se compone k veces por año y si la tasa de interés nominal es del R por ciento, esto significa que la tasa de interés en cada composición es igual al (R/k) por ciento. En n años, el número de composiciones es kN. ☛ **2**

☛ **2.** Si la tasa nominal anual es 12%, ¿cuál es la tasa de interés en cada composición cuando ésta se realiza *a*) semestralmente;
b) trimestralmente;
c) mensualmente;
d) diariamente?

Respuesta *a*) 6%; *b*) 3%
c) 1%; *d*) (12/365)%

Por ejemplo, a un interés nominal del 8% compuesto trimestralmente, una inversión se incrementa al 2% cada tres meses. En 5 años, habría 20 de tales composiciones.

En el caso general, sea $n = Nk$ el número de periodos de composición e $i = R/100k$ la tasa de interés (decimal) por periodo. Entonces la fórmula de interés compuesto se transforma en:

$$\boxed{\text{Valor después de } n \text{ periodos} = P(1 + i)^n, \qquad i = \frac{R}{100k}}$$

EJEMPLO 2 ***(Interés anual capitalizable mensualmente)*** Una suma de \$2000 se invierte a una tasa de interés nominal del 9% anual capitalizable mensualmente. Calcule el valor de la inversión después de 3 años.

Solución Aquí $k = 12$, la inversión se capitaliza mensualmente y la tasa de interés en cada capitalización es $R/k = \frac{9}{12} = 0.75\%$. De modo que en cada capitalización, el valor se incremente por un factor

$$(1 + i) = \left(1 + \frac{R}{100k}\right) = \left(1 + \frac{0.75}{100}\right) = 1.0075$$

☛ **3.** \$4000 se invierte a una tasa nominal de 9% anual. ¿Cuál es el valor después de 5 años si la composición se realiza *a*) semestralmente; *b*) trimestralmente, *c*) mensualmente?

Respuesta
a) $\$4000(1.045)^{10} = \$6211.88$
b) $\$4000(1.0225)^{20} = \$6242.04$
c) $\$4000(1.0075)^{60} = \$6262.72$

Durante 3 años, habrá $n = 3 \cdot 12 = 36$ de tales capitalizaciones. De aquí, el valor será

$$2000(1.0075)^{36} = 2000(1.308645) = 2617.29 \text{ dólares}$$ ☛ **3**

EJEMPLO 3 ***(Composición trimestral)*** ¿Cuál es la tasa de interés nominal requerida para duplicar el valor de una inversión en 5 años, con composición cada 3 meses?

Solución En 5 años hay $5 \cdot 4 = 20$ periodos de interés. Una inversión de P aumenta a $2P$, de modo que tenemos la ecuación

$$\text{Valor después de 20 periodos} = P(1+i)^{20} = 2P$$

o

$$(1+i)^{20} = 2$$

Por tanto,

$$(1+i) = 2^{i/20} = 1.03526^*$$

de modo que $i = 0.03526$. Pero, $i = R/100k = R/(100 \cdot 4) = R/400$, donde R es la tasa nominal anual. Por consiguiente, $R = 400i = 400(0.03526) = 14.11$. Una tasa de interés nominal de 14.11% anual es la requerida.

La **tasa efectiva** de interés de una inversión se define como la tasa anual que proporcionaría el mismo crecimiento si se compone una vez por año. Considere una inversión que se compone k veces por año a una tasa de interés nominal de $R\%$. Entonces, la inversión crece por un factor de $(1+i)^k$ en un año, en donde $i = R/100k$. Sea R_{ef} la tasa de interés efectiva e $i_{ef} = R_{ef}/100$. Entonces, por definición, la inversión crece por un factor de $(1+i_{ef})$ cada año, de modo que tenemos

$$\boxed{1 + i_{ef} = (1+i)^k}$$

lo cual permite que se calcule la tasa efectiva.

En el ejemplo 2, por ejemplo, $(1+i) = 1.0075$ y $k = 12$. Por tanto,

$$i_{ef} = (1+i)^k - 1 = (1.0075)^{12} - 1 = 0.0938$$

☛ **4.** En el ejemplo 2, ¿cuál es la tasa efectiva anual si la composición es trimestral en vez de mensual?

De modo que $R_{ef} = 100i_{ef} = 9.38$ y tenemos una tasa de interés efectiva anual de 9.38%. ☛ **4**

EJEMPLO 4 ¿Qué es mejor para un inversionista, 12% compuesto mensualmente o 12.2% compuesto trimestralmente?

Solución Calculamos la tasa efectiva de cada una de las dos inversiones. Para la primera, $i = 0.01$ y $k = 12$, de modo que

$$i_{ef} = (1+i)^k - 1 = (1.01)^{12} - 1 = 0.126825$$

Respuesta
$100[(1.0225)^4 - 1]\% = 9.308\%$

*Utilizando la tecla y^x de una calculadora: $2^{1/20} = 2^{0.05} = 1.03526$.

Para la segunda, $i = 0.0305$ y $k = 4$, de modo que

$$i_{ef} = (1 + i)^k - 1 = (1.0305)^4 - 1 = 0.127696$$

La segunda tiene una mayor tasa efectiva, por lo que es la mejor de las dos.

Problemas de crecimiento poblacional

La fórmula de interés compuesto se aplica a cualquier cantidad que crece de acuerdo con un porcentaje regular cada año. Por ejemplo, una población de tamaño inicial P_0 que crece a un R por ciento anual tendrá, después de n años, un tamaño de $P_0(1 + i)^n$, en donde $i = R/100$.

EJEMPLO 5 ***(Crecimiento de la población)*** La población del planeta al inicio de 1976 era de 4 mil millones y ha crecido a un 2% anual. ¿Cuál será la estimación de la población en el año 2000, suponiendo que la tasa de crecimiento no se modifica?

Solución Cuando una población crece al 2% anual, esto significa que su tamaño en cualquier instante es 1.02 veces lo que fue un año antes. Así, al inicio de 1977, la población era $(1.02) \times 4$ mil millones. Más aún, al inicio de 1978, era (1.02) veces la población al iniciar el año de 1977, esto es, $(1.02)^2 \times 4$ mil millones. Continuamos encontrando la población en una forma similar, multiplicando por un factor de 1.02 por cada año que pasa. La estimación de la población al inicio del año 2000, es decir, después de 24 años, será de

$$(1.02)^{24} \times 4 \text{ mil millones} = 1.608 \times 4 \text{ mil millones} = 6.43 \text{ mil millones}$$

EJEMPLO 6 ***(Crecimiento del PNB)*** La población de cierta nación en desarrollo crece al 3% anual. ¿Cuánto debe incrementarse por año el producto nacional bruto, si el ingreso per cápita debe duplicarse en 20 años?

Solución Denotemos a la población actual por P_0. Por tanto, dado que la población se incrementa por un factor de (1.03) cada año, el tamaño de la población después de n años será

$$P = P_0(1.03)^n$$

Sea I_0 el producto nacional bruto (PNB). El ingreso per cápita actual se obtiene dividiendo esta cantidad I_0 entre el tamaño de la población, de modo que es igual a I_0/P_0.

Si el PNB se incrementa a un R por ciento anual, cambiará por un factor de $1 + i$ por cada año, en donde $i = R/100$. Por tanto, después de n años, el PNB está dado por

$$I = I_0(1 + i)^n$$

El ingreso per cápita después de n años es, por tanto,

$$\frac{I}{P} = \frac{I_0(1 + i)^n}{P_0(1.03)^n} = \frac{I_0}{P_0}\left(\frac{1 + i}{1.03}\right)^n$$

Deseamos calcular el valor de R para el cual el ingreso per cápita cuando $n = 20$ es igual a dos veces su valor actual, I_0/P_0. En consecuencia, tenemos la ecuación

$$\frac{I}{P} = \frac{I_0}{P_0}\left(\frac{1 + i}{1.03}\right)^{20} = 2\frac{I_0}{P_0}$$

Se sigue que

$$\left(\frac{1 + i}{1.03}\right)^{20} = 2$$

Por tanto

$$\frac{1 + i}{1.03} = 2^{1/20}$$

☛ **5.** En el ejemplo 6, si el PNB crece 5% por año, ¿en qué factor per cápita aumentará el ingreso al cabo de un periodo de 20 años?

de modo que $1 + i = (1.03)(2^{1/20}) = (1.03)(1.0353) = 1.066$. Así que $i = 0.066$ y $R = 100i = 6.6$. En consecuencia, el PNB tendría que incrementarse al ritmo de un 6.6% anual si debe lograrse la meta fijada. ☛ **5**

La ecuación de crecimiento exponencial tiene que aplicarse a problemas de población con cierta cautela. Una población que crece lo hará exponencialmente, con tal de que no haya factores del medio ambiente que limiten o influyan de alguna otra manera el crecimiento. Por ejemplo, si la provisión de alimentos disponibles a la población de cierta especie está limitada, el crecimiento exponencial deberá cesar eventualmente a medida que la provisión de alimentos llega a ser insuficiente para la población que todavía está creciendo. Entre otros factores que inhiben el crecimiento indefinido está la disposición de refugio para las especies, el cual por lo regular es limitado, la interacción con especies depredadoras, factores sociológicos que podrían hacer más lenta la expansión de la población en circunstancias de hacinamiento y, por último, la disponibilidad limitada de espacio físico para la población. Factores como éstos tienden a frenar el crecimiento exponencial y provocan que se estacione en algún valor que es la población máxima que el hábitat determinado puede sostener.

Es evidente en estos tiempos que tales restricciones están impuestas sobre la población humana, y parece bastante probable que la humanidad no crecerá exponencialmente durante las décadas siguientes. Así, las futuras proyecciones de la población humana en periodos largos basadas en la ecuación de crecimiento exponencial deberán refinarse. Ellas indican lo que sucedería si la tendencia actual continúa, la cual puede ser diferente de lo que sucederá en realidad.

Composición continua

Suponga que una cantidad de dinero, digamos \$100, se invierte a una tasa de interés de 8% compuesta anualmente. Cada año el valor de la inversión aumenta por un factor de 1.08, de modo que después de N años, es igual a $\$100(1.08)^N$. Por ejemplo, después de 4 años, la inversión tiene un valor de $\$100(1.08)^4 = \$136.05$.

Respuesta $\left(\frac{1.05}{1.03}\right)^{20} = 1.469$

Ahora supongamos que la inversión de \$100 se compone semestralmente y que la tasa nominal de interés se mantiene en 8% anual. Esto significa que la tasa de interés semestral es de 4%. Entonces, cada medio año, el valor de la inversión crece por un factor de 1.04. En un periodo de N años hay $2N$ de tales composiciones semestrales; así después de N años la inversión tiene un valor de $\$100(1.04)^{2N}$. Por ejemplo, 4 años después el valor es $\$100(1.04)^8 = \$136.86$.

Ahora considere la posibilidad de que la inversión se componga cada 3 meses, otra vez con la tasa nominal de interés anual de 8%. Entonces, la tasa de interés trimestral es igual a $\frac{8}{4}$ o 2%. Cada trimestre el valor aumenta por un factor de 1.02, de modo que cada año se incrementa por un factor de $(1.02)^4$. En un periodo de N años, el valor aumenta a $\$100(1.02)^{4N}$. Por ejemplo, después de 4 años el valor es $\$100(1.02)^{16} = \$137.28$.

Podemos continuar de esta manera: dividimos el año en k periodos iguales y componemos el interés al final de cada uno de estos periodos a una tasa nominal de interés anual de 8%. Esto significa que la tasa de interés para cada periodo es de $8/k$ por ciento y la inversión aumenta en valor por un factor de $1 + 0.08/k$ para cada uno de estos pequeños periodos. Durante N años hay kN de tales periodos de composición, de modo que el valor después de N años está dado por la fórmula $100(1 + 0.08/k)^{kN}$ dólares. Por ejemplo, después de 4 años el valor es

☛ **6.** Suponga que \$1 se invierte a una tasa nominal de 100%, compuesto k veces por año. ¿Cuál es el valor después de un año? Compare los valores con cuatro decimales cuando $k = 365$ (composición diaria).

$$100\left(1 + \frac{0.08}{k}\right)^{4k} \text{ dólares} \quad ☛\ \mathbf{6} \tag{1}$$

TABLA 1

k	Valor después de 4 años
1	\$136.05
2	\$136.86
4	\$137.28
12	\$137.57
52	\$137.68
365	\$137.71
1000	\$137.71

La tabla 1 muestra estos valores para diferentes valores de k. Primero damos $k = 1$, 2 y 4 y después $k = 12$, 52 y 365, que corresponden respectivamente a composición mensual, semanal y diaria. Por último, por comparación damos para $k = 1000$. Puede verse que conforme la frecuencia de composición se incrementa, el valor de la inversión también aumenta; sin embargo, no aumenta de manera indefinida, sino que se hace cada vez más cercana a cierto valor. Al centavo más próximo, no hay diferencia entre componerlo 365 veces en un año y componerlo 1000 veces en un año; el valor de la inversión después de 4 años aún será \$137.71.

A consecuencia de eso, podemos prever la posibilidad de lo que se denomina **composición continua**. Con esto queremos decir que el número k se le permite volverse arbitrariamente grande; decimos que k se le permite *tender a infinito* y escribimos esto como $k \to \infty$. Esto corresponde a componer el interés un número infinito de veces durante el año. Con nuestros \$100 invertidos a la tasa nominal de 8% anual, la composición continua da un valor de \$137.71 después de 4 años, el mismo valor que a una composición diaria.

Escribamos $k = 0.08p$ en la expresión (1), lo cual da el valor de la inversión después de 4 años. Entonces, $4k = 0.32p$ y el valor después de 4 años toma la forma

Respuesta Valor $= (1 + \frac{1}{k})^k = 2.7146$ cuando $k = 365$

$$100\left(1 + \frac{0.08}{k}\right)^{4k} = 100\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{0.32p} = 100\left[\left(1 + \frac{1}{p}\right)\right]^{0.32}$$

TABLA 2

p	$\left(1+\frac{1}{p}\right)^p$
1	2
2	2.25
10	2.594
100	2.705
1000	2.717
10,000	2.718

La razón para escribirla en esta forma es que cuando $k \to \infty$, entonces $p = k/(0.08)$ también se vuelve arbitrariamente grande y la cantidad dentro de los corchetes, $(1 + 1/p)^p$, se hace cada vez más cercana a cierta constante cuando $p \to \infty$. Esto puede verse de la tabla 2, en la que los valores de $(1 + 1/p)^p$ se dan para una serie de valores crecientes de p. El eventual valor de p, al cual $(1 + 1/p)^p$ se aproxima cuando p aumenta de manera indefinida es un número denotado por medio de la letra e. Este número es irracional e igual a 2.71828 a cinco decimales.

En el ejemplo anterior de composición continua, vemos que cuando $p \to \infty$, el valor de la inversión después de 4 años se hace cada vez más cercano a $100e^{0.32}$ dólares.

Examinamos la composición continua para el caso general cuando se invierte una suma P. El interés será compuesto k veces en un año a la tasa de interés nominal anual de R por ciento. Entonces, la tasa de interés en cada composición es R/k por ciento. En cada composición, el valor aumenta por un factor de $1 + i/k$ en donde $i = R/100$. Después de N años, durante los cuales habrán sido kN de tales composiciones, el valor será $P(1 + i/k)^{kN}$.

Introducimos $p = k/i$, o $k = ip$. Entonces, $kN = piN$ y el valor después de N años es

$$P\left(1+\frac{1}{p}\right)^{piN} = P\left[\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p}\right]^{iN}$$

Para composición continua debemos hacer a $k \to \infty$; esto significa que $p = k/i$ también se vuelve infinitamente grande. La cantidad dentro de los corchetes se hace cada vez más próxima a e cuando $p \to \infty$, de modo que el valor de la inversión se Pe^{iN}.

Así, hemos demostrado que *si una cantidad P se compone de manera continua a una tasa nominal anual de R por ciento,*

$$\boxed{\text{Valor después de } N \text{ años} = Pe^{iN}; \quad \left(i = \frac{R}{100}\right)}$$

☛ **7.** Evalúe *a*) $e^{2.1}$ *b*) $e^{-1.25}$

Los valores de la expresión e^{iN} pueden encontrarse en el apéndice III, tabla A.3.3. También pueden obtenerse con muchas calculadoras de bolsillo.

EJEMPLO 7 Utilizando la tabla A.3.3 o una calculadora, encuentre los valores de lo siguiente:

a) e^2 *b*) $e^{3.55}$ *c*) $e^{-0.24}$

Solución Utilizamos la tabla A.3.3.

a) $e^2 = 7.3891$ *b*) $e^{3.55} = 34.813$ *c*) $e^{-0.24} = 0.7866$

(En la parte *c*), el valor se lee de la columna etiquetada con e^{-x} adyacente al valor 0.24 en la columna *x*). ☛ **7**

Respuesta *a*) 8.1662 *b*) 0.2865

EJEMPLO 8 ***(Inversión)*** Una inversión de \$250 se compone de manera continua a una tasa nominal de interés anual de 7.5%. ¿Cuál será el valor de la inversión después de 6 años?

Solución Debemos utilizar la fórmula Pe^{iN} para el valor después de N años. En este ejemplo, $P = 250$, $N = 6$ e $i = 7.5/100 = 0.075$. Por tanto, $iN = (0.075)(6) = 0.45$ y el valor es

$$Pe^{iN} = 250e^{0.45} \text{ dólares}$$

El valor de $e^{0.45}$ puede encontrase en la tabla A.3.3, y obtenemos

$$250e^{0.45} = 250(1.5683) = 392.08$$

Así, el valor de la inversión después de 6 años es \$392.08.

Una inversión que se compone continuamente crece por un factor e^i en un año, en donde $i = R/100$. Como antes, definimos una tasa efectiva anual de interés R_{ef} por ciento, para composición continua, como la tasa que da el mismo crecimiento si la composición es una vez por año. La condición es $1 + i_{ef} = e^i$, en donde $i_{ef} = R_{ef}/100$. Por lo que tenemos

$$\boxed{R_{ef} = 100(e^i - 1)}$$

EJEMPLO 9 ***(Inversión)*** En su cuenta de ahorros, el Piggy Bank de Nueva York da una tasa nominal de interés anual de 6%, compuesto continuamente. El banco desea calcular una tasa efectiva de interés anual (es decir, la tasa equivalente anual) para utilizarla en sus anuncios.

Solución Tenemos $R = 6$, de modo que $i = 0.06$. Entonces la tasa efectiva está dada por $1 + i_{ef} = e^i$, o bien,

$$i_{ef} = e^i - 1 = e^{0.06} - 1 = 1.0618 - 1 = 0.0618$$

Así la tasa efectiva en porcentaje es $R_{ef} = 100i_{ef} = 6.18$. El banco puede anunciar una tasa efectiva anual de interés de 6.18%. ☛ **8**

☛ **8.** Encuentre la tasa efectiva anual para composición continua a tasa nominal anual de 10%.

Valor presente

Otra aplicación es al **valor presente** de un ingreso futuro o de una obligación futura. Supongamos que para continuar con cierta actividad de negocio, una persona espera recibir cierta cantidad de dinero, P, en un tiempo n años en el futuro. Este ingreso futuro P tiene menos valor que el que tendría un ingreso del mismo monto recibido en el presente, ya que si la persona recibiese P ahora, podría invertirlo con interés, y tendría mayor valor que P en n años. Estamos interesados en encontrar la

Respuesta $100(e^{0.1} - 1) = 10.52\%$

suma Q la cual, si se recibe en el presente y se invierte durante n años, tendría el mismo valor que el ingreso futuro de P que la persona recibirá.

Supongamos que la tasa de interés que podría obtenerse en tal inversión es igual a R por ciento. Entonces, después de n años, la suma Q se habría incrementado a $Q(1 + i)^n$, donde $i = R/100$. Haciendo esto igual a P, obtenemos la ecuación

$$Q(1 + i)^n = P \quad \text{o bien} \quad Q = \frac{P}{(1 + i)^n} = P(1 + i)^{-n}$$

Llamamos a Q **valor presente** del ingreso futuro P.

☛ **9.** ¿Cuál es el valor presente de \$5000 recibidos dentro de 3 años, si la tasa de descuento es del 8%?

En el cálculo del valor presente, es necesario hacer algunas suposiciones acerca de la tasa de interés R que se obtendría durante los n años. En tales circunstancias, R se denomina **tasa de descuento** y decimos que el ingreso futuro es **descontado** al tiempo presente. ☛ **9**

EJEMPLO 10 ***(Decisión de ventas en bienes raíces)*** Un desarrollador de bienes raíces posee una propiedad que podría venderse de inmediato por \$100,000. De manera alterna, la propiedad podría conservarse durante 5 años. Durante este tiempo, el desarrollador gastaría \$100,000 en urbanizarla, y entonces la vendería por \$300,000. Suponga que el costo de urbanización sería gastado de un fondo al final de 3 años y debe pedirse prestado de un banco al 12% de interés anual. Si la tasa de descuento se supone que es de 10%, calcule el valor presente de esta segunda alternativa y de aquí decida cuál de estas dos alternativas representa la mejor estrategia para el desarrollador.

Solución Primero considere el dinero que debe pedirse prestado para urbanizar la propiedad. El interés debe pagarse al 12% sobre éste durante un periodo de 2 años, de modo que cuando la propiedad se vende, este préstamo ha aumentado a

$$\$100{,}000(1.12)^2 = \$125{,}440$$

La ganancia neta de la venta, después de pagar este préstamo, será

$$\$300{,}000 - \$125{,}440 = \$174{,}560$$

Este ingreso se recibe dentro de 5 años. Descontándolo a una tasa de 10%, obtenemos el valor presente de

$$\$174{,}560(1.1)^{-5} = \$108{,}400$$

Como el valor presente de una venta inmediata es de sólo \$100,000, es un poco mejor si el desarrollador conserva la propiedad y la vende dentro de 5 años.

Respuesta
$\$5000 \div (1.08)^3 = \$3969.16$

Observe la forma en la que las decisiones pueden hacerse entre estrategias alternativas de negocios, por medio de la comparación de sus valores presentes.

EJERCICIOS 6-1

(1-2) Si \$2000 se invierten a un interés compuesto anual del 6%, encuentre lo siguiente.

1. El valor de la inversión después de 4 años.

2. El valor de la inversión después de 12 años.

(3-4) Si \$100 se invierten a un interés compuesto anual del 8% calcule lo siguiente.

3. El valor de la inversión después de 5 años.

4. El valor de la inversión después de 10 años.

(5-8) Un capital de \$2000 se invierte a una tasa de interés nominal anual del 12%. Calcule su valor:

5. Después de 1 año si la capitalización es trimestral.

6. Después de 1 año si la capitalización es mensual.

7. Después de 4 años si la capitalización ocurre cada 6 meses.

8. Después de 6 años con capitalización trimestral.

(9-12) Encuentre la tasa de interés anual efectiva que sea equivalente a:

9. 6% de tasa nominal con capitalización semestral.

10. 8% de tasa nominal con capitalización trimestral.

11. 12% de tasa nominal con capitalización mensual.

12. 12% de tasa nominal con capitalización 6 veces al año.

(13-16) Encuentre la tasa de interés nominal anual que corresponde a una tasa efectiva de:

13. 8.16% compuesta semestralmente.

14. 12.55% compuesta trimestralmente.

15. 10% compuesta mensualmente.

16. 9% compuesta 6 veces al año.

(17-20) ¿Qué es mejor para el inversionista?:

17. ¿Capitalización semestral con una tasa nominal del 8.2% o capitalización trimestral al 8%?

18. ¿Capitalización semestral con una tasa nominal del 6% o capitalización anual al 6.1%?

19. ¿Capitalización anual al 8.2% o capitalización trimestral con una tasa nominal del 8%?

20. ¿Capitalización semestral con una tasa nominal del 12.2% o capitalización mensual con una tasa nominal del 12%?

21. ¿Qué tasa de interés compuesto duplica el valor de una inversión en 10 años?

22. ¿Qué tasa de interés compuesto triplica el valor de una inversión en 10 años?

23. Una suma de dinero se invierte 5 años a un interés del 3% anual y luego 4 años más a un interés del R por ciento. Determine R si el valor del dinero se duplica exactamente a los 9 años.

24. Un monto de dinero es invertido a R% compuesto anualmente. Si asciende a \$21,632 al final del segundo año y a \$22,497.28 al final del tercer año. Encuentre la tasa de interés R y la suma invertida.

25. Una cantidad de dinero se invierte a R% compuesto semestralmente. Si asciende a \$56,275.44 al final del segundo año y a \$59,702.62 al final del tercer año. Determine la tasa nominal de interés R y la suma invertida.

26. *(Crecimiento de la población)* La población del planeta al inicio de 1976 era de 4 mil millones. Si la tasa de crecimiento continúa al 2% anual, ¿cuál será la población en el año 2026?

(27-32) Evalúe lo siguiente utilizando la tabla A.3.3 en el apéndice.

27. $e^{0.41}$ **28.** $e^{2.75}$

29. e^{8} **30.** $e^{-1.05}$

31. $e^{-0.68}$ **32.** $e^{-5.2}$

(33-36) *(Composición continua)* Determine el valor de cada una de las siguientes inversiones.

33. \$5000 son compuestos de manera continua durante 3 años a una tasa nominal de interés de 6% por año.

34. \$2000 se componen continuamente durante 5 años a una tasa nominal de interés del 8% anual.

35. \$1000 se componen continuamente durante 6 años a una tasa nominal de interés del 10% anual.

36. \$3000 se componen continuamente durante 4 años a una tasa nominal de interés del 5% anual.

37. *(Composición continua)* Una inversión de \$100 se compone de manera continua durante 2 años a una tasa nominal de interés de 9% y después durante 5 años más a una tasa nominal de interés de 11%. Calcule el valor de la inversión después del periodo de 7 años.

38. *(Composición continua)* Una inversión de \$2000 se compone continuamente durante 3 años a una tasa nominal del 6% anual y después durante 4 años más a una tasa nominal de 8% anual. Determine el valor de la inversión después del periodo de 7 años.

39. *(Composición continua)* Una inversión se compone de manera continua a una tasa nominal de 8% anual. ¿Cuánto tiempo pasará para que la inversión:

a) duplique su valor?

b) triplique su valor?*

40. Repita el ejercicio 39 para una tasa nominal de interés de 10% anual.

(41-43) *(Composición continua)* Calcule la tasa nominal de interés para cada uno de los siguientes casos.

41. \$100 compuestos de manera continua durante 4 años incrementa su valor a \$150.

42. Una inversión compuesta continuamente durante 10 años duplica su valor.

43. Una inversión compuesta continuamente durante 8 años triplica su valor.

44. *(Composición continua)* Una inversión se compone continuamente durante 2 años a una tasa nominal de R por ciento y durante 4 años más a una tasa nominal de $2R$ por ciento. Si el valor se duplica exactamente, determine R.

45. *(Composición diaria)* Si un banco compone el interés diariamente con una tasa nominal anual de 4.5%, ¿cuál es la "tasa efectiva de interés anual" que puede utilizarse en sus anuncios?

46. Repita el ejercicio 45 para una tasa nominal de 8%.

(47-49) *(Composición continua)* ¿Cuál es la mejor selección para el inversionista:

47. Composición continua con una tasa nominal de 5% o una composición anual del 5.2%?

48. Composición continua a una tasa nominal de 6% o una composición semestral a una tasa nominal del 6.1%?

49. Composición continua a una tasa nominal del 8% o una composición trimestral a una tasa nominal del 8.2%?

*$e^{0.693\ldots} = 2; \quad e^{1.099\ldots} = 3$

50. *(Ventas y publicidad)* En un mercado competitivo, el volumen de ventas depende del monto gastado en publicidad del producto en cuestión. Si se gastan x dólares mensuales en publicidad de un producto particular, se determinó que el volumen de ventas S al mes (en dólares) está dado por la fórmula

$$S = 10{,}000(1 - e^{-0.001x})$$

Encuentre el volumen de ventas cuando $x = 500$ y $x = 1000$. Si se disminuye x de \$500 a \$100 por mes, ¿cuál es la disminución resultante en las ventas?

51. *(Composición semestral)* Calcule la tasa de interés semestral que es equivalente a una tasa de interés anual del 8%.

52. *(Composición mensual)* Calcule la tasa de interés mensual que es equivalente a una tasa de interés anual del 8%.

53. *(Valor presente)* Una persona espera recibir \$1000 cada año durante los próximos 3 años, el primer pago será al cabo de un año. Calcule el valor presente de este ingreso, suponiendo una tasa de descuento del 8% anual.

54. *(Valor presente)* Una persona tiene una deuda que debe pagarse en tres exhibiciones anuales iguales de \$5000, el primer pago se deberá hacer dentro de un año. Si en cambio, la persona decide saldar la deuda de inmediato a partir de un fondo, calcule cuánto debe pagar, suponiendo una tasa de descuento de 8% anual.

55. *(Valor presente)* ¿Qué es mejor si la tasa de interés es del 5%: \$1000 ahora o \$1100 dentro de 2 años?

56. *(Valor presente)* Un compañía de productos del bosque posee un bosque maderero, cuyo valor dentro de t años será $V(t) = 2(1 + 0.3t)$. Suponga una tasa de descuento de 10% compuesto anualmente. Calcule el valor presente de la madera si se corta y vende:

a) dentro de 1 año.

b) dentro de 6 años.

c) dentro de 7 años.

d) dentro de 8 años.

¿Qué le sugieren sus respuestas?

57. *(Valor presente)* ¿Qué es mejor, si la tasa de interés es 10%: \$2000 ahora o \$1150 dentro de un año y otros \$1150 dentro de dos años?

■ 6-2 FUNCIONES EXPONENCIALES

Consideremos cierta ciudad con una población en un momento dado de 1 millón de habitantes, en la cual el crecimiento de la población es a una tasa del 10% anual. Después de 1 año, la población habrá crecido a 1.1 millones. Durante el segundo año, el incremento en la población será del 10% del tamaño al inicio de ese año, esto es, 10% de 1.1 millones. Por tanto, el tamaño de la población después de 2 años será

$$1.1 + (0.1)(1.1) = (1.1)^2 = 1.21 \text{ millones}$$

Durante el tercer año, el incremento será del 10% de 1.21 millones, lo que da una población total al término del tercer año igual a

$$1.21 + (0.1)(1.21) = (1.1)(1.21) = (1.1)^3 = 1.331 \text{ millones}$$

Continuando en esta forma, advertimos que el tamaño de la población después de n años será igual a $(1.1)^n$ millones. Una gráfica de esta función aparece en la figura 1, en la cual los valores de $(1.1)^n$ se aprecian como puntos para $n = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

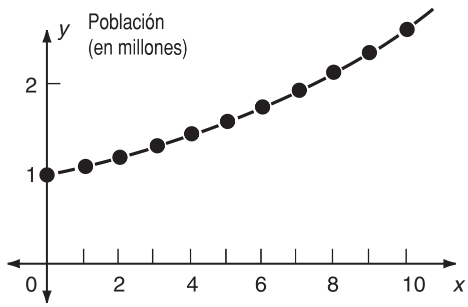


FIGURA 1

La fórmula $(1.1)^n$ puede utilizarse con el propósito de calcular el tamaño de la población en millones en fracciones de un año así como en valores enteros de n. Por ejemplo, después de 6 meses (esto es, la mitad de un año), el tamaño de la población es $(1.1)^{1/2} = 1.049$ millones (con tres cifras decimales). Después de 2 años y 3 meses ($2\frac{1}{4}$ años), el tamaño de la población es $(1.1)^{9/4} = 1.239$ millones, etcétera.

Si todos estos valores de $(1.1)^n$ para valores fraccionarios de n se dibujan en la gráfica de la figura 1, se descubre que están situados sobre una curva suave. Esta curva aparece en la figura 1, pasando, por supuesto, por los puntos remarcados, puesto que estos puntos corresponden a los valores de $(1.1)^n$ para valores enteros de n.

Observemos que el valor de $(1.1)^n$ sólo pueden definirse por medios elementales cuando n es un número racional. Por ejemplo, cuando $n = \frac{9}{4}$, $(1.1)^n = (1.1)^{9/4}$ puede definirse como la raíz cuarta de 1.1 elevado a la novena potencia. De manera similar, $(1.1)^{7/5}$ puede definirse como la raíz quinta de 1.1 elevado a la séptima potencia. Pero tal definición, en términos de potencias y raíces, no puede aplicarse a $(1.1)^n$ y cuando n es un número irracional: por ejemplo, $(1.1)^{\sqrt{2}}$ no puede definirse en términos de potencias y raíces. Sin embargo, una vez que hemos construido la curva suave de la figura anterior, podemos usarla para *definir* $(1.1)^n$ en el caso de valores irracionales de n. Por ejemplo, determinaríamos $(1.1)^{\sqrt{2}}$ usando la ordenada del punto sobre la curva que corresponde a la abscisa $n = \sqrt{2}$. En esta forma, advertimos que el valor de $(1.1)^n$ puede definirse para todos los valores reales de n, tanto racionales como irracionales.

En una forma semejante, podemos definir la función $y = a^x$ para cualquier número positivo real. Primero el valor de $y = a^x$ está definido para todos los valores racionales de x por medio del uso de potencias y raíces. Cuando se ubican en una gráfica, se determina que todos esos puntos (x, y) se encuentran en una curva suave. Entonces esta curva puede utilizarse para definir el valor de a^x cuando x es un número irracional, simplemente leyendo la ordenada del punto de la gráfica en la que x tiene el valor irracional dado.

EJEMPLO 1 Construya las gráficas de cada función.

$$a)\ y = 2^x \qquad b)\ y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \qquad c)\ y = 3^x$$

Solución La tabla 3 da valores de estas tres funciones para una selección de valores de x.

TABLA 3

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	3
$y = 2^x$	0.25	0.354	0.5	0.707	1	1.414	2	2.828	4	8
$y = (\frac{1}{3})^x$	9	5.196	3	1.732	1	0.577	0.333	0.192	0.111	0.037
$y = 3^x$	0.111	0.192	0.333	0.577	1	1.732	3	5.196	9	27

Por ejemplo, cuando $x = -0.5$,

$$2^x = 2^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1.414} = 0.707$$

hasta tres cifras decimales, y

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1/2} = 3^{1/2} = \sqrt{3} = 1.732$$

Cuando graficamos, se obtienen los puntos indicados en la figura 2, y éstos pueden unirse por las curvas suaves que se advierten en tal figura. ☛ **10**

☛ **10.** ¿Cómo pueden obtenerse las gráficas de *a*) $y = 3^{-x}$ *b*) $y = 2^{-x}$ y *c*) 2^{x+1} a partir de las gráficas de la figura 2?

Respuesta *a*) $3^{-x} = (\frac{1}{3})^x$ de modo que la gráfica ya está dada en la figura 2;
b) Reflejando la gráfica de 2^x con respecto al eje y, obtenemos la gráfica de 2^{-x};
c) $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ de modo que la gráfica puede obtenerse a partir de la gráfica de 2^x multiplicando cada ordenada y por 2 (o moviendo la gráfica 1 unidad hacia la izquierda).

Una función del tipo $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) se denomina una **función exponencial**. Cuando $a > 1$, la función se conoce como una *función exponencial creciente*, mientras que si $a < 1$, se llama una *función exponencial decreciente*.

Las gráficas obtenidas en el ejemplo 1 son características de las *funciones exponenciales*. La figura 3 ilustra las gráficas de dos funciones, $y = a^x$ y $y = b^x$, con $a > b > 1$. Se advierte que si $x > 0$, estas dos funciones crecen a una tasa cada vez mayor a medida que x se incrementa. Puesto que $a > b$, la gráfica de $y = a^x$ para valores positivos de x está por encima de la gráfica de $y = b^x$ y crece de manera más pronunciada.

Por otra parte, cuando $x < 0$, ambas funciones decrecen hacia cero a medida que x se hace más y más negativa. En este caso, la función a^x cae de manera más

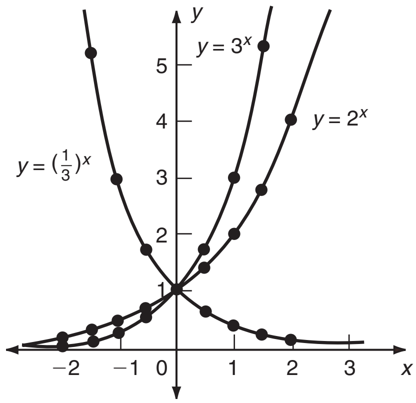


FIGURA 2

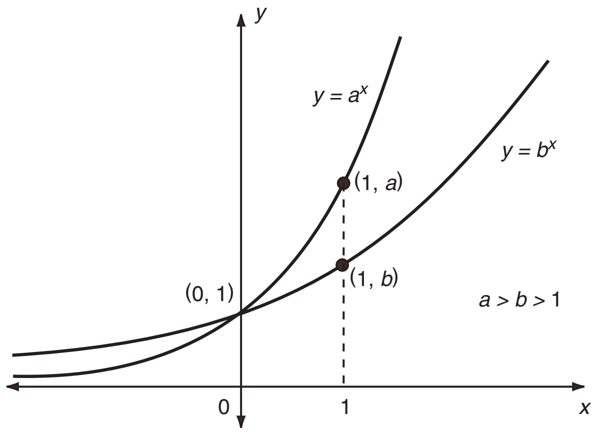


FIGURA 3

pronunciada que b^x y su gráfica está situada por debajo de la gráfica correspondiente a $y = b^x$. Las gráficas se intersecan cuando $x = 0$, dado que $a^0 = b^0 = 1$.

La gráfica de $y = a^x$ cuando $a < 1$ aparece en la figura 4. En el caso de que $a < 1$, a^x decrece cuando x se incrementa y se aproxima a cero a medida que x se hace más grande. En consecuencia, la gráfica se aproxima al eje x cada vez más cuando x se hace cada vez mayor.

Con base en las gráficas de las figuras 3 y 4 puede verse que el dominio de la función exponencial, $f(x) = a^x$ es el conjunto de todos los números reales y el rango es el conjunto de los números reales positivos. Así,

Si $a > 0$, $a^x > 0$ para todos los valores de x, positivos, negativos y cero.

El número a que aparece en la función exponencial a^x se conoce como la base. La base puede ser cualquier *número real positivo excepto* 1*. Con frecuencia es útil usar como base un número irracional denotado por e, el cual está dado hasta cinco cifras decimales por $e = 2.71828$. La función exponencial correspondiente se de-

* Si $a = 1$, entonces $f(x) = a^x = 1^x = 1$ es una función constante.

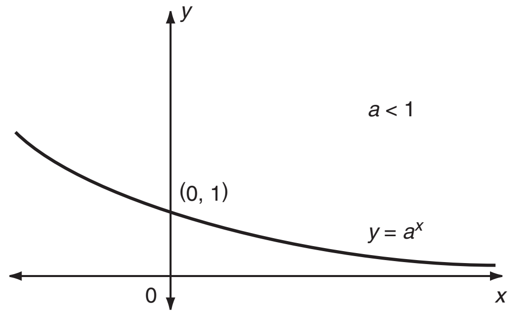


FIGURA 4

nota por e^x y se denomina la **función exponencial natural**. Ya que e está entre 2 y 3, la gráfica de $y = e^x$ está situada entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$ que aparecen en la figura 2.

La razón del por qué esta función exponencial particular es tan importante no puede explicarse por completo sin valernos del cálculo. Sin embargo, en la sección 6-1, ya hemos visto que la base e surge de forma natural cuando consideramos interés con capitalización continua.

EJEMPLO 2 Utilizando los valores de la tabla A.3.3, haga un bosquejo de la gráfica de las funciones $y = e^x$ y $y = e^{-x}$ para $-2 \leq x \leq 2$.

Solución Con base en la tabla A.3.3 obtenemos los valores de estas dos funciones (redondeados a dos decimales) que se muestran en la tabla 4:

TABLA 4

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
e^x	0.14	0.22	0.37	0.61	1.00	1.65	2.72	4.48	7.39
e^{-x}	7.39	4.48	2.72	1.65	1.00	0.61	0.37	0.22	0.14

Al trazar estos puntos y unirlos por medio de una curva suave, obtenemos las gráficas que se muestran en la figura 5.

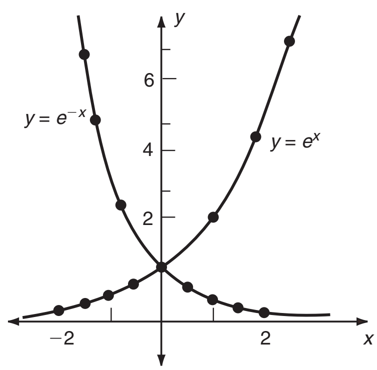


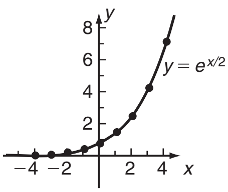
FIGURA 5

La gráfica de e^{-x} es un ejemplo de una función de crecimiento exponencial, ilustrado en la figura 3. La base $e \approx 2.7 > 1$. La función e^{-x} es una función de decaimiento exponencial tal como se ilustró en la figura 4. Observe que $e^{-x} = (e^{-1})^x$, de modo que la base es $e^{-1} \approx 0.37 < 1$. Observe que la gráfica de $y = e^{-x}$ es la reflexión de la gráfica de $y = e^x$ en el eje y. En realidad, existe una propiedad general para cualquier función f que la gráfica de $y = f(-x)$ es la reflexión en el eje y de la gráfica de $y = f(x)$. Recuerde que como con cualquier función exponencial, $e^x > 0$ para todos los valores de x. ☛ **11**

☛ **11.** Utilizando los valores tabulados en el ejemplo 2, trace la gráfica de $y = e^{t/2}$

Respuesta

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$e^{x/2}$	0.14	0.22	0.37	0.61	1.00	1.65	2.72	4.48	7.39



EJEMPLO 3 ¿Cuáles son el dominio y rango de la función $y = 2 - e^{-x}$?

Solución Como e^{-x} está definida para cualquier x, el dominio es el conjunto de todos los números reales. Ya que $e^{-x} > 0$, para todo x, $2 - e^{-x} < 2$. El rango de esta función es el conjunto de todos los números reales menores que 2, pues e^{-x} toma todos los valores positivos.

EJEMPLO 4 ***(Crecimiento poblacional)*** La población de cierta nación en desarrollo se determinó que está dada por medio de la fórmula

$$P = 15e^{0.02t}$$

donde t es el número de años medidos a partir de 1960. Determine la población en 1980 y la población proyectada en 2000, suponiendo que esta fórmula continúa cumpliéndose hasta entonces.

Solución En 1980, $t = 20$ y así

$$P = 15e^{(0.02)(20)} = 15e^{0.4} = 15(1.4918) = 22.4 \qquad \text{(con un decimal)}$$

De modo que en 1980, la población sería de 22.4 millones. Después de 20 años más, $t = 40$ y así

$$P = 15e^{(0.02)(40)} = 15e^{0.8} = 15(2.2255) = 33.4 \qquad \text{(con un decimal)}$$

Por tanto en el 2000, la población proyectada será de 33.4 millones. ☛ **12**

☛ **12.** La población de un pueblo en depresión está dada por $P = 5000e^{-0.03t}$ en donde t es el tiempo en años. ¿Cuál es la población en $t = 0$ y $t = 10$?

Respuesta 5000, 3704

EJEMPLO 5 ***(Crecimiento poblacional)*** La población de cierta ciudad en el instante t (medido en años) está dado por

$$P(t) = P_0 e^{0.03t} \qquad P_0 = 1.5 \text{ millones}$$

¿Cuál es el porcentaje anual de crecimiento?

Solución Después de n años, la población es

☛ **13.** Si $ce^{0.05t} = c(1 + i)^t$ para todos los valores de t, ¿cuál es el valor de i?

$$P_0(1 + i)^n = P_0e^{0.03n}$$
$$(1 + i)^n = e^{0.03n}$$
$$1 + i = e^{0.03} = 1.0305$$
$$i = 0.0305$$

Por tanto, como $i = R/100$.

$$R = 100(0.0305) = 3.05$$

Respuesta
$i = e^{0.05} - 1 = 0.05127$

La población crece 3.05% por año. ☛ **13**

Nota En estos dos ejemplos de crecimiento de población, la población estaba expresada en términos de cierta función exponencial natural. En efecto, es muy común, en el caso de variables que están creciendo (o decayendo), expresarlas utilizando la base e en la forma ce^{kx} (o ce^{-kx}), en donde c y k son constantes positivas. Sin embargo, no es esencial utilizar la base e, y en los ejemplos 5 y 6 de la sección 6-1 ya vimos casos en donde el crecimiento poblacional está expresado con una base diferente, en la forma $c(1 + i)^t$. Ambas formas son correctas, y como en el ejemplo 5 aquí lo muestra, son equivalentes.

EJERCICIOS 6-2

(1-4) Dada $f(x) = e^x$, demuestre que:

1. $f(0) = 1$

2. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$

3. $\dfrac{f(x)}{f(y)} = f(x - y)$

4. $[f(x)]^n = f(nx)$

(5-12) Determine el dominio y el rango de las siguientes funciones.

5. $y = f(x) = 2^{-x}$

6. $y = f(x) = (0.2)^{-x}$

7. $y = f(t) = -2^t$

8. $y = f(u) = -3e^{-u}$

9. $y = g(x) = 5 + 2e^x$

10. $y = f(t) = 3 - 2e^{-t}$

***11.** $y = f(x) = \dfrac{1}{3 + 2^x}$

***12.** $y = f(x) = (2 + 3e^{-x})^{-1}$

(13-20) Construya las gráficas de las siguientes funciones exponenciales calculando algunos de sus puntos.

13. $y = (\frac{3}{2})^x$

14. $y = (\frac{1}{2})^x$

15. $y = (\frac{1}{2})^{-x}$

16. $y = 3^{-x}$

17. $y = (\frac{1}{3})^x$

18. $y = -3^x$

19. $y = (\frac{2}{3})^{-x}$

20. $y = (\frac{3}{4})x$

(21-32) Por medio de las gráficas de $y = e^x$ y $y = e^{-x}$, haga un bosquejo de las gráficas de las siguientes funciones exponenciales.

21. $y = -e^x$

22. $y = e^{2x}$

23. $y = 1 + e^{-x}$

24. $y = e - 2e^x$

25. $y = e^{|x|}$

26. $y = e^{-|x|}$

27. $y = e^{x+|x|}$

28. $y = e^{x-|x|}$

29. $y = e^{x^2}$

30. $y = e^{-x^2}$

***31.** $y = \dfrac{1}{1 + e^x}$

***32.** $y = \dfrac{e^x}{1 + 2e^x}$

33. Una población de microorganismos se duplica cada 20 minutos. Si al principio están presentes 200 organismos, encuentre una fórmula para el tamaño de la población después de t horas.

34. Una población de microorganismos se duplica cada 45 minutos. Si al principio están presentes 5000 organismos, ¿cuántos habrá después de:

a) 3 horas?

b) 6 horas?

c) t horas?

35. Durante el otoño, en promedio cada tres días muere la mitad de la población de moscas. Si inicialmente el tamaño de la población es de un millón, determine el número de sobrevivientes después de:

a) 3 semanas.

b) t semanas.

36. *(Crecimiento poblacional)* La población de cierta ciudad en el tiempo t (medido en años) está dado por medio de la fórmula

$$P = 50{,}000e^{0.05t}$$

Calcule la población:

a) Cuando $t = 10$. *b*) Cuando $t = 15$.

37. *(Disminución de población)* Cierta región con depresión económica tiene una población que está en disminución. En 1970, su población era 500,000, y a partir de ese momento su población estaba dada por la fórmula

$$P = 500{,}000e^{-0.02t}$$

en donde t es el tiempo en años. Encuentre la población en 1980. Suponiendo que esta tendencia continúa, determine la población para el año 2000.

38. En el ejercicio 36, calcule el crecimiento porcentual anual de la población.

39. En el ejercicio 37, calcule la disminución porcentual anual de la población. ¿Es constante o depende de t?

40. *(Crecimiento de ganancias)* Las ganancias de cierta compañía han ido aumentando en 12% anual en promedio entre 1975 y 1980. En 1980, fueron \$5.2 millones. Suponiendo que esta tasa de crecimiento continúe, encuentre las ganancias en 1985.

41. *(Depreciación exponencial)* Una máquina se compra en \$10,000 y se deprecia de manera continua desde la fecha de compra. Su valor después de t años está dado por la fórmula

$$V = 10{,}000e^{-0.2t}$$

a) Determine el valor de la máquina después de 8 años.

b) Determine la disminución porcentual del valor cada año.

***42.** *(Análisis de equilibrio)* Por medio de un examen a sus competidores, una compañía manufacturera concluye que el número N de sus empleados aumenta exponencialmente con su volumen de ventas semanales x de acuerdo con la fórmula $N = 100e^{0.02x}$. El costo promedio del salario es \$6 por hora con una semana laborable de 35 horas. El producto de la empresa se vende en \$2000 cada uno. Dibuje gráficas del pago semanal y de los ingresos semanales como funciones de x para $10 < x < 130$, y estime gráficamente el intervalo de valores de x en el que la compañía puede obtener ganancias.

■ 6-3 LOGARITMOS

La inversa de una función $f(x)$ se obtiene resolviendo la ecuación $y = f(x)$ para x, de modo que expresemos a x como función de y: $x = f^{-1}(y)$. Podemos considerar la posibilidad de construir la inversa de la función a^x. Con el propósito de lograrlo, debemos resolver la ecuación $y = a^x$ para x. Tal ecuación no puede resolverse en términos de las funciones que conocemos hasta el momento, por lo que debemos inventar un nuevo nombre para la solución. Escribimos la solución en la forma $x = \log_a y$, la cual denominaremos el **logaritmo de *y* con base *a***. Así

$$\boxed{x = \log_a y \quad \text{si y sólo si} \quad y = a^x}$$

De la proposición $y = a^x$, observamos que a debe elevarse a la potencia x con el fin de obtener y. Esto nos conduce a una definición verbal alternativa (ya que $x = \log_a y$).

$$\boxed{\log_a y \text{ es la potencia a la cual } a \text{ debe elevarse para obtener } y.}$$

La función a^x sólo está definida cuando $a > 0$. Además, cuando $a = 1$, entonces $1^x = 1$ para toda x, y esta función no puede tener una inversa. Por tanto, en estas definiciones *a puede ser cualquier número positivo excepto* 1. Desde ahora se sobreentiende que la base a siempre satisface las condiciones $a > 0$, $a \neq 1$.

EJEMPLO 1 Construya la gráfica de la función logaritmo de base 2. ¿Cuál es el dominio y el rango de esta función?

Solución Usemos x como la variable independiente y escribimos

$$y = \log_2 x$$

De acuerdo con la definición, esto es lo mismo que

$$x = 2^y$$

(Nótese que x y y se han intercambiado y $a = 2$). Podemos construir la tabla 5, en la que damos una serie de valores de y y calculamos los valores correspondientes de x. Por ejemplo, cuando $y = -2$, $x = 2^{-2} = 1/2^2 = 0.25$, de modo que el punto $(x, y) = (0.25, -2)$ pertenece a la gráfica. Los puntos tabulados están graficados en la figura 6 y unidos por medio de una curva suave. Observe que el eje x está dibujado de manera horizontal ya que cuando escribimos $y = \log_2 x$, estamos considerando que x es la variable independiente.

TABLA 5

y	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	3
x	0.25	0.354	0.5	0.707	1	1.414	2	2.828	4	8

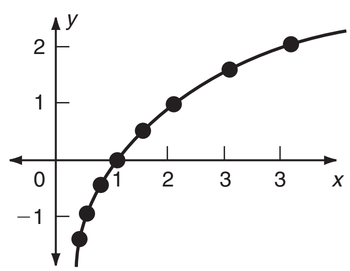
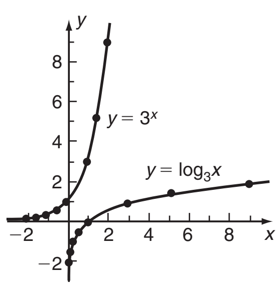


FIGURA 6

El dominio de esta función es el conjunto de los números positivos y su rango es el conjunto de todos los números reales. Esto es cierto para $y = \log_a x$ con cualquier base a. ☛ **14**

☛ **14.** Grafique $y = 3^x$ y $y = \log_3 x$ en los mismos ejes.

Respuesta En las dos tablas, los valores de x y y están intercambiados. Observe que las gráficas son reflexiones una de la otra con respecto a la recta $y = x$.



x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$y = 3^x$	0.11	0.19	0.33	0.58	1.00	1.73	3	5.20	9
$y = \log_3 x$	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$x = 3^y$	0.11	0.19	0.33	0.58	1.00	1.73	3	5.20	9

Al igual que con cualquier función inversa, la gráfica de la función logaritmo $x = \log_a y$ en el caso de una base general a puede obtenerse de la gráfica de la función exponencial $y = a^x$ intercambiando los ejes. Las dos gráficas aparecen en la figura 7 que es un caso común con $a > 1$. Notemos que:

$\log_a y$ sólo está definido si y sólo si $y > 0$
Si $a > 1$, $\log_a y > 0$ cuando $y > 1$ y $\log_a y < 0$ cuando $y < 1$

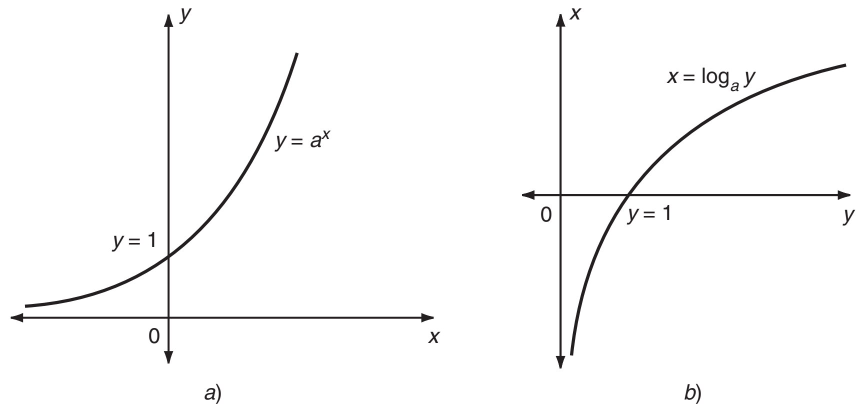


FIGURA 7

La proposición $x = \log_a y$ significa exactamente lo mismo que el enunciado $y = a^x$. Por ejemplo, la afirmación $\log_3 9 = 2$ es válida dado que significa lo mismo que la proposición $3^2 = 9$. (Aquí $a = 3$, $y = 9$ y $x = 2$). De estos dos enunciados equivalentes, $x = \log_a y$ se denomina la **forma logarítmica** y $y = a^x$ se conoce como la **forma exponencial**.

☛ **15.** Escriba en forma logarítmica *a*) $5^{-2} = 0.04$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = 15.625$

EJEMPLO 2 Escriba cada enunciado en forma logarítmica:

a) $2^4 = 16$ *b*) $(\frac{1}{2})^{-3} = 8$

Escriba cada proposición en forma exponencial con la finalidad de verificar que cada una de ellas sea correcta.

c) $\log_4 8 = \frac{3}{2}$ *d*) $\log_{27} (\frac{1}{9}) = -\frac{2}{3}$

Solución

a) Tenemos que $2^4 = 16$. Comparándola con la ecuación $a^x = y$, observamos que $a = 2$, $x = 4$ y $y = 16$. La forma logarítmica, $x = \log_a y$, es

$$\log_2 16 = 4$$

b) Comparando $(\frac{1}{2})^{-3} = 8$ con $a^x = y$, tenemos que $a = \frac{1}{2}$, $x = -3$ y $y = 8$. La forma logarítmica es

$$\log_{1/2} 8 = -3 \quad ☛ \ \mathbf{15}$$

Respuesta *a*) $\log_5 (0.04) = -2$
b) $\log_{2/5}(15.625) = -3$

c) Comparando $\log_4 8 = \frac{3}{2}$ con la ecuación $\log_a y = x$, observamos que $a = 4$, $y = 8$ y $x = \frac{3}{2}$. La forma exponencial, $y = a^x$, es $8 = 4^{3/2}$. Dado que sin duda ésta es una proposición verdadera, se sigue que la forma logarítmica también debe ser cierta.

☛ **16.** Escriba en forma exponencial
a) $\log_2 (32) = 5$
b) $\log 1/3 (9) = -2$

d) Aquí $a = 27$, $y = \frac{1}{9}$ y $x = -\frac{2}{3}$ y la forma exponencial es $27^{-2/3} = \frac{1}{9}$. Otra vez, es fácil verificar esto. ☛ **16**

Respuesta *a*) $2^5 = 32$
b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$

EJEMPLO 3 Calcule los valores de: *a*) $\log_2 16$; *b*) $\log_{1/3} 243$.

Solución

a) Sea $x = \log_2 16$. De la definición de logaritmo, se sigue que $16 = 2^x$. Pero $16 = 2^4$, de modo que $x = 4$. Por tanto, $\log_2 16 = 4$.

☛ **17.** Encuentre x tal que:
a) $\log_4 8 = x$ *b*) $\log_x 4 = 2$
c) $\log_x (x^{-1}) = -1$

b) Sea $x = \log_{1/3} 243$. Entonces, de la definición, $243 = (\frac{1}{3})^x$. Pero $243 = 3^5 = (\frac{1}{3})^{-5}$. En consecuencia, $x = -5$. ☛ **17**

EJEMPLO 4 Evalúe $2^{\log_4 9}$.

Solución Sea $x = \log_4 9$, o sea que $9 = 4^x$. La cantidad que deseamos calcular es, por tanto,

$$2^{\log_4 9} = 2^x = (4^{1/2})^x = (4^x)^{1/2} = 9^{1/2} = 3$$

Algunas propiedades de los logaritmos

En la definición de logaritmo, tomemos $x = 0$. Entonces,

$$y = a^x = a^0 = 1$$

Por tanto, la proposición $\log_a y = x$ adquiere la forma

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

De esta forma advertimos que *el logaritmo de 1 con cualquier base es igual a 0.*

Enseguida, tomemos $x = 1$. Se sigue que

$$y = a^x = a^1 = a$$

Por tanto la proposición $\log_a y = x$ se transforma en

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

Respuesta *a*) $\frac{3}{2}$ *b*) 2
c) cualquier $x > 0$, $x \neq 1$

De modo que *el logaritmo de cualquier número positivo con la misma base siempre es igual a 1.*

Los logaritmos tienen las cuatro propiedades siguientes:

$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	(1)
$\log_a\left(\dfrac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$	$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	(2)
$\log_a\left(\dfrac{1}{v}\right) = -\log_a v$	$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$	(3)
$\log_a(u^n) = n\log_a u$	$(a^x)^n = a^{xn}$	(4)

(Además de cada propiedad, también dimos la relacionada con los exponentes.) Estas propiedades constituyen la base del uso de los logaritmos al efectuar cálculos aritméticos. Las probaremos al final de esta sección. Mientras tanto, las ilustraremos con dos ejemplos.

EJEMPLO 5

a) Dado que $8 = 2^3$, se sigue que $\log_2 8 = 3$. Puesto que $16 = 2^4$, $\log_2 16 = 4$. De la propiedad (1), por tanto,

$$\log_2(8 \cdot 16) = \log_2 8 + \log_2 16 \quad \text{o bien} \quad \log_2(128) = 3 + 4 = 7.$$

Es claro que esta proposición es válida ya que $128 = 2^7$.

b) También podemos calcular $\log_2(128)$ utilizando la propiedad (4) de los logaritmos.

$$\log_2(128) = \log_2(2^7) = 7\log_2 2$$

Pero $\log_a a = 1$ para cualquier a, de modo que $\log_2 2 = 1$. Por tanto, $\log_2 128 = 7$.

c) Puesto que $81 = (\frac{1}{3})^{-4}$, se sigue que $\log_{1/3} 81 = -4$. En consecuencia, por la propiedad (3),

$$\log_{1/3}(\tfrac{1}{81}) = -\log_{1/3} 81 = -(-4) = 4$$

Es claro que este resultado es correcto dado que $\frac{1}{81} = (\frac{1}{3})^4$

EJEMPLO 6 Si $x = \log_2 3$, exprese las cantidades siguientes en términos de x.

a) $\log_2(\frac{1}{3})$ *b*) $\log_2 \frac{2}{3}$ *c*) $\log_2 18$ *d*) $\log_2 \sqrt{\frac{27}{2}}$

Solución

a) $\log_2(\frac{1}{3}) = -\log_2 3$ (Propiedad 3)

$= -x$

b) $\log_2(\frac{2}{3}) = \log_2 2 - \log_2 3$ (Propiedad 2)

$= 1 - x$

(Aquí usamos el hecho de que $\log_a a = 1$ para cualquier base a).

$$c)\quad \log_2 (18) = \log_2 (2 \cdot 3^2)$$
$$= \log_2 2 + \log_2 3^2 \qquad \text{(Propiedad 1)}$$
$$= 1 + 2 \log_2 3 \qquad \text{(Propiedad 4)}$$
$$= 1 + 2x$$

$$d)\quad \log_2 \sqrt{\tfrac{27}{2}} = \log_2 (\tfrac{27}{2})^{1/2}$$
$$= \tfrac{1}{2}\log_2 (\tfrac{27}{2}) \qquad \text{(Propiedad 4)}$$
$$= \tfrac{1}{2}[\log_2 27 - \log_2 2] \qquad \text{(Propiedad 2)}$$
$$= \tfrac{1}{2}[\log_2 3^3 - 1]$$
$$= \tfrac{1}{2}[3 \log_2 3 - 1] \qquad \text{(Propiedad 4)}$$
$$= \tfrac{1}{2}(3x - 1)$$ ☛ **18**

☛ **18.** En el ejemplo 6, exprese lo siguiente en términos de x.
a) $\log_2 (\frac{1}{6})$ *b*) $\log_2 \sqrt{2}$
c) $\log_2 \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

Logaritmos naturales

También podemos formar logaritmos con base e. Éstos se denominan **logaritmos naturales** (o **logaritmos neperianos**). Se denotan con el símbolo ln. La definición es

$$y = e^x \qquad x = \log_e y = \ln y$$

Esto es, la función $x = \ln y$ es la inversa de la función $y = e^x$.

Como con todos los logaritmos, ln y está definido sólo para $y > 0$. Si $y > 1$, entonces ln y es positivo, mientras que si $y < 1$, ln y es negativo.

El logaritmo natural tiene propiedades correspondientes a las estudiadas anteriormente para una base general. Aquí las listamos de nueva cuenta:

$$\ln 1 = 0 \qquad \ln e = 1$$

$$\ln(uv) = \ln u + \ln v \qquad \ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v$$

$$\ln\left(\frac{1}{v}\right) = -\ln v \qquad \ln(u^n) = n \ln u$$

Con una calculadora portátil adecuada, podemos encontrar el logaritmo natural de cualquier número presionando el botón correspondiente. Si no tiene calculadora disponible, una tabla de logaritmos naturales se proporciona en el apéndice III (véase la tabla A.3.2); el ejemplo 7 ilustra su uso.

EJEMPLO 7 Usando la tabla A.3.2, calcule los valores de los logaritmos siguientes:

a) ln 3.4 *b*) ln 100 *c*) ln 340 *d*) ln 0.34

Respuesta *a*) $-1 - x$
b) $\frac{1}{2}$ *c*) $\frac{1}{3}(x - 2)$

Solución *a*) De la tabla, encontramos de inmediato que ln 3.4 = 1.2238.

b) En la base de la tabla, encontramos que ln 10 = 2.3026. Por tanto,

$$\ln 100 = \ln 10^2 = 2 \ln 10 = 2(2.3026) = 4.6052$$

c) $\ln 340 = \ln (3.4 \times 100)$

$$= \ln 3.4 + \ln 100$$

$$= 1.2238 + 4.6052 = 5.8290$$

Observe que la tabla A.3.2 sólo da los logaritmos naturales entre 1 y 10. En el caso de números situados fuera de este rango, puede factorizarse una potencia apropiada de 10 (en este ejemplo, 100).

d) $\ln (0.34) = \ln (3.4 \times 10^{-1})$

$$= \ln 3.4 + \ln (10^{-1})$$

$$= \ln 3.4 - \ln 10$$

$$= 1.2238 - 2.3026 = -1.0788.$$ ☛ **19**

☛ **19.** Usando la tabla A.3.2 evalúe
a) ln 5.48 *b*) ln 0.548

EJEMPLO 8 Dado que ln 2 = 0.6931 y ln 3 = 1.0986 con cuatro decimales, evalúe:

a) ln 18 *b*) $\ln \sqrt{54}$ *c*) $\ln (\frac{1}{4}e)$

Solución Utilizando las propiedades anteriores de los logaritmos naturales, obtenemos

a) $\ln 18 = \ln (2 \cdot 3^2) = \ln 2 + \ln(3^2)$

$$= \ln 2 + 2 \ln 3$$

$$= 0.6931 + 2(1.0986) = 2.8903$$

b) $\ln \sqrt{54} = \frac{1}{2} \ln 54 = \frac{1}{2} \ln (2 \cdot 3^3)$

$$= \tfrac{1}{2} (\ln 2 + \ln 3^3)$$

$$= \tfrac{1}{2} (\ln 2 + 3 \ln 3)$$

$$= \tfrac{1}{2} [0.6931 + 3(1.0986)] = 1.9945$$

c) $\ln (e/4) = \ln e - \ln 4$

$$= 1 - \ln (2^2) = 1 - 2 \ln 2$$

$$= 1 - 2(0.6931) = -0.3862$$

EJEMPLO 9 Simplifique las expresiones siguientes sin utilizar tablas o calculadoras.

$$E = \ln 2 + 16 \ln (\tfrac{16}{15}) + 12 \ln (\tfrac{25}{24}) + 7 \ln (\tfrac{81}{80})$$

Solución $E = \ln 2 + 16 \ln \left(\dfrac{2^4}{3 \cdot 5}\right) + 12 \ln \left(\dfrac{5^2}{2^3 \cdot 3}\right) + 7 \ln \left(\dfrac{3^4}{2^4 \cdot 5}\right)$

$$= \ln 2 + 16 (\ln 2^4 - \ln 3 - \ln 5)$$

$$+ 12(\ln 5^2 - \ln 2^3 - \ln 3) + 7 (\ln 3^4 - \ln 2^4 - \ln 5)$$

$$= \ln 2 + 16 (4 \ln 2 - \ln 3 - \ln 5)$$

$$+ 12(2 \ln 5 - 3 \ln 2 - \ln 3) + 7(4 \ln 3 - 4 \ln 2 - \ln 5)$$

Respuesta *a*) 1.7011
b) −0.6015

☛ **20.** Simplifique las expresiones siguientes utilizando las propiedades de los logaritmos naturales:

a) $\ln(4x^2) - \ln(6x)$

b) $\ln(e^{2x}\sqrt{x})$

c) $\ln(1 - x^2) + \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

d) $\ln(x^3) - \ln(x^2)$

e) $\frac{1}{x}\ln\sqrt{e^{3x}}$

Respuesta *a*) $\ln\left(\frac{2}{3}x\right)$
b) $2x + \frac{1}{2}\ln x$ *c*) $2\ln(1 - x)$
d) $\ln x$; (e) $\frac{3}{2}$

$$= \ln 2(1 + 64 - 36 - 28) + \ln 3(-16 - 12 + 28) + \ln 5(-16 + 24 - 7)$$

$$= \ln 2 + \ln 5 = \ln(2 \cdot 5) = \ln 10$$ ☛ **20**

EJEMPLO 10 Resuelva las siguientes ecuaciones para x.

a) $2\ln(2x + 2) = \ln\left(1 + \frac{12x}{25}\right) + 2\ln 10$

b) $\log_x(3 - 2x) = 2$

Solución

a) Utilizando las propiedades de los logaritmos, podemos escribir la ecuación dada en la forma

$$\ln(2x + 2)^2 = \ln\left(1 + \frac{12x}{25}\right) + \ln 100$$

$$= \ln\left[100\left(1 + \frac{12x}{25}\right)\right] = \ln(100 + 48x)$$

Por tanto,

$$(2x + 2)^2 = 100 + 48x$$

Ésta es una ecuación cuadrática cuyas soluciones se ve fácilmente que son $x = 12$ y $x = -2$. Sin embargo, cuando $x = -2$, el término $\ln(2x + 2) = \ln(-2)$ en la ecuación original no está definido. De modo que $x = -2$ no puede ser solución y $x = 12$ es la única solución.

b) El enunciado $\log_x p = q$ es equivalente a la forma exponencial $p = x^q$. La ecuación dada está de esta forma con $p = 3 - 2x$ y $q = 2$, de modo que es equivalente a

$$3 - 2x = x^2$$

Las raíces de esta ecuación cuadrática son $x = 1$ y $x = -3$. Pero en la ecuación original, x es una base, y no puede ser igual a 1 o ser negativa. Por lo que la ecuación dada no tiene soluciones. ☛ **21**

☛ **21.** Resuelva para x:

a) $\ln(e^x) = 2$

b) $\ln(x + 1) - \ln(x - 1) = 1$

c) $2\ln(x - 1) = \ln(x + 3) + \ln 2$

Respuesta *a*) 4 *b*) $\frac{e+1}{e-1}$
c) 5. ($x = -1$ no es una solución).

Dos propiedades importantes de los logaritmos naturales se obtiene por medio de la eliminación de x o y de las dos ecuaciones, $y = e^x$, $\ln y = x$. Al sustituir $y = e^x$ en la segunda ecuación, obtenemos $\ln y = \ln(e^x) = x$. De manera alterna, al sustituir $x = \ln y$ en la primera ecuación obtenemos $y = e^x = e^{\ln y}$. Así,

$$\boxed{e^{\ln y} = y \quad \text{para toda } y > 0 \qquad \ln(e^x) = x \quad \text{para toda } x}$$

Por ejemplo, $e^{\ln 2} = 2$, $\ln(e^{-3}) = -3$

Logaritmos comunes

En algún tiempo, los logaritmos fueron usados ampliamente para llevar a cabo cálculos aritméticos que implicaban multiplicación, división y el cálculo de potencias y raíces. Con la amplia disponibilidad de calculadoras electrónicas, tal uso ha disminuido considerablemente, aunque en algunas áreas los logaritmos aún se utilizan. (Por ejemplo, el piloto de un barco debe aprender cómo utilizar las tablas de logaritmos y otras tablas para protegerse de la posibilidad de fallas electrónicas).

Los logaritmos que por lo común se utilizan para este propósito son los denominados **logaritmos comunes** y se obtienen usando el número 10 como base (esto es $a = 10$). Así, el logaritmo común de un número y es $\log_{10} y$; sin embargo, para evitar complicar la notación, el logaritmo común por lo regular se denota por $\log y$; la base es omitida.* Así que cuando la base no esté escrita, debe entenderse que será 10.

Por tanto, estas expresiones son equivalentes a

$$\boxed{x = \log y \quad \text{y} \quad y = 10^x}$$

El siguiente ejemplo demuestra la aplicación de las propiedades 1 a la 4 a logaritmos comunes.

EJEMPLO 11 Examinemos las relaciones generales $y = 10^x$ y $x = \log y$ para ciertos valores de x y y.

a) $x = 1$: Entonces $y = 10^1 = 10$, de modo que $\log 10 = 1$

b) $x = 2$: Entonces $y = 10^2 = 100$, de modo que $\log 100 = 2$

c) $x = -1$: Entonces $y = 10^{-1} = 0.1$, de modo que $\log 0.1 = -1$

d) A cuatro decimales, de la tabla A.3.1, encontramos que $\log 3 = 0.4771$. Esto significa que $3 = 10^{0.4771}$. Utilizando la propiedad 1 de los logaritmos, establecida anteriormente, se sigue que

$$\log 30 = \log 3 + \log 10 = 1.4771$$

$$\log 300 = \log 3 + \log 100 = 2.4771$$

$$\log (0.3) = \log 3 + \log 0.1 = -1 + 0.4771 = -0.5229$$

e) También, con base en la tabla A.3.1, encontramos que $\log 2 = 0.3010$. Así que

$$\log 6 = \log(3 \cdot 2) = \log 3 + \log 2 = 0.4771 + 0.3010 = 0.7781$$

y

$$\log 4 = \log(2^2) = 2 \log 2 = 0.6020$$ ☛ **22**

☛ **22.** Si $\log 2 = x$, encuentre y tal que
a) $\log y = 2x + 1$
b) $\log y = \frac{1}{2}(x - 1)$

Respuesta *a*) 40; *b*) $\sqrt{0.2}$

* En algunos libros, la notación $\log y$ se utiliza para representar al logaritmo natural de y.

Demostración de las propiedades básicas de los logaritmos

1. Sean $x = \log_a u$ y $y = \log_a v$. Entonces, de la definición de logaritmo,

$$u = a^x \quad \text{y} \quad v = a^y$$

Por lo que se sigue que

$$uv = (a^x)(a^y) = a^{x+y}$$

después de utilizar una de las propiedades fundamentales de los exponentes. En consecuencia, de la definición de logaritmo, se concluye que $x + y$ debe ser el logaritmo en base a de uv:

$$x + y = \log_a(uv)$$

En otras palabras, al sustituir x y y tenemos la fórmula requerida

$$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$$

2. El segundo resultado puede obtenerse considerando u/v.

$$\frac{u}{v} = \frac{a^x}{a^y} = a^x a^{-y} = a^{x-y}$$

Así $x - y = \log_a(u/v)$, o de manera equivalente, $\log_a(u/v) = \log_a u - \log_a v$.

3. Utilizamos la propiedad 2 y hacemos $u = 1$. Cuando $u = 1$, $\log_a u = 0$, y obtenemos

$$\log_a\left(\frac{1}{v}\right) = -\log_a v$$

4. Cuarta, sea $x = \log_a u$, por lo que $u = a^x$. Entonces, $u^n = (a^x)^n = a^{xn}$. Así $xn = \log_a(u^n)$, o bien,

$$\log_a u^n = n \log_a u$$

EJERCICIOS 6-3

(1-6) Verifique las siguientes proposiciones y reescríbalas en forma logarítmica con una base apropiada.

1. $(27)^{-4/3} = \frac{1}{81}$

2. $(16)^{3/4} = 8$

3. $(125)^{2/3} = 25$

4. $8^{-5/3} = \frac{1}{32}$

5. $(\frac{8}{27})^{-1/3} = \frac{3}{2}$

6. $(\frac{625}{16})^{-3/4} = \frac{8}{125}$

(7-10) Escriba las siguientes igualdades en forma exponencial y verifíquelas.

7. $\log_3 27 = 3$

8. $\log_{1/9}(\frac{1}{243}) = \frac{5}{2}$

9. $\log_4(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$

10. $\log_2(\frac{1}{4}) = -2$

(11-22) Calcule los valores de las siguientes expresiones usando la definición de logaritmo.

11. $\log_2 512$

12. $\log_{27} 243$

13. $\log_{\sqrt{2}} 16$

14. $\log_8 128$

15. $\log_2 0.125$

16. $\log_a 32 \div \log_a 4$

17. $10^{\log 100}$

18. $10^{\log 2}$

19. $\log_4(2^p)$

20. $\log_2(4^p)$

21. $2^{\log_{1/2} 3}$

22. $3^{\log_9 2}$

(23-28) Dado que $\log 5 = 0.6990$ y $\log 9 = 0.9542$, evalúe las siguientes expresiones sin usar tablas o calculadora.

23. $\log 2$ **24.** $\log 3$

25. $\log 12$ **26.** $\log 75$

27. $\log 30$ **28.** $\log \sqrt{60}$

(29-36) Escriba cada una de las siguientes expresiones como el logaritmo de una sola expresión.

29. $\log (x + 1) - \log x$

30. $\log x + \log 5 - \log y$

31. $2 \ln x - 3 \ln y + 4 \ln t$

32. $\ln t - 2 \ln u + 3 \ln v$

33. $2 \ln x + x \ln 3 - \frac{1}{2} \ln (x + 1)$

34. $x \ln 2 + 5 \ln (x - 1) - 2 \ln (x + 3)$

35. $\log x + 2 \log y - 3$

36. $2 + 3 \ln t - 4 \ln x$

(37-50) Resuelva para x las siguientes ecuaciones sin usar tablas o calculadora.

37. $\log_2 (x + 3) = -1$ **38.** $\log_x 4 = 2$

39. $\log_x (5x - 6) = 2$ **40.** $\log_x (6 - x) = 2$

41. $\log_x (6 - 5x) = 2$

42. $\ln (x + 2) - \ln (x - 1) = \ln 4$

43. $\ln (10x + 5) - \ln (4 - x) = \ln 2$

44. $\log_3 3 + \log_3 (x + 1) - \log_3 (2x - 7) = 4$

45. $\ln x = \ln 3 + 2 \ln 2 - \frac{3}{4} \ln 16$

46. $\ln (4x - 3) = \ln (x + 1) + \ln 3$

47. $\log (2x + 1) - \log (3 - x) = \log 5$

48. $\log (2x + 1) + \log (x + 3) = \log (12x + 1)$

49. $\log (x - 2) = \log (3x - 2) - \log (x - 2)$

50. $\log (x + 3) + \log (x - 1) = \log (1 - x)$

51. Si $\ln (x - y) = \ln x - \ln y$, determine x en términos de y.

52. Demuestre que

$$x^{\ln y - \ln z} \cdot y^{\ln z - \ln x} \cdot z^{\ln x - \ln y} = 1$$

(53-54) Compruebe las siguientes igualdades sin usar tablas o calculadora.

53. $7 \log (\frac{16}{15}) + 5 \log (\frac{25}{24}) + 3 \log (\frac{81}{80}) = \log 2$

54. $3 \log (\frac{36}{25}) + \log (\frac{6}{27})^3 - 2 \log (\frac{16}{125}) = \log 2$

(55-60) Evalúe los siguientes logaritmos usando la tabla A.3.2. del apéndice.

55. $\ln 3.41$ **56.** $\ln 2.68$

57. $\ln 84.2$ **58.** $\ln 593$

59. $\ln 0.341$ **60.** $\ln 0.00917$

61. Si $f(x) = \ln x$, demuestre que

a) $f(xy) = f(x) + f(y)$ *b)* $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

c) $f(ex) = 1 + f(x)$ *d)* $f\left(\frac{e}{x}\right) = 1 - f(x)$

e) $f(x^n) = nf(x)$ *f)* $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

62. Si $f(x) = \log x$, demuestre que $f(1) + f(2) + f(3) = f(1 + 2 + 3)$.

(63-74) Determine el dominio de las siguientes funciones.

63. $f(x) = \ln (x - 2)$ **64.** $f(x) = \ln (3 - x)$

65. $f(x) = \ln (4 - x^2)$ **66.** $f(x) = \ln (9 + x^2)$

67. $f(x) = 1 + \ln x$ **68.** $f(x) = \log |x - 3|$

69. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ **70.** $f(x) = \dfrac{1}{1 - \ln x}$

71. $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^x}$ **72.** $f(x) = \dfrac{e^x}{3 - e^x}$

73. $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + \ln x}$ **74.** $f(x) = \sqrt{\ln x}$

(75-82) Utilizando la gráfica de $y = \ln x$, haga un bosquejo de las gráficas de las siguientes funciones.

75. $f(x) = \ln (-x)$ **76.** $f(x) = \ln|x|$

77. $f(x) = 1 + \ln x$ **78.** $f(x) = -\ln x$

79. $f(x) = 2 \ln x$ **80.** $f(x) = \ln x^2$

81. $f(x) = \ln (x - 3)$ **82.** $f(x) = \ln|x + 2|$

83. *(Función de costo)* Una compañía manufacturera encuentra que el costo de producir x unidades por hora está dado por la fórmula

$$C(x) = 5 + 10 \log(1 + 2x)$$

Calcule:

a) El costo de producir 5 unidades por hora.

b) El costo extra por aumentar la tasa de producción de 5 a 10 unidades por hora.

c) El costo extra por aumentar de 10 a 15 unidades por hora.

84. *(Publicidad y ventas)* Una compañía encuentra que la cantidad de dólares y que debe gastar semanalmente en publicidad para vender x unidades de su producto está dada por

$$y = 200 \ln\left(\frac{400}{500 - x}\right)$$

Calcule el gasto publicitario que se necesita para vender:

a) 100 unidades

b) 300 unidades

c) 490 unidades

85. *(Función de costo)* Una compañía está ampliando sus instalaciones y tiene opción para elegir entre dos modelos. Las funciones de costos son $C_1(x) = 3.5 + \log(2x + 1)$ y $C_2(x) = 2 + \log(60x + 105)$ donde x es la tasa de producción. Encuentre la tasa x a la cual los dos modelos tienen los mismos costos. ¿Para valores grandes de x, cuál modelo es más barato?

86. *(Fisiología animal)* Si W es el peso de un animal promedio de una especie a la edad t, se encuentra a menudo que

$$\ln W - \ln(A - W) = B(t - C)$$

donde A, B y C son ciertas constantes. Exprese W como una función explícita de t.

■ 6-4 APLICACIONES Y PROPIEDADES ADICIONALES DE LOS LOGARITMOS

Ecuaciones exponenciales

Una de las aplicaciones más importantes de los logaritmos es en la resolución de ciertos tipos de ecuaciones, en que la incógnita aparece como un exponente. Consideremos los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1 ***(Crecimiento de la población)*** En 1980, la población de cierta ciudad era de 2 millones de habitantes y estaba creciendo a una tasa del 5% anual. ¿Cuándo rebasará la población la marca de los 5 millones, suponiendo que la tasa de crecimiento es constante?

Solución A una tasa de crecimiento del 5%, la población se multiplica por un factor de 1.05 cada año. Después de n años, a partir de 1980, el nivel de la población es

$$2(1.05)^n \text{ millones}$$

Buscamos el valor de n para el cual este nivel sea de 5 millones, de modo que tenemos

$$2(1.05)^n = 5 \quad \text{o} \quad (1.05)^n = 2.5$$

Observe que en esta ecuación, la cantidad desconocida n aparece como exponente. Podemos resolverla tomando logaritmos en ambos lados. No importa qué base usemos, pero es más conveniente la de los logaritmos comunes. Obtenemos

$$\log (1.05)^n = \log 2.5$$

o bien, usando la propiedad 4 de los logaritmos,

$$n \log 1.05 = \log 2.5$$

Por tanto,

$$n = \frac{\log 2.5}{\log 1.05} = \frac{0.3979}{0.0212} \qquad \text{(de la tabla A.3.l)}$$

$$= 18.8$$

En consecuencia, le lleva 18.8 años a la población alcanzar los 5 millones. Este nivel se alcanzará durante 1998. ☛ **23**

☛ **23.** En el ejemplo 1, determine el valor de n utilizando logaritmos naturales en vez de logaritmos comunes.

Respuesta

$$n = \frac{\ln (2.5)}{\ln (1.05)} = \frac{0.9163}{0.04879} = 18.78$$

EJEMPLO 2 ***(Inversiones)*** La suma de \$100 se invierte a un interés compuesto anual del 6%. ¿Cuánto tardará la inversión en incrementar su valor a \$150?

Solución A un interés del 6% anual, la inversión crece por un factor de 1.06 cada año. Por tanto, después de n años, el valor es $100(1.06)^n$. Igualando esto a 150, obtenemos la siguiente ecuación con incógnita n:

$$100(1.06)^n = 150 \quad \text{o} \quad (1.06)^n = 1.5$$

Tomamos logaritmos en ambos lados y simplificamos.

$$\log (1.06)^n = n \log (1.06) = \log (1.5)$$

$$n = \frac{\log (1.5)}{\log (1.06)} = \frac{0.1761}{0.0253} = 6.96$$

En consecuencia, le lleva casi 7 años a la inversión incrementar su valor a \$150. ☛ **24**

☛ **24.** En el ejemplo 2, encuentre el valor de n utilizando logaritmos naturales en vez de logaritmos comunes.

Respuesta

$$n = \frac{\ln (1.5)}{\ln (1.06)} = \frac{0.4055}{0.05827} = 6.959$$

Estos dos ejemplos nos han conducido a una ecuación del tipo

$$a^x = b$$

en donde a y b son dos constantes positivas y x es la incógnita. Tal ecuación siempre puede resolverse tomando logaritmos en ambos lados.

$$\log (a^x) = x \log a = \log b \qquad \text{de modo que} \qquad x = \frac{\log b}{\log a}$$ ☛ **25**

☛ **25.** Resuelva para x:
a) $2^x = 5$ *b*) $5^x = 2(3^x)$

Respuesta *a*) $x = \frac{\log 5}{\log 2} = 2.322$
b) $x = \frac{\log 2}{\log 5 - \log 3} = 1.357$

En principio, no hay diferencia entre problemas en que intervienen funciones exponenciales crecientes ($a > 1$) y aquellos con exponenciales decrecientes ($a < 1$). El siguiente ejemplo trata de una función exponencial que decrece.

EJEMPLO 3 ***(Bebidas y conducción de automóviles)*** Poco después de consumir una dosis sustancial de whisky, el nivel de alcohol en la sangre de una persona sube a un nivel de 0.3 miligramos por mililitro (mg/ml). De ahí en adelante, este nivel decrece de acuerdo con la fórmula $(0.3)(0.5)^t$, en donde t es el tiempo medido en horas a partir del instante en que se alcanza el nivel más alto. ¿Cuánto tendrá que esperar esa persona para que pueda conducir legalmente su automóvil? (En su localidad, el límite legal es de 0.08 mg/ml de alcohol en la sangre).

Solución Deseamos encontrar el valor de t que satisfaga:

$$(0.3)(0.5)^t = 0.08$$

Esto es,

$$(0.5)^t = \frac{0.08}{0.3} = 0.267$$

Tomando logaritmos, obtenemos

$$\log (0.5)^t = t \log (0.5) = \log (0.267)$$

de modo que

$$t = \frac{\log (0.267)}{\log (0.5)} = \frac{(-0.5735)}{(-0.3010)} \quad \text{(de la tabla A.3.1)}$$
$$= 1.91$$

☛ **26.** En el ejemplo 3, si el límite legal fuera 0.05 en vez de 0.08, ¿cuánto tiempo tardaría en estar legalmente apto para conducir?

Por tanto, le lleva 1.91 horas alcanzar la aptitud legal para conducir. ☛ **26**

En el ejemplo 9 de la sección 6-1 mostramos cómo calcular una tasa efectiva anual dada la tasa nominal. Si deseamos dar el paso de regreso, para composición continua, necesitamos logaritmos.

EJEMPLO 4 ***(Inversión)*** Cuando la composición se hace de manera continua, ¿qué tasa nominal de interés da el mismo crecimiento en un año completo que una tasa de interés anual del 10%?

Solución Una suma P invertida a una tasa nominal de interés de R por ciento compuesto continuamente tiene un valor Pe^i después de un año, con $i = R/100$. (Tome $x = 1$ en la fórmula para composición continua). Si se invierte al 10% anual, aumentaría por un factor de 1.1 durante cada año. Por tanto, debemos hacer

$$Pe^i = (1.1)P \text{ o } e^i = 1.1$$

Si tomamos logaritmos naturales en ambos miembros, obtenemos

$$\ln(e^i) = \ln(1.1)$$

Pero, $\ln(e^x) = x$, para cualquier número real x, de modo que

$$i = \ln(1.1) = 0.0953$$

Por tanto, $R = 100i = 9.53$.

De modo que 10% de interés compuesto anualmente es equivalente al crecimiento anual proporcionado por medio de una tasa de interés nominal de 9.53% compuesto continuamente. ☛ **27**

Respuesta $= \dfrac{\log (0.05 \div 0.3)}{\log (0.5)}$

$= \dfrac{-0.7782}{-0.3010} = 2.58$ horas

Las fórmulas siguientes resumen los procedimientos para intercambiar entre tasas efectiva y anual para composición continua.

Nominal a efectiva:	$i_{ef} = e^i - 1,$	$i = \dfrac{R_{nom}}{100}$
Efectiva a nominal:	$i = \ln(1 + i_{ef}),$	$i_{ef} = \dfrac{R_{ef}}{100}$

☛ **27.** Si la tasa efectiva es 15%, ¿cuál es la tasa nominal si la composición es continua?

Respuesta $100 \ln(1.15) = 13.98\%$

Cambio de base

Cualquier función exponencial puede escribirse en términos de una función exponencial natural. Sea $y = a^x$. Entonces, ya que podemos escribir $a = e^{\ln a}$, se sigue que

$$y = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

Así, tenemos:

Fórmula de cambio de base para exponenciales

$$a^x = e^{kx} \quad \text{donde} \quad k = \ln a$$

Así, cualquier función exponencial $y = a^x$ puede escribirse en la forma equivalente $y = e^{kx}$, con $k = \ln a$.

EJEMPLO 5 En el ejemplo 3, el nivel de alcohol en la sangre de la persona al instante t fue dado por la fórmula $(0.3)(0.5)^t$ mg/ml. Podemos escribir esto en términos de e,

$$(0.5)^t = e^{kt}$$

en donde

$$k = \ln(0.5) = \ln 5 - \ln 10 = 1.6094 - 2.3026 = -0.69$$

con dos cifras decimales. Por tanto, el nivel de alcohol después de t horas es $(0.3)e^{-(0.69)t}$. ☛ **28**

☛ **28.** Exprese lo siguiente en la forma e^{kt}:
a) 2^t; *b*) 0.2^t; *c*) $(1 + i)^t$

Respuesta *a*) $e^{(0.6931)t}$
b) $e^{-(1.609)t}$; *c*) $e^{[\ln(1+i)]t}$

Es una práctica común escribir cualquier función exponencial creciente a^x en la forma e^{kx}, con $k = \ln a$. Una función exponencial que decrece, definida por a^x con $a < 1$, se escribirá por lo regular como e^{-kx}, en donde k es la constante positiva dada por $k = -\ln a$. La constante k se conoce como la **tasa de crecimiento específica** para la función e^{kx} y como la **tasa de decrecimiento (decaimiento) específica** para la exponencial que decae e^{-kx}.

Cuando hay que resolver una ecuación cuya incógnita está en un exponente y la base es e, en general es más fácil usar logaritmos naturales que logaritmos comunes.

EJEMPLO 6 ***(Crecimiento de una población)*** La población de cierta nación en desarrollo está dada en millones de habitantes por la fórmula

$$P = 15e^{0.02t}$$

en donde t es el tiempo medido en años desde 1970. ¿Cuándo alcanzará la población los 25 millones, suponiendo que esta fórmula mantiene su validez?

Solución Haciendo $P = 25$, obtenemos la ecuación

$$15e^{0.02t} = 25 \quad \text{o bien} \quad e^{0.02t} = \tfrac{25}{15} = 1.667$$

De nuevo, tenemos una ecuación en la cual la incógnita aparece como exponente y podemos despejar t tomando logaritmos en ambos lados. Sin embargo, dado que la exponencial tiene base e, es más fácil tomar logaritmos naturales, puesto que $e^{0.02t} = 1.667$ es lo mismo que $0.02t = \ln 1.667$. En consecuencia

$$t = \frac{\ln 1.667}{0.02} = \frac{0.5108}{0.02} = 25.5$$

Por tanto, la población tarda 25.5 años en alcanzar los 25 millones, lo que ocurrirá a mediados de 1995.

Es posible expresar logaritmos con respecto a una base en términos de logaritmos con respecto a cualquier otra base. Esto se realiza por medio de la **fórmula de cambio de base**, la cual afirma que

Fórmula de cambio de base para logaritmos

$$\log_a y = \frac{\log_b y}{\log_b a}$$

Antes de probarla, ilustrémosla examinado dos importantes casos especiales. En primer término, sea $b = e$, de modo que $\log_b y = \ln y$ y $\log_b a = \ln a$. Entonces, tenemos:

$$\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$$

Concluyendo, *el logaritmo de* y *con base* a *es igual al logaritmo natural de* y *dividido entre el logaritmo natural de* a.

Segundo, haciendo $b = 10$, de modo que $\log_b y = \log y$ y $\log_b a = \log a$. Así:

$$\log_a y = \frac{\log y}{\log a}$$

que expresa $\log_a y$ como el cociente de los logaritmos comunes de y y a.

EJEMPLO 7 Si $a = 2$, tenemos lo siguiente:

$$\log_2 y = \frac{\ln y}{\ln 2} = \frac{\ln y}{0.6931}$$

☛ **29.** Exprese lo siguiente en términos de logaritmos naturales: *a*) $\log_2 e$ *b*) $\log_5 6$

Por ejemplo,

$$\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{1.0986}{0.6931} = 1.5850 \quad ☛ \mathbf{29}$$

De manera alterna, podemos utilizar logaritmos comunes:

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0.4771}{0.3010} = 1.5850$$

Ahora bien, sea $y = b$ en la fórmula de cambio de base. Entonces el numerador del lado derecho se transforma en $\log_b b$, que es igual a 1. Por tanto, obtenemos los resultados siguientes:

$$\boxed{\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \qquad (\log_a b)(\log_b a) = 1}$$

EJEMPLO 8 Si $b = 10$, tenemos

$$\log_a 10 = \frac{1}{\log a}$$

Por ejemplo,

$$\log_2 10 = \frac{1}{\log 2} = \frac{1}{0.3010} = 3.3219$$

$$\log_3 10 = \frac{1}{\log 3} = \frac{1}{0.4771} = 2.0959$$

$$\ln 10 = \log_e 10 = \frac{1}{\log e}$$

Hasta cuatro cifras decimales, los valores de estos dos logaritmos son

$$\log e = \log(2.7183) = 0.4343 \qquad \text{y} \qquad \ln 10 = 2.3026$$

Cada uno de ellos es recíproco del otro.

La fórmula del cambio de base nos permite relacionar un logaritmo de una base general a con un logaritmo común. En particular, tomando $a = e$, podemos expresar el logaritmo natural en términos del logaritmo común:

$$\log_e y = \frac{\log y}{\log e} = \frac{\log y}{0.4343}$$

En consecuencia

$$\boxed{\ln y = 2.3026 \log y}$$

Respuesta *a*) $\frac{1}{\ln 2}$ *b*) $\frac{\ln 6}{\ln 5}$

Así, con el propósito de encontrar el logaritmo natural de y, podemos determinar el logaritmo común de y y multiplicarlo por 2.3026. Sin embargo, este método de calcular el logaritmo natural de un número no es muy conveniente, cuando se compara con el uso de una tabla adecuada. Sin embargo, la relación entre los dos logaritmos es de importancia teórica.

EJEMPLO 9 Con base en la tabla A.3.1, encontramos que $\log 2 = 0.3010$, de modo que $\log 0.2 = 0.3010 - 1 = -0.6990$. Los logaritmos naturales de 2 y 0.2 son, por tanto,

$$\ln 2 = 2.3026 \log 2 = (2.3026)(0.3010) = 0.6931$$

y también

$$\ln 0.\ 2 = 2.3026 \log 0.2 = (2.3026)\ (-0.6990) = -1.6095$$

No es difícil demostrar la fórmula del cambio de base para logaritmos. Empezamos con las dos proposiciones equivalentes

$$y = a^x \quad \text{y} \quad x = \log_a y$$

De manera similar, si $a = b^c$, $c = \log_b a$. Pero entonces

$$y = a^x = (b^c)^x = b^{cx}$$

y de esto se sigue que $cx = \log_b y$. Por tanto, sustituyendo c y x, obtenemos la fórmula requerido, $\log_a y = \log_b y/\log_b a$ también requerida.

$$\log_b y = cx = (\log_b a)(\log_a y)$$

o, $\log_a y = \log_b y/\log_b a$ también requerida.

El modelo logístico

Anteriormente, cuando analizamos el crecimiento de poblaciones, mencionamos que una función de crecimiento exponencial puede utilizarse para crecimiento de poblaciones sin restricción de sus medios ambientes. Sin embargo, cuando el hábitat impone limitaciones sobre el crecimiento, el crecimiento exponencial no continúa de manera indefinida, y eventualmente el tamaño de la población se nivela. La función que se utiliza con mayor frecuencia para modelar un crecimiento restringido de esta clase se denomina **modelo logístico**. Tiene como base la ecuación siguiente para el tamaño de la población.

$$y = \frac{y_m}{1 + Ce^{-kt}} \tag{1}$$

Aquí y es el tamaño de la población en el instante t y y_m, C y k son tres constantes positivas.

Una gráfica común de y contra t para esta función logística se muestra en la figura 8. Observemos que cuando t se vuelve muy grande, e^{-kt} se hace muy pequeña, de modo el denominador en la ecuación (1) se hace cada vez más cercano a 1.

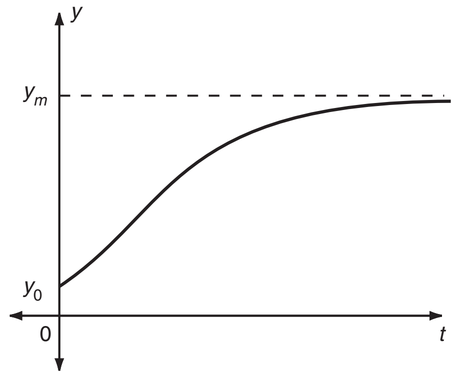


FIGURA 8

Por tanto, y se hace más próxima a y_m cuando t se vuelve muy grande. Esto es evidente de la gráfica en la figura 8, la cual se nivela y aproxima a la recta horizontal $y = y_m$ cuando t se hace grande.

Si el valor inicial y_0 de y es mucho más pequeño que el eventual valor de y_m, entonces el tamaño de la población muestra un periodo de crecimiento para valores pequeños de t que es aproximadamente exponencial. Sin embargo, eventualmente, el crecimiento disminuye y al final se nivela, aproximándose a y_m cuando t se hace muy grande. Este nivel final y_m representa el tamaño máximo que la población puede sustentarse del medio ambiente.

EJEMPLO 10 ***(Crecimiento logístico poblacional)*** Cierta población crece de acuerdo con la ecuación logística, con constantes $y_m = 275$ millones, $C = 54$ y $k = (\ln 12)/100$. La variable t se mide en años. ¿Cuál es el tamaño de la población cuando $t = 0$, 100 y 200?

Solución Cuando $t = 0$, el tamaño es

$$y_0 = \frac{y_m}{1 + Ce^0} = \frac{275}{1 + 54} = 5 \qquad \text{(millones)}$$

Sustituimos $t = 100$ en la ecuación (1).

$$y = \frac{y_m}{1 + Ce^{-k(100)}}$$

Ahora $100k = \ln 12$, de modo que

$$e^{-100k} = e^{-\ln 12} = e^{\ln(1/12)} = \tfrac{1}{12}$$

Por tanto,

$$y = \frac{275}{1 + 54(\frac{1}{12})} = \frac{275}{1 + (\frac{9}{2})} = 50 \qquad \text{(millones)}$$

Cuando $t = 200$,

$$y = \frac{y_m}{1 + Ce^{-k(200)}} = \frac{y_m}{1 + C(e^{-100k})^2}$$

$$= \frac{275}{1 + 54(\frac{1}{12})^2} = \frac{275}{1 + (\frac{3}{8})} = 200 \qquad \text{(millones)}$$

(Este ejemplo proporciona una aplicación aproximada de la ecuación logística a la población de Estados Unidos en los años 1777 ($t = 0$) a 1977 ($t = 200$). Para este ejemplo, el tamaño eventual de la población es 275 millones).

La ecuación logística se utiliza en muchas situaciones diferentes a las del crecimiento de poblaciones. Las características esenciales de la función logística son que para valores pequeños de t, se parece a una función exponencial, mientras que para valores grandes de t, se nivela y aproxima cada vez más a cierto valor límite. Estas características acontecen en varios fenómenos y explica el amplio uso de esta función.

Un ejemplo es la difusión de información en una población. Por ejemplo, la información podría ser una noticia, un rumor, o el conocimiento acerca de algún nuevo producto que se ha lanzado recientemente al mercado. Si p representa la proporción de la población que está al corriente de la información, entonces para valores pequeños de t, p es pequeña y crece comúnmente de una manera exponencial. Sin embargo, p no puede exceder a 1, y cuando t se hace más grande, p se hace más cercana a este valor conforme la información se difunde en toda la población. Utilizando la ecuación logística, modelaríamos a p por medio de la expresión

$$p = \frac{1}{1 + Ce^{-kt}}$$

EJEMPLO 11 ***(Difusión de información)*** En $t = 0$, 10% de los corredores de bolsa han escuchado acerca del inminente colapso financiero de una gran aerolínea. Dos horas más tarde, 25% han escuchado tal información. ¿Cuánto tiempo pasará antes de que el 75% la haya escuchado?

Solución Si $t = 0$, determinamos que

$$p = \frac{1}{1 + Ce^{-k(0)}} = \frac{1}{1 + C} = 0.1$$

Por tanto, $1 + C = 10$ o $C = 9$. Ahora, cuando $t = 2$, tenemos

$$p = \frac{1}{1 + Ce^{-k(2)}} = \frac{1}{1 + 9e^{-2k}} = 0.25$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} 1 + 9e^{-2k} &= 4 \\ 9e^{-2k} &= 3 \\ e^{-2k} &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Tomando logaritmos naturales de ambos miembros, encontramos que

$$-2k = \ln\left(\tfrac{1}{3}\right) = -\ln 3 \quad \text{y así} \quad k = \tfrac{1}{2}\ln 3$$

Al encontrar los valores de k y C, conocemos la forma precisa de p como una función de t. Deseamos calcular el valor de t en el que $p = 0.75$.

$$p = \frac{1}{1 + 9e^{-kt}} = 0.75 = \tfrac{3}{4}$$

$$1 + 9e^{-kt} = \tfrac{4}{3}$$

$$9e^{-kt} = \tfrac{1}{3}$$

$$e^{-kt} = \tfrac{1}{27}$$

Otra vez, tomando logaritmos naturales de ambos lados, obtenemos

$$-kt = \ln\left(\tfrac{1}{27}\right) = -\ln 27$$

y así

$$t = \frac{\ln 27}{k} = \frac{\ln 27}{\frac{1}{2}\ln 3} = \frac{2\ln(3^3)}{\ln 3} = \frac{6\ln 3}{\ln 3} = 6$$

Por lo que pasan 6 horas antes de que el 75% de los corredores de bolsa hayan escuchado acerca del colapso de la aerolínea.

EJERCICIOS 6-4

(1-10) Resuelva las siguientes ecuaciones para x.

1. $10^x = 25$

2. $2^x = 25$

3. $3^x 2^{3x} = 4$

4. $3^x 2^{1-x} = 10$

5. $3^x = 2^{2-x}$

6. $(3^x)^2 = 2\sqrt{2^x}$

7. $(2^x)^x = 25$

8. $(2^x)^x = 3^x$

9. $a^x = cb^x$

10. $(a^x)^2 = b^{x+1}$

11. *(Crecimiento de la población)* La población del planeta en 1976 era de 4 mil millones y estaba creciendo a un 2% anual. Si esta tasa de crecimiento sigue vigente, ¿cuándo alcanzará la población los 10 mil millones?

12. *(Crecimiento de una población)* La población de China en 1970 era de 750 millones y está creciendo a un 4% al año. ¿Cuándo alcanzará esta población los 2 mil millones, suponiendo que continúe la misma tasa de crecimiento? (La tasa de crecimiento actual es bastante menor).

13. *(Crecimiento de una población)* Con los datos de los ejercicios 11 y 12, calcule cuándo la población de China será igual a la mitad de la población de la Tierra.

14. *(Crecimiento de utilidades)* Las utilidades de una compañía han crecido a un promedio del 12% anual entre 1980 y 1985 y en este último año alcanzaron el nivel de \$5.2 millones. Suponiendo que la tasa de crecimiento continúa, ¿cuánto tendrán que esperar antes de alcanzar los \$8 millones por año?

15. *(Circulación de periódicos)* Dos periódicos que compiten tienen circulaciones de 1 millón y 2 millones, respectivamente. Si el primero aumenta su circulación en 2% al mes, mientras que la circulación del segundo decrece en 1% al mes, calcule cuánto deberá transcurrir antes de que las circulaciones sean iguales.

(16-17) *(Interés compuesto)* Suponga que se invierten \$1000 a un interés compuesto anual del 8%.

16. ¿Cuánto le llevará incrementarse a \$1500?

17. ¿Cuánto tardará en multiplicarse a \$3000?

18. *(Interés compuesto)* La regla práctica siguiente a menudo se emplea en finanzas: si la tasa de interés es el R por ciento anual, entonces el número de años, n, que la inversión tarda en duplicarse se obtiene dividiendo 70 entre R (es decir, $n = 70/R$). Calcule *n exactamente* para los valores siguientes de R: 4, 8, 12, 16 y 20. Compare sus respuestas con aquellas obtenidas por la fórmula $n = 70/R$ y estime la precisión de la regla práctica.

(19-22) Utilice la fórmula de cambio de base para demostrar lo siguiente.

19. $(\log_b a)(\log_c b)(\log_a c) = 1$

20. $(\log_b a)(\log_c b)(\log_d c) = \log_d a$

21. $\ln x = (\log x)(\ln 10)$

22. $(\ln 10)(\log e) = 1$

(23-26) Exprese las funciones siguientes en la forma $y = ae^{kt}$.

23. $y = 2^t$

24. $y = (1000)2^{t/3}$

25. $y = 5(1.04)^t$

26. $y = 6 \times 1^{08}\,(1.05)^t$

27. *(Crecimiento de la población)* La población actual de Asia es de 4 mil millones y crece a una tasa del 2% anual. Exprese la población y al tiempo t (en años) a partir de este momento en la forma $y = ae^{kt}$.

28. *(Depreciación)* Una compañía adquiere una máquina en \$10,000. Cada año el valor de la máquina decrece en un 20%. Exprese el valor en la forma be^{kt}, en donde b y k son constantes y el tiempo $t = 0$ corresponde a la fecha de adquisición.

29. *(Aumento en el I.P.C.)* Entre enero de 1975 y enero de 1980, el índice de precios al consumidor I pasó de 121 a 196.

a) Calcule el incremento porcentual promedio por año durante este periodo.

b) Exprese I en la forma be^{kt}, con $t = 0$ correspondiente a enero de 1975.

c) Suponiendo que esta tasa de crecimiento continúa, determine cuándo I alcanzará 250.

30. *(Crecimiento de una población)* Una población crece de acuerdo con la fórmula

$$P = 5 \times 10^6 e^{0.06t}$$

en donde t se da en años. Calcule el porcentaje de crecimiento anual. ¿Cuánto tardará la población en incrementarse en un 50%?

31. *(Crecimiento de una población)* Una población tiene un tamaño dado por la fórmula

$$P = P_0 e^{kt}$$

Encuentre una expresión para el porcentaje de crecimiento por unidad de tiempo y para el intervalo de tiempo que la población tarda en duplicar su tamaño y también triplicarlo.

32. *(Crecimiento en ventas)* El volumen de ventas de cierto producto está creciendo 12% anualmente. Si el volumen actual es de 500 unidades diarias, ¿en cuánto tiempo se alcanzará la cifra de 800 diarias?

33. *(Frecuencia publicitaria)* El volumen de ventas de una marca de detergente disminuye después de una campaña publicitaria de acuerdo con la fórmula $V(t) = 750(1.3)^{-t}$, donde t es el tiempo en meses. La siguiente campaña está planeada para cuando el volumen de ventas haya caído a dos tercios de su valor inicial. ¿Cuánto tiempo debe pasar entre dos campañas sucesivas?

(34-36) Calcule la tasa nominal de interés que compuesta continuamente es equivalente a:

34. 8% de interés anual.

35. 12% de interés anual.

36. 15% de interés anual.

37. *(Precio de acciones)* Se observó que la razón de aumento de precio de cierta acción cambió entre el principio de 1982 y 1987 de acuerdo con la fórmula $R = 4(1.2)^t$, donde t es el tiempo en años a partir de 1982. ¿Cuál era el valor de la razón en 1987 ($t = 5$)? Suponiendo que se mantiene el incremento, ¿cuándo alcanzara la razón el valor 20?

(38-39) *(Radiactividad)* Muchos isótopos de elementos químicos son inestables y cambian espontáneamente en otros isótopos; este decaimiento se llama *radiactividad* y generalmente está acompañada por la emisión de uno de los tres tipos de radiación llamados rayos α, β o γ. Si una muestra contiene originalmente una cantidad y_0 de un isótopo radiactivo, después de un tiempo t contendrá una cantidad $y = y_0 e^{-kt}$, donde k es la constante de decaimiento.

38. La constante de decaimiento del C^{14} (carbono-14) es de 1.24×10^{-4} cuando t está medido en años.

a) Calcule el porcentaje de la muestra original que permanece después de 2000 años *y* después de 10,000 años.

b) Calcule el número de años necesarios para que decaiga la mitad de la muestra (esto se llama la *vida media* del isótopo).

39. La vida media del radio es de 1590 años (véase el ejercicio 38). Calcule su constante de decaimiento. Si se dejan 10 gramos de radio, ¿cuánto quedará despúes de 1000 años?

40. *(Población de bacterias)* La población de bacterias en el estómago de una persona que ha ingerido comida infectada, se expande por división celular duplicándose cada 20 minutos. Si había 1000 bacterias inicialmente, expresar el tamaño de la población después de t minutos utilizando la fórmula $y = a \cdot 2^{bt}$ y determine las constantes a y b. ¿A los cuántos minutos habrá 10,000 bacterias?

41. *(Magnitudes estelares)* La magnitud M de una estrella o planeta está definida por $M = -(\frac{5}{2}) \log (B/B_o)$ donde B es la brillantez y B_o es una constante. El planeta Venus tiene una magnitud promedio de -3.9 y la estrella Polar, de 2.1. En promedio, ¿cuántas veces es Venus más brillante que la estrella Polar?

42. *(Escala de Richter)* La magnitud R de un terremoto está definida como $R = \log (A/A_o)$ en la escala de Richter, donde A es la intensidad y A_o es una constante. (A es la amplitud de la vibración de un sismógrafo estándar localizado a 100 kilómetros del epicentro del terremoto). El terremoto de 1964 en Alaska midió 8.5 en la escala de Richter. El mayor terremoto registrado midió 8.9. ¿Cuánto más intenso fue este terremoto que el de Alaska?

43. *(Escala de decibeles)* El volumen L de un sonido está definido en decibeles como $L = 10 \log (I/I_o)$ donde I es la intensidad del sonido (la energía cayendo en una unidad de área por segundo) e I_o es la intensidad de sonido más baja que el oído humano puede oír (llamado umbral auditivo). Una habitación tranquila tiene un nivel sonoro promedio de 35 decibeles. Una conversación en voz alta tiene un ruido de fondo de 65 decibeles. El umbral de dolor ocurre aproximadamente a 140 decibeles. Calcule I/I_o para cada uno de estos tres niveles de sonido.

44. *(Crecimiento de una población)* Cierta población de insectos consiste en dos tipos: T_1 y T_2. Al principo la población era de 90 insectos T_1 y 10 insectos T_2. La población T_1 crece en promedio 1% diario, y la T_2, 4%. ¿Cuándo estará la población dividida en partes iguales entre los dos tipos?

45. *(Crecimiento de una población)* Una población de bacterias duplica su tamaño cada 19 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en incrementarse el número de organismos, de 10^5 a 10^7?

46. *(Radioterapia)* Cuando se someten a tratamiento de radiación las células cancerosas, la proporción de células sobrevivientes al tratamiento está dado por

$$P = e^{-kr}$$

donde r es el nivel de radiación y k una constante. Se ha encontrado que 40% de las células cancerosas sobreviven cuando $r = 500$ Roentgen. ¿Cuál debe ser el nivel de radiación para que sólo sobreviva el 1%?

47. *(Ley de enfriamiento de Newton)* Un cuerpo, a una temperatura T por encima a la del medio que lo rodea, se enfría de acuerdo con la fórmula $T = T_0 e^{-kt}$, en donde T_0 es la diferencia inicial de temperaturas, t es el tiempo y k es una constante. Se encontró que la diferencia de temperaturas descendió a la mitad del valor inicial en 20 minutos. Si al inicio, $T_0 = 60°\text{C}$, ¿cuánto tiempo pasará para que la diferencia de temperaturas disminuya a 10°C?

48. *(Crecimiento de ventas)* Un producto nuevo fue introducido en el mercado en $t = 0$, y a partir de ese momento sus ventas mensuales crecieron de acuerdo con la fórmula

$$S = 4000(1 - e^{-kt})^3$$

Si $S = 2000$ cuando $t = 10$ (esto es, después de 10 meses), determine el valor de k.

49. *(Curva de aprendizaje)* La eficiencia de un individuo para realizar una tarea rutinaria mejora con la práctica. Sea t el tiempo que empleó en el aprendizaje de la tarea y y una medida del rendimiento del individuo. (Por ejemplo, y podría ser el número de veces, por hora, que la tarea puede realizarse). Entonces una función que con frecuencia se utiliza para relacionar y con t es

$$y = A(1 - e^{-kt})$$

donde A y k son constantes. (La gráfica de tal relación entre y y t se denomina **curva de aprendizaje**). Después de una hora de práctica, una persona, en una línea de ensamblado puede apretar 10 tuercas en 5 minutos. Después de 2 horas, la persona puede apretar 15 tuercas en 5 minutos. Determine las constantes A y k. ¿Cuántas tuercas puede apretar la persona después de 4 horas de práctica?

50. *(Modelo logístico)* Una población crece de acuerdo con el modelo logístico, con constantes $y_m = (\frac{124}{3}) \times 107$, $C = \frac{245}{3}$ y $k = \ln (\frac{35}{4})$. Determine el tamaño de la población cuando $t = 0$, 1 y 2.

51. *(Modelo logístico)* El peso de un cultivo de bacterias está dado por

$$y = \frac{2}{1 + 3(2^{-t})}$$

en donde t se mide en horas. ¿Cuál es el peso cuando $t = 0$, 1, 2 y 4?

52. *(Difusión de información)* Se desarrolló una nueva variedad mejorada de arroz. Se determinó que después de t años, la proporción de agricultores de arroz quienes han cambiado a la nueva variedad está dada por medio de un modelo logístico

$$p = (1 + Ce^{-kt})^{-1}$$

En $t = 0$, el 2% de los agricultores están utilizando la nueva variedad. Cuatro años más adelante, el 50% lo está haciendo. Evalúe C y k y calcule cuántos años pasarán antes de que el 90% hayan cambiado a la nueva variedad.

***53.** *(Función de Gompertz)* Otra función que algunas veces se utiliza para describir crecimiento restringido de una población es la función de *Gompertz*

$$y = pe^{-ce^{-kt}}$$

en donde p, c y k son constantes. Demuestre que en $t = 0$, $y = pe^{-c}$ y que conforme t crece, y se aproxima cada vez más al valor p.

REPASO DEL CAPÍTULO 6

Términos, símbolos y conceptos importantes

6.1 Interés compuesto, tasa de interés anual.
Tasas nominal y efectiva de interés.
Composición continua; el número e.
Valor presente.

6.2 Función exponencial, base; $y = a^x$
Gráficas de crecimiento y funciones de decaimiento exponencial.
Función exponencial natural, $y = e^x$ y su gráfica.

6.3 Logaritmo con base a; $\log_a y$
Gráficas de funciones logarítmicas.
Formas equivalentes logarítmicas y exponenciales de una expresión.
Propiedades de los logaritmos.
Logaritmos naturales: $x = \ln y$
Logaritmos comunes: $x = \log y$

6.4 Ecuación exponencial.
Fórmulas para cambio de base para exponenciales y logaritmos.
El modelo logístico.

Fórmulas

Interés compuesto:
Valor después de n periodos $= P(1 + i)^n$.
Para k composiciones por año a tasa nominal $R\%$,
$i = \dfrac{R}{100k}$.

Tasas nominal y efectiva: $1 + i_{\text{ef}} = (1 + i)^k$.

Composición continua; valor después de N años $= Pe^{iN}$; $1 + i_{\text{ef}} = e^i$.

Valor presente; V.P. $= P(1 + i)^{-n}$

$x = \log_a y$ si $y = a^x$

$x = \ln y$ si $y = e^x$

$x = \log y$ si $y = 10^x$

Propiedades de los logaritmos (aquí sólo se formulan para logaritmos naturales):

$$\ln 1 = 0 \qquad \ln e = 1$$

$$\ln(uv) = \ln u + \ln v \qquad \ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v$$

$$\ln\left(\frac{1}{v}\right) = -\ln v \qquad \ln(u^n) = n \ln u$$

$$e^{\ln y} = y \quad \text{para toda } y > 0 \qquad \ln(e^x) = x \quad \text{para toda } x.$$

Fórmulas de cambio de base para exponenciales:

$$a^x = e^{kx}, \text{ donde } k = \ln a.$$

Fórmulas de cambio de base para logaritmos:

$$\log_a y = \frac{\log_b y}{\log_b a} \qquad \log_a y = \frac{\ln y}{\ln a} \qquad \log_a y = \frac{\log y}{\log a}$$

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 6

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) $\log_a 1 = 0$, para todo número real a

b) $e^{\ln}(x) = x$, para todo número real x

c) $\ln(e^x) = x$, para todo número real x

d) Puesto que $(-3)4 = 81$, entonces $\log_{-3} 81 = 4$

e) $\log_2(2 + a) = \log_2(a) + 1$

f) La función a^x representa crecimiento exponencial si $a > 1$ y decaimiento exponencial si $0 < a < 1$

g) La función e^{kx} representa crecimiento exponencial si $k > 0$ y decaimiento exponencial si $k < 0$

h) $\dfrac{\ln a^5}{\ln a^3} = \ln a^2$

i) $\log e = \dfrac{1}{\ln 10}$

j) $2 \log_{a^2} a = 1$

k) Si $\log x > 1$, entonces $x > 10$

l) Si $\ln x < 0$, entonces $x < 0$

m) $\log(1000) - \log(100) = \log(900)$

(2-6) Determine el valor de cada una de las siguientes expresiones. Suponga que x representa un valor positivo y distinto de 1. No utilice una calculadora.

2. $\log_{\sqrt{x}} x$

3. $\ln e^8$

4. $\log_{1/2} 8$

5. $\log_5 \sqrt[3]{25}$

6. $\log_x \dfrac{1}{x^2}$

(7-12) Si $\log_6 4 = x$, determine las siguientes expresiones en términos de x.

7. $\log_6 2$

8. $\log_6 12$

9. $\log_6 \sqrt{108}$

***10.** $\log_3 12$

11. $\log_{12} 36$

***12.** $\log_2 \sqrt{18}$

(13-22) Resuelva las siguientes ecuaciones. (Aproxime sus respuestas al milésimo más cercano).

13. $3^{x+1} = 7$

14. $5^{y+2} = 3^{2y+1}$

15. $e^{x2-x-2} = 1$

16. $\log_2 4 + \log_2 x = 6$

17. $\log_3 27 - \log_3 x - \log^3(x + 2) = 2$

18. $\log(6x - 8) = 1 - \log(\sqrt{x})$

19. $\dfrac{1}{2}\log_7(x) = \log_7(x - 2)$

***20.** $\log_2(x) + \log_2(x + 1) = \log_2(15 - x)$

***21.** $11^{2x} = 121^{3x+1}$

22. $3^{1+x^2} = 9$

***23.** Si $\ln(x - y) = \ln x - \ln y$, escriba a y en términos de x.

***24.** Demuestre que

$$a^{\ln(b/c)} \cdot b^{\ln(c/a)} = c^{\ln(b/a)}$$

***25.** Demuestre que si $\ln\left(\dfrac{a + b}{2}\right) = \dfrac{1}{2}[\ln(a) + \ln(b)]$, entonces $a = b$

26. Sin utilizar una calculadora o tablas, demuestre que

$$\frac{\log\sqrt{8} + \log 27 + \log\sqrt{125}}{\log 90} = \frac{3}{2}$$

(27-34) Determine los dominios de las siguientes funciones.

27. $f(x) = \dfrac{ex}{1-e^x}$

28. $f(x) = \sqrt{e^{-x2}}$

29. $f(x) = \log(1 + x^2)$

30. $f(x) = \ln(4 - x^2)$

31. $f(x) = \ln|4 - x^2|$

32. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \log x}$

33. $f(x) = \sqrt{1 - 10^x}$

34. $f(x) = \sqrt{ex - 1}$

(35-38) Haga un bosquejo de las gráficas de las siguientes funciones.

35. $f(x) = \log(x - 2)$

36. $f(x) = 3 - \ln x$

37. $f(x) = |\log x|$

38. $f(x) = \log|x|$

39. *(Interés compuesto)* Una cantidad P_0 se compone de manera continua a una tasa nominal de interés anual de 6%. Determine el tiempo necesario para que la inversión duplique su valor, es decir, ¿en cuánto tiempo la inversión tendrá un valor de $2P_0$. Proporcione su respuesta al centésimo más cercano.

40. *(Interés compuesto)* Con respecto al problema anterior. Determine el tiempo necesario para que la inversión.

a) triplique su valor;

b) cuatriplique su valor.

41. *(Interés compuesto)* Si una inversión a una tasa nominal de interés anual de r%, compuesta continuamente, duplica su valor en 10 años, ¿cuál es el valor de r?

42. *(Depreciación exponencial)* Un equipo de cómputo se compra en $15,000 y se deprecia de manera continua desde la fecha de compra. Su valor al cabo de t años está dado por la fórmula

$$V(t) = 15{,}000e^{-0.15t}$$

a) Determine el valor del equipo de cómputo después de 12 años.

b) Determine la disminución porcentual del valor cada año.

c) Al cabo de cuánto tiempo el valor del equipo se reduce a la mitad del valor original.

43. *(Inversiones)* Cierta cantidad se invirtió a una tasa de interés mensual de 1.1% compuesta mensualmente. Después de t_1 meses la inversión tiene un valor de \$10,565.4, y al cabo de t_2 meses asciende a \$12,460.8. Determine $t_2 - t_1$.

44. *(Biología)* Unos científicos encontraron que el tamaño de cierto insecto se puede determinar mediante la siguiente fórmula:

$$L(t) = 12(1 - e^{-0.023t})$$

donde L es la longitud, en centímetros, de un insecto con t días de vida.

a) Determine la longitud de un insecto que tiene 25 días.

b) Si un insecto tiene una longitud de 6 centímetros, ¿cuántos días tiene?

c) Según estos científicos, ¿cuál es el mayor tamaño que puede tener la clase de insecto que estudian?

***45.** *(Bienes raíces)* Un desarrollador de bienes raíces posee una propiedad que podría vender de inmediato por \$350,000. Por otro lado, si la conserva durante 4 años y la urbaniza, gastaría \$150,000. Entonces la vendería en \$700,000. Suponga que el costo de urbanización sería gastado de un fondo al final de 2 años y debe pedirse prestado de un banco al 11% de interés anual. Si la tasa de descuento es de 10%, calcule el valor presente de esta segunda alternativa y con base en ella decida, de estas dos alternativas, cuál representa la mejor estrategia para el desarrollador.

46. *(Interés compuesto)* Gabriela García deposita \$20,000 a una tasa de interés nominal del 15% anual. ¿Cuál será el valor de la inversión 3 años después, si se capitaliza:

a) anualmente?

b) trimestralmente?

c) mensualmente?

d) continuamente?

47. *(Tasa efectiva)* Demuestre que si una cantidad se invierte a una tasa nominal de R% anual compuesta k veces en un año, entonces la tasa efectiva es r% anual, en donde

$$r = \left[\left(1 + \frac{R}{100k}\right)k\right](100)$$

48. *(Tasa efectiva)* Demuestre que si una cantidad se invierte a una tasa nominal de R% anual compuesta continuamente, entonces la tasa efectiva es r% anual, en donde

$$r = 100(e^{R/100} - 1)$$

49. Determine la tasa de interés anual efectiva correspondiente a una tasa nominal de 12% compuesta:

a) ¿semestralmente?

b) ¿trimestralmente?

c) ¿mensualmente?

d) ¿continuamente?

50. Repita el ejercicio 49, si la tasa nominal es de 5%.

51. Determine la tasa de interés nominal que corresponde a una tasa efectiva de 7.6%, cuando la capitalización se realiza:

a) ¿semestralmente?

b) ¿trimestralmente?

c) ¿mensualmente?

d) ¿continuamente?

52. Se dice que Peter Minuit, en 1626, compró la isla de Manhattan por 60 florines: unos 24 dólares. Suponga que los indios americanos hubiera depositado los \$24 en el banco a una tasa de 7% de interés compuesto anualmente. ¿Cuál sería el valor de ese depósito en el año 2010?

53. Con respecto al problema anterior, ¿cuál sería el valor de esos \$24 dólares en el año 2010, si la composición fuera continua?

54. *(Inversiones)* Esteban Martínez acaba de recibir una herencia. Gran parte de ella la depositará en una cuenta bancaria. En el banco *A* su depósito devengaría una tasa de interés de 11.30% anual capitalizable semestralmente mientras que en el banco *B* la tasa de interés es de 11.15% anual capitalizable mensualmente. Con el propósito de obtener la mejor tasa de interés, ¿dónde le recomendaría depositar su dinero a Esteban?

55. (*Crecimiento del PNB)* La población de cierta nación en desarrollo crece al 2.5% anual. ¿Cuánto tiene que incrementarse anualmente el PNB, si el ingreso per cápita debe duplicarse en 15 años?

56. *(Crecimiento del PNB)* El PNB de la nación *A* se incrementa de \$1.5 mil millones a \$2.2 mil millones entre 1990 y 2000.

a) Calcule el porcentaje de crecimiento promedio anual.

b) Exprese el PNB en el instante t en la forma ae^{kt}.

c) Suponiendo que esta tasa de crecimiento continua, determine cuándo el PNB alcanzará \$3.1 mil millones. (Redondee al año más cercano)

***57.** *(Crecimiento de la población)* La población mundial al inicio de 1976 era de 4 mil millones; mientras que en 1950 era de 2.659 mil millones. Suponiendo que la tasa de crecimiento fuese constante y que no se modifica en los siguientes años, ¿cuál sería la población mundial en el año 2010? Proporcione su respuesta al millón más cercano.

***58.** *(Difusión de un rumor)* En el instante $t = 0$ días, el porcentaje de cierta población que conoce un rumor es 5%, cinco días después 30% han escuchado el rumor. ¿Cuánto tiempo pasará antes de que el 80% de esa población esté enterada del rumor? Proporcione su respuesta al entero más cercano.

59. La constante de decaimiento del C^{14} es de 1.21×10^{-4}, cuando t se mide en años. (Vea el caso de estudio al inicio y final de este capítulo).

Calcule el porcentaje de la muestra original que permanece después de 10,000 años y después de 25,000 años.

60. La vida media del cesio 137 Cs^{137} es de 30.22 años (véase el ejercicio 59); mientras que la del estroncio 90 es de 28.8 años Sr^{90}. Ambos elementos radiactivos fueron liberados en el reactor nuclear de Chernobyl en abril de 1986. ¿En qué año la cantidad de Cs^{137} será igual a 1% de la cantidad que fue liberada? ¿En qué año la cantidad de Sr^{90} será igual a 1% de la cantidad que fue liberada? Proporcione su respuesta al entero más cercano.

CASO DE ESTUDIO

ANTIGÜEDAD DE LOS FÓSILES

Como se mencionó al inicio del capítulo, un método conocido para fechar restos fósiles es el método del carbono 14 (C^{14}). En los problemas 38 y 39 de la sección 6.4 se comentó que si una muestra contenía originalmente una cantidad y_0 de un isótopo radiactivo, al cabo de un tiempo t contendrá una cantidad $y(t) = y_0e^{-kt}$, donde k es la constante de decaimiento. Para el C^{14} está constante es aproximadamente igual a 0.000121, y en donde t está medido en años. Pero, cómo se obtiene esta constante de decaimiento. Una forma es medir con mucha precisión la cantidad de sustancia radiactiva al inicio y al final de un periodo. Esta labor la han realizado en diferentes años, a partir de 1940, cuando se descubrió este isótopo radiactivo.

Por ejemplo, si una muestra de un fósil contiene 1 gramo de C^{14} y al cabo de 20 años se reduce a 0.997583 gramos, entonces como $y(t) = y_0e^{-kt}$. Si en la expresión anterior se despeja k, se obtiene

$$k = -\frac{1}{t}\ln\left(\frac{y(t)}{y_0}\right)$$

Puesto que se tiene $t = 20$ años, y $y_0 = 1$ gramo, entonces al sustituir estos valores se llega a

$$k = -\frac{1}{20}\ln\left(\frac{0.997583}{1}\right)$$

con lo que se obtiene $k \approx 0.000121$

Así que, si un científico descubre un hueso fósil y se determina que tiene un dieciseisavo del C^{14} que tenía cuando vivía, ¿cuál es la antigüedad de dicho fósil?

Puesto que para el caso del C^{14} se tiene que:

$$y(t) = y_0e^{-0.000121t}$$

y se determinó que $y(t) = \frac{y_0}{16}$, entonces,

$$\frac{y_0}{16} = y_0e^{-0.000121t}$$

por lo que despejando t, se tiene

$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{16}\right)}{-0.000121} \approx 22{,}914 \text{ años}$$

a) Si el fósil tuviera un décimo del contenido original de C^{14}, ¿cuál sería su antigüedad?

b) Un egiptólogo determinó que la momia de un faraón egipcio era de la época de Moisés. Un estudio posterior de carbono 14 dió como resultado que la momia del faraón egipcio, contenía 5/16 del C^{14} que tenía el faraón antes de morir. ¿Existe evidencia basada en la prueba del C^{14} para sostener la afirmación inicial del egiptólogo?

CAPÍTULO 7

Progresiones y matemáticas financieras

¿CÓMO SALVAR EL HONOR DEL ABUELO?

La semana pasada ayudaba a mi abuela a asear su ropero. Ahí olvidado, encontré un libro que mi abuelo no devolvió a la biblioteca de la universidad, ¡desde hacía 45 años!

Al final del libro estaba impreso el reglamento, ya poco legible, pero parece que decía algo así:

1. Por cada mes de retraso se cobrará una multa de cinco centavos.
2. La multa causará 1% de interés convertible mensualmente.

Con la intención de salvar el buen nombre del abuelo, mi abuela y yo nos dispusimos a calcular el monto de la multa para pagarla y devolver el libro a la universidad. Después de razonar un poco, decidimos calcular primero cuánto se tenía que pagar por los primeros 5 centavos. Así, por los **primeros 5 centavos** se debe pagar:

Al final del primer mes \$0.05, puesto que así lo indica el reglamento.

Al final del segundo mes, se debe pagar los \$0.05 más 1% de interés por ellos, esto es, $1.01 \times 0.05 = \$0.0505$

Al final del tercer mes, $1.01^2 \times 0.05 = \$0.051005$

Al final del cuarto mes, $1.01^3 \times 0.05 \approx \$0.051515050$

Al observar los resultados anteriores exclamé.

¡Esto lo podemos generalizar!

Es decir, al final del mes k, por los primeros 5 centavos se debe pagar la cantidad de

$$1.01^{k-1} \times 0.05 \text{ pesos.}$$

Así que por los primeros 5 centavos, después de $45 \times 12 = 540$ meses, se debe pagar:

$$1.01^{540-1} \times .05 \approx \$10.67$$

Me puse muy contento y me disponía a devolver el libro y pagar la deuda; pero mi abuela me detuvo, para decirme que sólo era la parte que correspondía a la deuda de los primeros cinco centavos. Además, me mostró nuevamente el libro y con una lupa pudimos ver que el interés parecía que no era de 1%, sino un número que podría ser 2 o 5. (Responda las preguntas siguientes, pero antes de hacerlo haga una estimación de las respuestas, y compare sus estimaciones con los resultados obtenidos mediante una calculadora). Al final del capítulo se calculará la deuda total.

i. ¿Cuál es la deuda por los primeros \$0.05 si el interés es de 2%?

ii. ¿Cuál es la deuda por los primeros \$0.05 si el interés es de 5%?

TEMARIO

Una **sucesión** es una lista ordenada de números. Por ejemplo,

$$2, 5, 8, 11, 14, \ldots \quad (1)$$

$$3, 6, 12, 24, 48, \ldots \quad (2)$$

son ejemplos de sucesiones. En la sucesión (1), el **primer término** es 2, el **segundo término** es 5, etc. Puede observarse que cada término se obtiene sumando 3 al término anterior. En la sucesión (2), el primer término es 3 y el cuarto es 24, y cualquier término puede obtenerse duplicando el anterior. Sucesiones de estos tipos aparecen en muchos problemas, en particular en matemáticas financieras.

Una sucesión es **finita** si contiene un número limitado de términos, es decir, si la sucesión tiene un último término. Si no hay un último término en la sucesión, se denomina sucesión **infinita**. Los términos de una sucesión se denotarán por T_1, T_2, T_3, etc. Así, por ejemplo, T_7 denotará al séptimo término, T_{10} al décimo y T_n al n-ésimo término. El n-ésimo término de una sucesión por lo regular se conoce como el **término general**. ☛ **1**

☛ **1.** Para la sucesión 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, ¿cuáles son T_2 y T_5? ¿La sucesión es finita?

■ 7-1 PROGRESIONES ARITMÉTICAS E INTERÉS SIMPLE

Supóngase que el señor Muñiz pide al banco la cantidad de \$5000 a un interés del 1% mensual. Él está de acuerdo en pagar \$200 al capital cada mes, más el interés en el balance. Al final del primer mes, paga \$200 más el interés de \$5000 al 1% mensual, que son \$50. En consecuencia, el primer pago es de \$250 y sólo le debe \$4800 al banco. Al término del segundo mes, paga \$200 al capital más los intereses sobre \$4800, los cuales son de \$48 al 1% mensual. Por tanto, su segundo pago es de \$248. Continuando en esta forma, sus pagos sucesivos (en dólares) son

$$250, 248, 246, 244, \ldots, 202$$

Esta sucesión es un ejemplo de una *progresión aritmética*.

DEFINICIÓN Una sucesión se dice que es una **progresión aritmética** (PA) si la diferencia entre cualquier término y el anterior es la misma a lo largo de toda la sucesión. La diferencia algebraica entre cada término y el anterior se denomina **diferencia común** y se denota por d.

La sucesión de pagos del señor Muñiz es una PA porque la diferencia entre cualquier término y el anterior es -2. Esta PA tiene 250 como su primer término y $-2(= 248 - 250)$ como su diferencia común. De manera similar,

$$2, 5, 8, 11, 14, \ldots,$$

es una PA cuyo primer término es 2 y con diferencia común 3.

Si a es el primer término y d es la diferencia común de una PA, los términos sucesivos de la PA son

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad a + 3d, \quad \ldots.$$

Respuesta -1 y 3. Sí.

El n-ésimo término está dado por la fórmula

$$T_n = a + (n - 1)d \qquad (3)$$

Por ejemplo, haciendo $n = 1$, 2 y 3, encontramos que

$$T_1 = a + (1 - 1)d = a$$
$$T_2 = a + (2 - 1)d = a + d$$
$$T_3 = a + (3 - 1)d = a + 2d$$

De manera similar, se pueden obtener otros valores.

La ecuación (3) contiene cuatro parámetros, a, d, n y T_n. Si se dan cualesquiera tres de ellos, podemos calcular el cuarto.

EJEMPLO 1 Dada la sucesión

$$1, 5, 9, 13, \ldots$$

calcule: *a*) el décimo quinto término; *b*) el n-ésimo término.

Solución La sucesión dada es una PA porque

$$5 - 1 = 9 - 5 = 13 - 9 = 4$$

En consecuencia, la diferencia común, d, es 4. También, $a = 1$.

a) Usando la ecuación (3) con $n = 15$,

$$T_{15} = a + (15 - 1)d = a + 14d = 1 + (14)(4) = 57$$

☛ **2.** Para la PA $-3, -0.5, 2, \ldots$, determine una fórmula para el n-ésimo término y calcule el término 11°.

b) $T_n = a + (n - 1)d = 1 + (n - 1)4 = 4n - 3$

Por tanto, el quinceavo término es 57 y el n-ésimo término es $4n - 3$. ☛ **2**

EJEMPLO 2 ***(Depreciación)*** Una empresa instala una máquina con un costo de \$1700. El valor de la máquina se deprecia anualmente en \$150. Determine una expresión para el valor de la máquina después de n años. Si el valor de desecho es de \$200. ¿Cuál es el tiempo de vida útil de la máquina?

Solución Ya que el valor de la máquina se deprecia \$150 cada año, su valor al término del primer año, el segundo, el tercero, etc., será

$$1700-150,\ 1700-2(150),\ 1700-3(150),\ \ldots$$

o bien,

$$1550, 1400, 1250, \ldots$$

Esta sucesión de valores forma una PA con primer término $a = 1550$ y diferencia común $d = 1400 - 1550 = -150$. En consecuencia, el n-ésimo término es

Respuesta $T_n = 2.5n - 5.5$; $T_{11} = 22$

$$T_n = a + (n - 1)d = 1550 + (n - 1)(-150) = 1700 - 150n$$

Esta cantidad T_n da el valor de la máquina en dólares al término del n-ésimo año.

Estamos interesados en el valor de n cuando se haya reducido al valor de desecho, puesto que esto da la vida útil de la máquina. Así que, hacemos $T_n = 200$ y despejamos n.

$$1700 - 150n = 200$$
$$150n = 1700 - 200 = 1500$$
$$n = 10$$

☛ **3.** Una PA con 25 términos tiene primer término 100 y último término 28. Encuentre una expresión para el término general y calcule el término de en medio.

La vida útil de la máquina es de 10 años. ☛ **3**

EJEMPLO 3 Los pagos mensuales que Alicia efectúa al banco por un préstamo forman una PA. Si sus pagos sexto y décimo son de $345 y $333, respectivamente, ¿de cuánto será su décimo quinto pago al banco?

Solución Sea a el primer término y d la diferencia común de los pagos mensuales de la PA. Entonces, los pagos sucesivos (en dólares) son

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad \ldots$$

Dado que los pagos sexto y décimo (en dólares) son de 345 y 333, $T_6 = 345$ y $T_{10} = 333$. Usando la ecuación (3) para el n-ésimo término y los valores dados de T_6 y T_{10}, tenemos

$$T_6 = a + 5d = 345$$
$$T_{10} = a + 9d = 333$$

Restamos la primera ecuación de la segunda y simplificamos.

$$4d = 333 - 345 = -12$$
$$d = -3$$

Sustituyendo este valor de d en la ecuación para T_6, obtenemos

$$a - 15 = 345 \quad \text{o} \quad a = 360$$

Ahora

$$T_{15} = a + 14d = 360 + 14(-3) = 308$$

Por tanto, su décimo quinto pago al banco será de $308.

Interés simple

Sea P una cantidad de dinero invertida a una tasa de interés anual del R por ciento. En un año, la cantidad de interés ganada está dada (véase la página 68) por

$$I = P\left(\frac{R}{100}\right)$$

Respuesta $T_n = 103 - 3n$; el término de en medio es $T_{13} = 64$

Si la inversión es a *interés simple*, entonces, en años sucesivos el interés sólo se paga sobre el capital P y no sobre los montos de interés generados. Así que se agrega una cantidad constante I a la inversión al final de cada año. Después de 1 año el valor total es $P + I$, después de 2 años es $P + 2I$, y así sucesivamente. La sucesión de valores anuales de la inversión,

$$P, \quad P + I, \quad P + 2I, \quad P + 3I, \quad \ldots$$

forman de esta manera una progresión aritmética, cuyo primer término es P y con diferencia común I. Después de t años el valor está dado por $P + tI$.

Interés simple:

$$\text{Valor después de } t \text{ años} = P + tI, \qquad I = P\left(\frac{R}{100}\right)$$

EJEMPLO 4 ***(Interés simple)*** Se invierte una suma de \$2000 con interés simple a una tasa de interés anual del l2%. Encuentre una expresión para el valor de la inversión t años después de que se realizó. Calcule el valor después de 6 años.

Solución Aquí $P = 2000$ y $R = 12$. Por tanto, la cantidad de interés anual es

$$I = 2000\left(\frac{12}{100}\right) = 240$$

Después de t años el interés total agregado es $tI = 240t$, de modo que el valor de la inversión es

$$P + tI = 2000 + 240t$$

Después de 6 años, este valor es

$$2000 + 6(240) = 3440 \text{ dólares.}$$ ☛ **4**

☛ **4.** Una suma de \$400 se invierte a interés simple de 8% anual. Encuentre el valor después de t años. Después de 10 años, ¿cuál es el valor y cuánto interés total se ha devengado?

Respuesta \$(400 + 32t) \$720, \$320

Suma de n términos de una PA

Si a es el primer término y d es la diferencia común de una PA, la sucesión es

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad \ldots$$

Si la sucesión consta de n términos y si l denota el último término (esto es, el n-ésimo término),

$$l = a + (n - 1)d \tag{4}$$

El penúltimo término será $l - d$, el antepenúltimo término será $l - 2d$, etc. Si S_n denota la suma de estos n términos,

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (l - 2d) + (l - d) + l$$

Si escribimos esta progresión en orden inverso, la suma es la misma, de modo que

$$S_n = l + (l - d) + (l - 2d) + \cdots + (a + 2d) + (a + d) + a$$

☛ **5.** En una PA finita, demuestre que el promedio de todos los términos es igual al promedio del primero y último términos.

Respuesta El promedio de n términos es igual a su suma, S_n, dividido entre n. De la ecuación (5), esto es $S_n/n = \frac{1}{2}(a + l)$

☛ **6.** Determine la suma de todos los números pares positivos menores que 200 y la suma de todos los números impares positivos menores que 200.

Respuesta $2 + 4 + 6 + \cdots + 198 = 9900$;

$1 + 3 + 5 + \cdots + 199 = 10{,}000$

Sumando los dos valores de S_n, obtenemos

$$2S_n = [a + l] + [a + d + l - d] + [a + 2d + l - 2d] + \cdots + [l - d + a + d] + [l + a]$$

Hay n términos en el lado derecho y cada uno es igual a $a + l$. En consecuencia,

$$2S_n = n(a + l)$$

o bien,

$$S_n = \frac{n}{2}(a + l) \tag{5}$$

Sustituyendo el valor de l de la ecuación (4) en la ecuación (5),

$$S_n = \frac{n}{2}[a + a + (n - 1)d] = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] \quad ☛ \mathbf{5}$$

Estos valores se resumen en el siguiente teorema.

TEOREMA 1 La suma de n términos de una PA con primer término a y diferencia común d está dada por

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]}$$

También podemos escribir esta fórmula como

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a + l) \qquad \text{en donde } l = a + (n - 1)d}$$

EJEMPLO 5 Calcule la suma de los primeros 20 términos de la progresión

$$2 + 5 + 8 + 11 + 14 + \cdots$$

Solución La sucesión dada es una PA porque

$$5 - 2 = 8 - 5 = 11 - 8 = 14 - 11 = 3$$

Así, la diferencia común es $d = 3$. También, $a = 2$ y $n = 20$. Por tanto,

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2(2) + (20 - 1)3] = 10(4 + 57) = 610 \quad ☛ \mathbf{6}$$

EJEMPLO 6 ***(Pago de préstamo)*** Considere el préstamo del banco al señor Muñiz por \$5000 a un interés mensual del 1%. Cada mes paga \$200 al capital más el interés mensual del balance pendiente. ¿Cuánto deberá pagar en total en el tiempo que está pagando el préstamo?

☛ **7.** Una PA tiene segundo término 7 y sexto término 15. Determine el primer término y la diferencia común. ¿Cuántos términos se requieren para hacer una suma de 320?

Solución Como expusimos al inicio de esta sección, la sucesión de pagos es

$$250, \quad 248, \quad 246, \; \ldots, \quad 202$$

Éstos forman una PA con $a = 250$ y $d = -2$. Dado que $200 del capital se paga cada mes, el número total de pagos es $n = 5000/200 = 25$. Por tanto, el último término es

$$l = T_{25} = a + 24d = 250 + 24(-2) = 202$$

como se indicó antes.

El pago total está dado por la suma de los 25 términos.

$$S_n = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{25}{2}(250 + 202) = 5650$$

La cantidad total pagada al banco es de $5650, lo cual significa que el interés pagado será por la cantidad de $650.

EJEMPLO 7 ***(Pago de préstamos)*** Un individuo está de acuerdo en pagar una deuda libre de interés de $5800 en cierto número de pagos, cada uno de ellos (empezando por el segundo) debiendo exceder al anterior por $20. Si el primer pago es de $100, calcule cuántos pagos deberá efectuar para finiquitar la deuda.

Solución Dado que el primer pago es de $100 y cada pago subsecuente se incrementa en $20, los pagos (en dólares) son

$$100, \quad 120, \quad 140, \quad 160, \; \ldots$$

Estos números forman una PA con $a = 100$ y $d = 20$. Indiquemos con n el número de pagos necesarios con el objetivo de pagar la deuda de $5800. Entonces, la suma de los n términos de esta sucesión debe ser igual a 5800, esto es, $S_n = 5800$. Usando la fórmula para la suma de una PA, obtenemos

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

$$5800 = \frac{n}{2}[200 + (n - 1)20] = \frac{n}{2}(20n + 180) = 10n^2 + 90n$$

Por tanto,

$$10n^2 + 90n - 5800 = 0$$

Dividiendo toda la ecuación entre 10, resulta

$$n^2 + 9n - 580 = 0$$

o bien,

$$(n - 20)(n + 29) = 0$$

lo que da $n = 20$ o $n = -29$.

Puesto que un valor negativo de n no tiene sentido, entonces $n = 20$. En consecuencia, deberán efectuarse 20 pagos con la finalidad de saldar la deuda. ☛ **7**

Respuesta $a = 5$, $d = 2$; 16 términos

EJERCICIOS 7-1

(1-4) Encuentre los términos indicados de las sucesiones dadas.

1. Términos décimo y décimo quinto de 3, 7, 11, 15, 19, ...
2. Términos séptimo y n-ésimo de 5, 3, 1, -1, ...
3. El r-ésimo término de 72, 70, 68, 66, ...
4. El n-ésimo término de 4, $4\frac{1}{3}$, $4\frac{2}{3}$, 5, ...
5. Si los términos tercero y séptimo de una PA son 18 y 30, respectivamente, encuentre el décimo quinto término.
6. Si los términos quinto y décimo de una PA son 38 y 23, respectivamente, encuentre el n-ésimo término.
7. ¿Qué término de la sucesión 5, 14, 23, 32, ... es 239?
8. El último término de la sucesión 20, 18, 16, ... es -4. Calcule el número de términos de esta sucesión.

(9-14) Determine la suma indicada de las siguientes progresiones.

9. $1 + 4 + 7 + 10 + \cdots$; 30 términos
10. $70 + 68 + 66 + 64 + \cdots$; 15 términos
11. $2 + 7 + 12 + 17 + \cdots$; n términos
12. $3 + 5 + 7 + 9 + \cdots$; p términos
13. $51 + 48 + 45 + 42 + \cdots + 18$
14. $15 + 17 + 19 + 21 + \cdots + 55$
15. ¿Cuántos términos de la sucesión 9, 12, 15, ... es necesario considerar de modo que su suma sea 306?
16. ¿Cuántos términos de la sucesión -12, -7, -2, 3, 8, ... deben sumarse de tal manera que la suma sea 105?
17. En una PA, si 7 veces el séptimo término es igual a 11 veces el décimo primer término, demuestre que el término décimo octavo es cero.
18. *(Pago de un préstamo)* Un hombre salda un préstamo de \$3250 pagando \$20 en el primer mes y después aumentando el pago en \$15 cada mes. ¿Cuánto tiempo le tomará liquidar su préstamo?
19. *(Depreciación)* Una compañía manufacturera instala una máquina a un costo de \$1500. Al cabo de 9 años, la máquina tiene un valor de \$420. Suponiendo que la depreciación anual es constante, calcule la depreciación anual.
20. *(Depreciación)* Si una máquina tiene un costo de \$2000 y ésta se deprecia \$160 anualmente. ¿Cuál es la vida útil de la máquina, si su valor de desecho fue de \$400?
21. *(Pago de préstamos)* Los pagos mensuales de Esteban al banco ocasionados por un préstamo forman una PA. Si el octavo y décimo quinto pagos son de \$153 y \$181, respectivamente, ¿cuál será su vigésimo pago?
22. *(Incrementos en los salarios)* El salario mensual de Carla se incrementó anualmente formando una PA. Ella ganó \$440 al mes durante el séptimo año y \$1160 al mes durante el vigésimo quinto año.

    a) Calcule su salario inicial y su incremento anual.

    b) ¿Cuál sería su salario de jubilación al completar 38 años de servicio?
23. *(Pago de préstamos)* En el ejercicio 21, suponga que Esteban pagó un total de \$5490 al banco.

    a) Calcule el número de pagos que efectuó al banco.

    b) ¿De cuánto fue su último pago al banco?
24. *(Pago de préstamos)* Debe saldarse una deuda de \$1800 en 1 año efectuando un pago de \$150 al término de cada mes, más intereses a una tasa del 1% mensual sobre el saldo insoluto. Determine el pago total por concepto de intereses.
25. *(Interés simple)* Una persona deposita \$50 al inicio de cada mes en una cuenta de ahorros, en la cual el interés permitido es de $\frac{1}{2}$% al mes sobre el balance mensual. Determine el balance de la cuenta al término del segundo año, calculando a interés simple.
26. *(Costos de perforación)* El costo de efectuar una perforación a 600 metros es como sigue: se fijan \$15 por el primer metro y el costo por metro se incrementa a \$2 por cada metro subsiguiente. Calcule el costo de perforar el metro número 500 y el costo total.

* 27. *(Descuento simple)* Se pide un préstamo P al banco y debe pagarse n meses después en un solo pago A. Si el banco calcula el pago usando una *tasa de descuento simple* del R por ciento, entonces P y A están relacionados por la fórmula

$$P = A\left(1 - \frac{R}{100} \cdot \frac{n}{12}\right)$$

Un hombre pide prestado dinero al banco que utiliza una tasa de interés simple del l2%. Él pagará la deuda con pagos de \$100 al término de cada mes en los siguientes 12 meses. ¿De cuánto debe solicitar el préstamo? (Considere cada uno de los pagos mensuales A_1, A_2, ... como generados por sus propias deudas iniciales P_1, P_2, ... y sume todas las P).

* **28.** *(Descuento simple)* La señorita Campos pidió dinero prestado de su fondo sindical, que aplica una tasa de descuento simple del 10%. Ella prometió pagar \$50 al término de cada mes en los 24 meses siguientes. ¿De cuánto fue el interés total fijado por el fondo del sindicato?

29. *(Pago de préstamos)* Un individuo está de acuerdo en saldar una deuda de \$1800 en cierto número de pagos, cada uno de ellos (empezando con el segundo) menor que el previo en \$10. Si su quinto pago es de \$200, ¿cuántos pagos serán necesarios de modo que salde la deuda?

30. *(Bonos de ahorro)* El primer día de noviembre de cada año, una persona adquiere bonos de ahorro por un valor que excede los adquiridos el año anterior en \$50. Después de 10 años, el costo total de los bonos adquiridos fue de \$4250. Calcule el valor de los bonos adquiridos:

a) En el primer año.

b) En el séptimo año.

31. *(Planes de ahorro)* Un sujeto invierte \$200 en el fondo de una cooperativa que paga un interés simple del 10% al año. ¿Cuál es el valor de la inversión:

a) Después de n años?

b) Al cabo de 5 años?

32. *(Planes de ahorro)* Cintia deposita \$1000 al inicio de cada año en su plan regular de ahorro que gana un interés simple del 8% anual. ¿De cuánto es el valor del plan (incluyendo el último pago):

a) Al término de 5 años?

b) Al cabo de n años?

33. *(Depreciación)* A menudo el método de depreciación lineal es inapropiado, porque el bien en cuestión pierde mucho más valor durante el primer o segundo año que en años posteriores. Un método alternativo es el de **suma de los dígitos de los años**. Sea N la vida útil del bien y d la depreciación durante el año N (esto es, durante el último año). Según este método el monto de depreciación durante el año $(N - 1)$ es $2d$; durante el año $(N - 2)$, $3d$, y así sucesivamente, por lo que la depreciación durante el primer año es Nd. Muestre que la depreciación durante el año n es $(N - n + 1)d$, $(n = 1, 2, \ldots, N)$, y que la depreciación total durante los N años es $D = \frac{1}{2}N(N + 1)d$. (En la práctica D debe ser igual a [costo inicial − valor de desecho después de N años]; por tanto, d está bien determinado).

34. *(Depreciación)* Usando el método de depreciación de la suma de los dígitos de los años (véase el ejercicio 33), calcule la depreciación durante el primer año de una computadora cuyo costo inicial es de \$230,000 y cuyo valor de desecho después de 10 años será de \$10,000.

35. *(Depreciación)* Usando el método de depreciación de la suma de los dígitos de los años (véase el ejercicio 33), calcule la depreciación durante cada año de una flotilla de automóviles, cuyo precio de compra es \$500,000 y su precio de reventa después de 3 años será \$200,000.

■ 7-2 PROGRESIONES GEOMÉTRICAS E INTERÉS COMPUESTO

Suponga que se depositan \$1000 en un banco que ofrece una tasa de interés del 10% capitalizable anualmente. El valor de esta inversión (en dólares) al cabo de 1 año es igual a

$$1000 + 10\% \text{ de } 1000 = 1000(1 + 0.1) = 1000(1.1) = 1100$$

Si la inversión es a interés compuesto, entonces, durante el segundo año el interés se paga por la suma total de \$1100 (véase páginas 220-222). Por tanto, el valor de la inversión (en dólares) al término de 2 años es

$$\begin{aligned} 1100 + 10\% \text{ de } 1100 &= 1100 + 0.1(1100) \\ &= 1100(1 + 0.1) = 1100(1.1) = 1000(1.1)^2 \end{aligned}$$

De manera similar, el valor de la inversión al término de 3 años será de $1000(1.1)^3$ dólares, etc. De modo que los valores de la inversión (en dólares) al término de 0 años, 1 año, 2 años, 3 años, etc., son

$$1000,\ 1000(1.1),\ 1000(1.1)^2,\ 1000(1.1)^3, \ldots$$

Observe la diferencia entre este ejemplo y el caso de interés simple analizado en la sección anterior. Con interés simple, una cantidad constante se añade en cada periodo. Con interés compuesto, el valor se multiplica por un factor constante cada periodo (1.1 en este ejemplo). Esta sucesión es un ejemplo de una *progresión geométrica*.

DEFINICIÓN Una sucesión de términos se dice que están en una **progresión geométrica** (PG) si la razón de cada término al término anterior es siempre la misma. Esta razón constante se denomina **razón común** de la PG.

De esta manera, la sucesión 2, 6, 18, 54, 162, ... es una PG porque

$$\tfrac{6}{2} = \tfrac{18}{6} = \tfrac{54}{18} = \tfrac{162}{54} = 3$$

La razón común es 3.

También, la sucesión $\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{24}, \ldots$ es una PG con razón común $-\frac{1}{2}$.

Cada término de una PG se obtiene multiplicando al anterior por la razón común. Si a es el primer término y r es la razón común, los términos sucesivos de la PG son

$$a, \quad ar, \quad ar^2, \quad ar^3, \ldots$$

En esta PG, observamos que la potencia de r en cualquier término es uno menos que el número del término. Así que el n-ésimo término está dado por

$$\boxed{T_n = ar^{n-1} \qquad (1)}$$

EJEMPLO 1 Determine los términos quinto y n-ésimo de la sucesión 2, 6, 18, 54, ...

Solución La sucesión es una PG debido a que

$$\tfrac{6}{2} = \tfrac{18}{6} = \tfrac{54}{18} = 3$$

En consecuencia, los términos sucesivos tienen una razón constante de 3; esto es, $r = 3$. Asimismo, $a = 2$. Por tanto,

☛ **8.** Determine los términos sexto y n-ésimo de la PG 3, -6, 12, -24, ...

$$T_5 = ar^4 = 2(3^4) = 162 \qquad \text{y también} \qquad T_n = ar^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$$ ☛ **8**

EJEMPLO 2 Los términos cuarto y noveno de una PG son $\frac{1}{2}$ y $\frac{16}{243}$. Determine el sexto término.

Solución Sea a el primer término y r la razón constante de la PG. Entonces, usando nuestros valores dados, tenemos que

$$T_4 = ar^3 = \tfrac{1}{2} \qquad \text{y también} \qquad T_9 = ar^8 = \tfrac{16}{243}$$

Respuesta $T_6 = -96$, $T_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

Dividimos la segunda ecuación entre la primera y despejamos a r.

$$\frac{ar^8}{ar^3} = \frac{\frac{16}{243}}{\frac{1}{2}}$$

$$r^5 = \tfrac{16}{243} \cdot \tfrac{2}{1} = \tfrac{32}{243} = (\tfrac{2}{3})^5$$

$$r = \tfrac{2}{3}$$

Sustituyendo este valor de r en la primera ecuación, resulta que

$$a(\tfrac{2}{3})^3 = \tfrac{1}{2}$$

Por tanto,

$$a = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{27}{8} = \tfrac{27}{16}$$

y asimismo

☛ **9.** En una PG, $T_7 = 2$ y $T_{11} = 8$. Encuentre una expresión para T_n y calcule T_{15}

$$T_6 = ar^5 = \tfrac{27}{16}\,(\tfrac{2}{3})^5 = \tfrac{27}{16} \cdot \tfrac{32}{243} = \tfrac{2}{9}$$

En consecuencia, el sexto término es $\frac{2}{9}$. ☛ **9**

En el ejemplo 2 de la sección 7-1 vimos un ejemplo de depreciación, en el que el monto de la depreciación anual era constante. Este método se denomina depreciación lineal (también véase la sección 4-3). Un método alterno es depreciar un porcentaje fijo del valor del año anterior.

EJEMPLO 3 ***(Depreciación)*** Una máquina se compró en \$10,000 y se deprecia anualmente a una tasa del 20% de su valor. Determine una expresión para el valor después de n años. Si el valor de desecho es \$3000, ¿cuál es la vida efectiva de la máquina (*i.e.*, el número de años hasta que su valor depreciado sea menor que su valor de desecho)?

Solución Ya que el valor de la máquina se deprecia cada año en un 20% de su valor al inicio del año, el valor de la máquina al término de cada año es el 80% o cuatro quintos del valor al inicio de ese año. Así que, el valor (en dólares) de la máquina al término del primer año es

$$\tfrac{4}{5} \text{ de } 10{,}000 = 10{,}000(\tfrac{4}{5})$$

y al acabar el segundo año es de

$$\tfrac{4}{5} \text{ de } 10{,}000(\tfrac{4}{5}) = 10{,}000(\tfrac{4}{5})^2$$

De manera similar, el valor (en dólares) al término del tercer año será de $10{,}000(\frac{4}{5})^3$, etc. Por tanto, el valor (en dólares) de la máquina al término del primer año, del segundo año, del tercer año, etc., es

$$10{,}000(\tfrac{4}{5}),\ 10{,}000(\tfrac{4}{5})^2,\ 10{,}000(\tfrac{4}{5})^3, \ldots$$

Es claro que esta sucesión es una PG con primer término $10{,}000(\frac{4}{5})$ y razón común de $\frac{4}{5}$. Por tanto, el n-ésimo término que da el valor de la máquina al término del n-ésimo año es

Respuesta Existen dos respuestas: $T_n = (\pm\sqrt{2})^{n-5}$, $T_{15} = 32$

$$T_n = ar^{n-1} = 10{,}000(\tfrac{4}{5}) \cdot (\tfrac{4}{5})^{n-1} = 10{,}000(\tfrac{4}{5})^n$$

☛ **10.** Vuelva a resolver el ejemplo 3, si la tasa de depreciación es 10% anual.

Haciendo n igual a 1, 2, 3, . . , obtenemos los valores de la tabla 1. En consecuencia, observamos que después de 5 años el valor de la máquina es un poco más grande que el valor de desecho de \$3000, pero después de 6 años, su valor está por debajo del valor de desecho. La vida útil de la máquina es de 6 años. ☛ **10**

TABLA 1

n	1	2	3	4	5	6
T_n	8000	6400	5120	4096	3276.8	2621.44

Iniciamos esta sección con un ejemplo de interés compuesto. El caso general de una inversión que crece a interés compuesto se expuso al final de la sección 6-1. Si una suma P se invierte a una tasa de interés del R por ciento anual compuesto anualmente, el valor de la inversión al término del n-ésimo año está dada por la fórmula

$$T_n = P(1 + i)^n, \quad i = \frac{R}{100k}$$

Estos valores para $n = 1, 2, 3, \ldots$ forman una PG. La razón común es $r = 1 + i$ y el primer término es $a = T_1 = P(1 + i)$.

En la siguiente sección se darán aplicaciones adicionales relacionadas con esto.

TEOREMA 1 (SUMA DE *n* TÉRMINOS DE UNA PG) Si a es el primer término y r la razón común de una PG, entonces, la suma S_n de n términos de la PG está dada por

$$\boxed{S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \qquad (2)}$$

DEMOSTRACIÓN Los n términos de la PG dada son

$$a, \quad ar, \quad ar^2, \ \ldots, \quad ar^{n-2}, \quad ar^{n-1}$$

Por tanto, la suma de estos términos es

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

Multiplicamos ambos lados por $-r$.

$$-rS_n = -ar - ar^2 - \cdots - ar^{n-1} - ar^n$$

Sumando estas dos ecuaciones, advertimos que todos los términos se cancelan excepto el primer término de la primera ecuación y el último de la segunda, lo que da

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

Factorizamos y despejamos S_n

$$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

Respuesta El valor después de n años $= T_n = 10{,}000\left(\frac{9}{10}\right)^n$. T_n es menor que \$3000 después de 12 años.

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Esto prueba el resultado.

Multiplicando el numerador y el denominador de la ecuación (2) por -1, obtenemos la fórmula alternativa

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Esta fórmula por lo general se usa cuando $r > 1$, mientras que la ecuación (2) es más útil cuando $r < 1$.

Observación La fórmula anterior para S_n es válida sólo cuando $r \neq 1$. Cuando $r = 1$, la PG se transforma en

$$a + a + a + \cdots + a \quad (n \text{ términos})$$

cuya suma es igual a na.

EJEMPLO 4 Calcule la suma de los primeros 10 términos de la sucesión $2 - 4 + 8 - 16 + \cdots$.

Solución La sucesión dada es una PG con $a = 2$ y $r = -\frac{4}{2} = -2$. Aquí $n = 10$. Por tanto,

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

☛ **11.** Encuentre la suma de los primeros 11 términos de las PG
a) $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$
b) $2 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{4} + \cdots$

o bien,

$$S_{10} = \frac{2(1 - (-2)^{10})}{1 - (-2)} = \tfrac{2}{3}(1 - 2^{10}) = \tfrac{2}{3}(1 - 1024) = -682 \quad ☛ \ \mathbf{11}$$

EJEMPLO 5 ***(Planes de ahorro)*** Cada año una persona invierte \$1000 en un plan de ahorros del cual percibe intereses a una tasa fija del 8% anual. ¿Cuál es el valor de este plan de ahorros al décimo aniversario de la primera inversión? (Incluya el pago actual).

Solución Los primeros \$1000 se invierten a 10 años, de modo que su valor se ha incrementado a

$$\$1000(1 + i)^{10}, \qquad i = \frac{R}{100} = \frac{8}{100} = 0.08$$

En consecuencia, el valor es de $\$1000(1.08)^{10}$.

Los segundos \$1000 se invierten 1 año más tarde; por lo que permanecerán en el plan durante 9 años. Por tanto, su valor se incrementa a $\$1000(1.08)^9$. Los terceros \$1000 estarán en el plan 8 años y tienen el valor de $\$1000(1.08)^8$. Continuamos de esta manera hasta el décimo pago de \$1000, el cual se hizo 9 años después del primero. Su valor 1 año después es \$1000(1.08).

Respuesta *a*) $2^{11} - 1 = 2047$
b) $4\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{11} - 1\right] = \frac{175{,}099}{512}$

Así que el valor total del plan al cumplir su décimo aniversario se obtiene sumando estas cantidades con el pago actual de $1000.

$$S = 1000(1.08)^{10} + 1000(1.08)^{9} + \cdots + 1000(1.08) + 1000$$

Al escribir esto en orden inverso:

$$S = 1000 + 1000(1.08) + 1000(1.08)^{2} + \cdots + 1000(1.08)^{10}$$

Esta es una PG con $a = 1000$, $r = 1.08$ y $n = 11$. Por tanto,

$$S = 1000\,\frac{(1.08)^{11} - 1}{1.08 - 1}$$

usando la fórmula que da la suma de una PG. Simplificando, tenemos que

$$S = \frac{1000}{0.08}\,[(1.08)^{11} - 1] = 12{,}500(2.3316 - 1) = 16{,}645$$

☛ **12.** Vuelva a resolver el ejemplo 5, si la tasa de interés es 10% anual.

Así que el valor es $16,645. ☛ **12**

La suma de los primeros n términos de la sucesión geométrica

$$a + ar + ar^2 + \cdots$$

está dada por

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \qquad (2)$$

Consideremos el comportamiento de r^n para n grande cuando $-1 < r < 1$. Elijamos un ejemplo específico, sea $r = \frac{1}{2}$. La tabla 2 da los valores de r^n para diferentes valores de n. De esta tabla, observamos que a medida que n se hace más grande, r^n se hace cada vez más pequeño. Por último, cuando n tiende a infinito, r^n se acerca a cero. Este comportamiento de r^n (es decir, que r^n se acerca cada vez más a cero a medida que n se hace cada vez más grande) se cumple siempre que $-1 < r < 1$. Así que de la ecuación (2), podemos decir que la suma de un número infinito de términos de una PG está dada por

$$S_\infty = \frac{a(1 - 0)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}$$

TABLA 2

n	1	2	3	4	5	6	7
r^n	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.03125	0.015625	0.0078125

Esto nos conduce al siguiente teorema.

Respuesta $S = 1000\,\frac{(1.1)^{11} - 1}{1.1 - 1}$ $= 18{,}531$

TEOREMA 2 (SUMA DE UNA PG INFINITA) La suma S de una progresión geométrica infinita

☛ **13.** El decimal recurrente 0.51515151. . . puede expresarse como la suma de una PG infinita como

$$0.51\left[1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \cdots\right]$$

Evalúe esta suma y de aquí exprese el decimal como una fracción. De forma análoga exprese los decimales 1.222222. . . y 0.279279279. . . como fracciones

Respuesta $\frac{17}{33}, \frac{11}{9}, \frac{31}{111}$

$$a + ar + ar^2 + \cdots$$

está dada por

$$\boxed{S = \frac{a}{1 - r}, \quad \text{con tal de que } -1 < r < 1 \qquad (3)}$$

En matemáticas financieras, las PG infinitas ocurren en algunas situaciones que incluyen *perpetuidad*. Un ejemplo sería una anualidad que continúa de manera indefinida.

EJEMPLO 6 Calcule la suma de la sucesión infinita $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$

Solución La sucesión dada es una PG con $a = 1$ y $r = -\frac{1}{3}$. La suma está dada por

$$S = \frac{a}{1 - r} = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$ ☛ **13**

EJERCICIOS 7-2

(1-4) Encuentre el término específico.

1. El noveno término de la sucesión 3, 6, 12, 24, . . .

2. El sexto término de la sucesión $\sqrt{3}$, 3, $3\sqrt{3}$, 9, . . .

3. El n-ésimo de la sucesión $\frac{2}{9}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \ldots$

4. El p-ésimo término de la sucesión $\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \ldots$

(5-6) ¿Qué lugar ocupa en la sucesión el último término dado?

5. 96, 48, 24, 12, . . . ; $\frac{3}{16}$

6. 18, 12, 8, . . . ; $\frac{512}{729}$

7. El segundo término de una PG es 24 y el quinto es 81. Determine la sucesión y el décimo término.

8. Los términos quinto, octavo y undécimo de una PG son x, y y z, respectivamente. Demuestre que $y^2 = xz$.

9. Si $x + 9$, $x - 6$ y 4 son los primeros tres términos de una PG, determine x.

10. En una PG, si el primer términos es a, la razón común r y el último término K, demuestre que el número de términos en la PG está dado por

$$n = 1 + \frac{\ln K - \ln a}{\ln r}$$

(11-17) Calcule la suma indicada de las siguientes sucesiones.

11. $2 + 6 + 18 + 54 + \cdots$; 12 términos

12. $\sqrt{3} - 3 + 3\sqrt{3} - 9 + \cdots$; 10 términos

13. $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$; n términos

14. $3 + 1.5 + 0.75 + 0.375 + \cdots$; p términos

15. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$

16. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$

17. $\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \cdots$

18. Si $y = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \ (-1 < x < 1)$, demuestre que

$$x = \frac{y - 1}{y}$$

19. Si $v = 1/(1 + i)$, pruebe que

$$v + v^2 + v^3 + \cdots = \frac{1}{i}$$

20. Pruebe que $9^{1/3} \cdot 9^{1/9} \cdot 9^{1/27} \cdots = 3$

21. Evalúe $4^{1/3} \cdot 4^{-1/9} \cdot 4^{1/27} \cdot 4^{-1/81} \cdots$

22. Exprese 0.85555. . . como una fracción. [*Sugerencia*: Escriba $0.85555 = 0.8 + 0.05(1 + 0.1 + 0.01 + \cdots)$].

23. *(Depreciación)* Una máquina se deprecia anualmente a una tasa del 10% de su valor. El costo original fue de $10,000 y el valor de desecho de $5314.41. Calcule la vida efectiva de la máquina.

24. *(Depreciación)* Un automóvil se compró por $8300. La depreciación se calcula disminuyendo el valor en 10% para los primeros 3 años y 15% para los siguientes 3 años. Encuentre el valor del automóvil después de un periodo de 6 años.

25. *(Depreciación)* Una máquina se compró en $10,000. La depreciación se calcula reduciendo el valor en 8% durante los primeros 2 años y 10% para los siguientes 5 años. Determine el valor después de un periodo de 7 años.

26. *(Interés compuesto)* Si $2000 se invierten en una cuenta de ahorros a un interés del 8% capitalizable anualmente, calcule su valor después de 5 años.

27. *(Interés compuesto)* En el ejercicio 26, la tasa de interés decrece después de 6 años a un 6% anual. Calcule el valor de la inversión después de 6 años más.

28. *(Interés con capitalizaciones trimestrales)* Si $5000 se invierten en una cuenta de ahorros en que el interés se capitaliza trimestralmente a una tasa de interés nominal del 8% anual, calcule su valor después de 3 años.

29. *(Interés con capitalizaciones mensuales)* Suponga que $4000 se invierten a plazo fijo a una tasa de interés nominal anual del 6% con capitalizaciones mensuales. Calcule su valor:

a) Después de 1 año. *b*) Después de 4 años.

30. *(Interés compuesto)* Una persona desea invertir cierta cantidad de dinero a plazo fijo ganando 10% del interés anual por un periodo de 4 años. Al término de este tiempo, los intereses provenientes de la inversión se usarán para pagar una deuda de $10,000 que entonces deberá saldar. ¿Cuánto deberá invertir de modo que tenga lo suficiente para pagar la deuda?

31. *(Plan de ahorros)* Cada año María invierte $2000 en una cuenta de ahorros que gana un interés anual del 10%. Calcule el valor de su inversión al cumplirse el vigésimo aniversario de su primer depósito. (Incluya el pago actual).

32. *(Plan de ahorro)* Al inicio de cada mes, José deposita $200 en una cuenta de ahorros que gana un interés a una tasa del $\frac{1}{2}$% al mes sobre el mínimo balance mensual. ¿Cuál es el valor de la inversión después de 2 años (esto es, con 25 depósitos)?

***33.** *(Fondo de amortización)* Una compañía requerirá 1 millón de dólares exactamente dentro de 6 años con la finalidad de retirar una emisión de obligaciones. Con el objetivo de acumular tal cantidad, la compañía planea colocar cierta suma P cada año en un fondo especial (denominado un *fondo de amortización*). La última suma será depositada 1 año antes de que se venzan las obligaciones. Si el fondo ganara un interés del 8% anual, ¿de cuánto deberá ser P?

***34.** *(Fondo de amortización)* Alfredo hipoteca su casa que deberá pagar en un plazo de 5 años. En ese entonces, la deuda será de $19,500. Alfredo planea guardar cierta cantidad cada mes que invertirá en una cuenta de ahorros que paga intereses a una tasa de interés nominal anual del 9%, con capitalizaciones mensuales. La primera inversión la hará de inmediato y la última (la número 61) la hará en la fecha del pago de la hipoteca. ¿Cuánto deberá guardar cada mes si tiene que pagar la hipoteca por completo?

***35.** *(Valor presente de anualidades)* Hoy cumple Andrés 65 años y acaba de recibir de la administración de veteranos su cheque por $1000. Iguales cheques continuarán llegando cada día de su cumpleaños por el resto de su vida. Suponiendo que muere a la edad de 75 años, después de recibir su undécimo cheque, calcule el valor presente de los cheques recibidos suponiendo una tasa de descuento de 10% (véase página 228).

***36.** *(Valor presente de anualidades)* Repita el ejercicio 35 suponiendo que Andrés viva hasta la edad de 80 años y una tasa de descuento de 8%.

***37.** *(Valor presente de anualidades)* La tía Juana recibe una pensión de vejez de $300 mensual. Suponiendo una tasa compuesta de descuento nominal de 12% mensual (véase página 221), calcule el valor presente de 48 pagos siguientes de su pensión si el primer pago lo recibirá dentro de un mes. También calcule el valor presente de los siguientes 96 y 144 pagos.

■ 7-3 MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Los problemas básicos en matemáticas financieras requieren interés simple y compuesto, los cuales se han expuesto en el capítulo 6 y en las primeras dos secciones de este capítulo. Enseguida describiremos en forma breve algunas otras aplicaciones muy importantes de sucesiones que aparecen en esta área.

Planes de ahorro

El tipo más simple de plan de ahorro es el que consiste en pagos regulares de una cantidad fija que se realizan en el plan (por ejemplo, al término de cada mes o una vez por año), y el saldo invertido en el plan gana intereses en una tasa fija.

EJEMPLO 1 Cada mes Julia deposita \$100 en un plan de ahorros que gana intereses al $\frac{1}{2}$% mensual. Calcule el valor de sus ahorros: *a*) inmediatamente después de efectuar el vigésimo quinto depósito; *b*) Después de realizar su *n*-ésimo depósito.

Solución

a) El vigésimo quinto pago se realiza 24 meses después del primero. Cada inversión se incrementa en un factor de 1.005 al mes (0.5% al mes). De modo que el primer depósito de \$100 que Julia invierte tienen un valor de $\$100(1.005)^{24}$ después de 24 meses. El segundo depósito de \$100 que ella invierte estará en el plan durante 23 meses, por lo que tendrán un valor de $\$100(1.005)^{23}$. El tercer depósito de \$100 tendrá un valor de $\$100(1.005)^{22}$, etc. El vigésimo cuarto depósito de \$100 sólo estará en el plan por 1 mes, de modo que tendrá un valor de \$100(1.005). El último depósito no ganará ningún interés. En consecuencia, el valor total del plan será la suma de las cantidades anteriores; esto es,

$$S = 100(1.005)^{24} + 100(1.005)^{23} + 100(1.005)^{22} + \cdots + 100(1.005)^2 + 100(1.005) + 100$$

Pero, en orden inverso, esta expresión es la suma de 25 términos en una progresión geométrica, cuyo primer término es $a = 100$, y su razón $r = 1.005$. Por tanto,

$$\begin{aligned} S &= \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{100[(1.005)^{25} - 1]}{1.005 - 1} \\ &= \frac{100}{0.005}[(1.005)^{25} - 1] \\ &= 20{,}000[1.13280 - 1] = 2655.91 \end{aligned}$$

Por consiguiente, después de 24 meses, el plan de ahorros de Julia tiene un valor de \$2655.91.

b) El *n*-ésimo depósito se realiza $(n - 1)$ meses después del primero. Al cabo de $(n - 1)$ meses, el primer depósito de \$100 tendrá un valor de $\$100(1.005)^{n-1}$. El segundo depósito de \$100 tendrá un valor de $\$100(1.005)^{n-2}$ dado que permanece en el plan por espacio de $(n - 2)$ meses. El penúltimo depósito tendrá un valor de 100(1.005) dólares y el último (*n*-ésimo) depósito será de exactamente \$100. Por tanto, el valor total del plan estará dado por la siguiente suma:

$$S = 100(1.005)^{n-1} + 100(1.005)^{n-2} + \cdots + 100(1.005)^2 + 100(1.005) + 100$$

Otra vez, los términos de esta suma en orden inverso forman una PG con $a = 100$ y $r = 1.005$. Hay n términos, de modo que

$$\begin{aligned} S &= \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{100[(1.005)^n - 1]}{1.005 - 1} \\ &= 20{,}000[(1.005)^n - 1] \end{aligned}$$

Con esta fórmula podemos calcular el valor del plan al cabo de cualquier número de meses. Por ejemplo, después de 59 meses (es decir, al realizarse al sexagésimo depósito), el plan de ahorros tiene un valor de

$$20{,}000[(1.005)^{60} - 1] = 20{,}000[1.34885 - 1] = 6977.00$$

o $6977.00. ☛ **14**

☛ **14.** Vuelva a resolver el ejemplo 1, si los pagos mensuales son de $150 y la tasa de interés es 0.25% mensual.

Es fácil extender el argumento que se usó en este ejemplo al caso general. Supongamos que una cantidad p se deposita cada periodo; en donde cada periodo puede ser de 1 mes, un trimestre, un año o cualquier otro periodo de longitud fija. Sea la tasa de interés del R por ciento por periodo. Se sigue que en cada periodo la inversión se incrementa en un factor de $1 + i$, con $i = R/100$. Preguntamos ahora por el valor del plan de ahorros después de $n - 1$ periodos después del primer depósito, esto es, inmediatamente después que se realiza el n-ésimo depósito.

El primer depósito de P se habrá invertido durante los $n - 1$ periodos completos, de modo que habrá incrementado su valor a $P(1 + i)^{n-1}$. Sin embargo, el segundo depósito sólo se habrá invertido durante $n - 2$ periodos, de modo que habrá incrementado su valor a $P(1 + i)^{n-2}$. (Véase la figura 1). El n-ésimo o último depósito apenas habrá sido invertido, de modo que tendrá un valor de P. (Véase otra vez la figura 1).

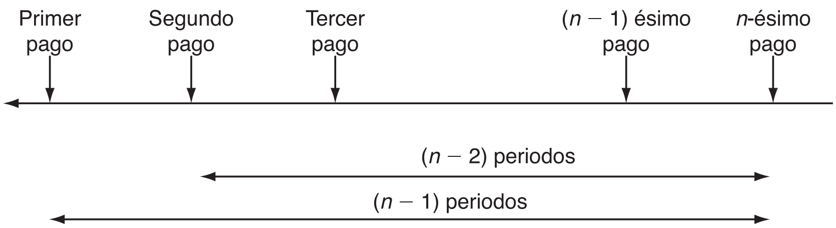


FIGURA 1

Por tanto, el valor total del plan de ahorros estará dado por la suma

$$S = P(1 + i)^{n-1} + P(1 + i)^{n-2} + \cdots + P(1 + i) + P$$

En orden inverso, ésta es la suma de una PG con primer término $a = P$ y cuya razón común es $1 + i$. Hay n términos, de modo que

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{P[(1 + i)^n - 1]}{(1 + i) - 1} = \frac{P}{i}[(1 + i)^n - 1]$$

Si sustituimos $P = 100$ e $i = 0.005$, obtenemos de nuevo los resultados del ejemplo 1.

Respuesta *a*) $3864.68
b) $S = 60{,}000[(1.0025)^n - 1]$

☛ **15.** Utilizando la tabla A.3.4 encuentre
a) $s_{\overline{40}|0.02}$; *b*) $s_{\overline{25}|0.07}$

Respuesta *a*) 60.401983
b) 63.249038

☛ **16.** En el ejemplo 1, utilice la tabla A.3.4 para calcular el valor del plan de ahorro, inmediatamente después de pago número 50.

Respuesta $S = 100s_{\overline{50}|0.005} =$ 5664.52

En matemáticas financieras, es común utilizar la notación

$$\boxed{S = P\, s_{\overline{n}|i} \qquad \text{en donde } s_{\overline{n}|i} = i^{-1}[(1+i)^n - 1]}$$

La cantidad $s_{\overline{n}|i}$ se lee como "*s* de *n* en *i*" y representa el valor de un plan de ahorros después de *n* depósitos regulares de \$1 cada uno. Sólo depende de la tasa de interés y del número *n*. Algunos valores de $s_{\overline{n}|i}$ para diferentes valores de *i* y de *n* aparecen en la tabla A.3.4. ☛ **15**

Por ejemplo, la solución al ejemplo 1*a*) podría evaluarse utilizando la tabla como

$$S = Ps_{\overline{n}|i} = (100)s_{\overline{25}|0.005} = 100(26.559115) = 2655.91 \quad ☛\ \mathbf{16}$$

Anualidades

Una anualidad es el término dado a una sucesión de pagos de cierta cantidad fija de dinero a intervalos regulares de tiempo, por ejemplo, \$2500 el último día de cada trimestre, o \$2000 el primero de enero de cada año. El ejemplo 1 anterior es un ejemplo de una anualidad de \$100 mensuales (pagados por Julia en su plan de ahorro). La cantidad *S* calculada en la parte *b*) de ese ejemplo proporciona el valor de la anualidad después del pago *n*-ésimo; con frecuencia se denomina valor futuro de la anualidad.

Con mayor generalidad, la cantidad $s_{\overline{n}|i}$ representa *el valor futuro después de* n *periodos de una anualidad de \$1 por periodo cuando* i = R/100 *y la tasa de interés es* R% *por periodo.* (Para ver esto, sólo ponga P = 1 en el análisis anterior).

Otro ejemplo importante de una anualidad ocurre cuando una persona deposita una cantidad de dinero con una compañía de seguros o institución similar y que la compañía devuelve en una serie de pagos regulares de igual monto en un periodo. Entre los pagos el saldo restante genera interés a alguna tasa predeterminada. Los pagos continúan hasta que la suma depositada se haya agotado. Éste es un método común por medio del cual la gente asegura una pensión al retirarse de trabajar.

EJEMPLO 2 Al cumplir su aniversario número 65, el señor Hernández desea adquirir una anualidad que le pagará \$5000 cada año en los próximos 10 años, el primer pago lo recibirá al cumplir 66 años. Su compañía de seguros le dará una tasa de interés del 8% anual en la inversión. ¿Cuánto deberá depositar con el propósito de adquirir tal anualidad?

Solución Consideremos el primer pago, que el señor Hernández recibirá al cumplir 66 años. Este pago será de \$5000, y debe pagarse por un depósito realizado un año antes. Sea este depósito A_1. En el año que corre, A_1 ganará un interés del 8%, de modo que se habrá incrementado a $(1.08)A_1$. Esto debe ser igual a 5000.

$$(1.08)A_1 = 5000$$
$$A_1 = 5000(1.08)^{-1}$$

Esto es, si una cantidad igual a $\$5000(1.08)^{-1}$ la deposita el señor Hernández al cumplir 65 años, se habrá incrementado a \$5000 al cumplir 66 años.

Ahora consideremos el segundo pago, el cual recibirá al cumplir 67 años. Este debe pagarse con un depósito, A_2, realizado 2 años antes. Dado que A_2 acumula un interés del 8% por 2 años, debemos tener que

$$A_2(1.08)^2 = 5000$$

si debe ser bastante para aumentar a \$5000 al llegar a su aniversario número 67. Así que

$$A_2 = 5000(1.08)^{-2}$$

Esto es, si el señor Hernández deposita una cantidad igual a A_2 en su aniversario número 65, se habrá incrementado a \$5000 dos años después. Es claro que si el señor Hernández deposita las cantidades $A_1 + A_2$ al cumplir 65 años, la inversión será la justa para poder recibir \$5000 en sus cumpleaños números 66 y 67.

Continuando en esta forma, un depósito de $A_3 = \$5000(1.08)^{-3}$ se incrementará a \$5000 después de 3 años (al cumplir 68 años), etc. El último pago de \$5000 lo recibirá al cumplir 75 años, de modo que habrá invertido durante 10 años. De aquí que requerirá un depósito de $\$5000(1.08)^{-10}$.

En consecuencia, con el objetivo de recibir los 10 pagos, la cantidad total que el señor Hernández deberá depositar al cumplir 65 años está dada por

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{10} \\ &= 5000(1.08)^{-1} + 5000(1.08)^{-2} + 5000(1.08)^{-3} + \cdots + 5000(1.08)^{-10} \end{aligned}$$

Esta expresión representa la suma de 10 términos de una PG con primer término $a = 5000(1.08)^{-1}$ y cuya razón común es $r = (1.08)^{-1}$. Por tanto,

$$A = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{5000(1.08)^{-1}[1 - (1.08)^{-10}]}{1 - (1.08)^{-1}}$$

Multiplicando numerador y denominador por 1.08,

$$\begin{aligned} A &= \frac{5000[1 - (1.08)^{-10}]}{1.08[1 - (1.08)^{-1}]} = \frac{5000[1 - (1.08)^{-10}]}{1.08 - 1} \\ &= \frac{5000}{0.08}[1 - (1.08)^{-10}] \\ &= \frac{5000}{0.08}(1 - 0.4632) \\ &= 33{,}550 \end{aligned}$$

☛ **17.** En el ejemplo 2, ¿cuánto debe pagarse para comprar la anualidad, si la tasa de interés es 6% anual?

Así que, el señor Hernández deberá depositar \$33,550 con el propósito de adquirir su anualidad de \$5000 por 10 años. ☛ **17**

Ahora generalicemos este ejemplo. Supongamos que se adquiere una anualidad con un pago previo A y que los pagos de la anualidad son iguales a P. Estos

Respuesta \$36,800.44

☛ **18.** Utilizando la tabla A.3.4 determine *a*) $a_{\overline{5}|0.08}$; *b*) $a_{\overline{30}|.00075}$

pagos se realizan a intervalos regulares durante n periodos, empezando un periodo después de que se adquiera la anualidad. La tasa de interés es del R por ciento por periodo.

Como en el ejemplo 2, el primer pago de P (efectuado 1 periodo después de que se adquiere la anualidad) requiere un depósito A_1, en donde

$$A_1(1 + i) = P \qquad \left(i = \frac{R}{100}\right)$$

Esto es porque una inversión de A_1 se incrementaría a $A_1(1 + i)$ durante el periodo que corre. Por tanto,

$$A_1 = P(1 + i)^{-1}$$

En forma similar, una inversión de A_2 se incrementaría a un valor P después de 2 periodos si

$$A_2(1 + i)^2 = P$$

o bien,

$$A_2 = P(1 + i)^{-2}$$

El n-ésimo y último pago requiere un depósito A_n realizado n periodos antes, en donde

$$A_n(1 + i)^n = P \qquad \text{o asimismo} \qquad A_n = P(1 + i)^{-n}$$

Por tanto, si la suma A es suficiente para pagar las n anualidades, debemos tener que

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + \cdots + A_n \\ &= P(1 + i)^{-1} + P(1 + i)^{-2} + \cdots + P(1 + i)^{-n} \end{aligned}$$

De nuevo, tenemos la suma de n términos de una PG. El primer término es $a = P(1 + i)^{-1}$ y la razón común es $r = (1 + i)^{-1}$. Por tanto,

$$A = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{P(1 + i)^{-1}[1 - (1 + i)^{-n}]}{1 - (1 + i)^{-1}}$$

Multiplicando el numerador y el denominador por $1 + i$, el denominador se transforma en

$$(1 + i)[1 - (1 + i)^{-1}] = (1 + i) - (1 + i)(1 + i)^{-1} = (1 + i) - 1 = i$$

En consecuencia, nos quedamos con

$$A = \frac{P}{i}[1 - (1 + i)^{-n}]$$

o bien,

$$A = Pa_{\overline{n}|i} \qquad \text{donde } a_{\overline{n}|i} = i^{-1}[1 - (1 + i)^{-n}] \tag{1}$$

Respuesta *a*) 3.992710 *b*) 26.775080

Otra vez los valores de $a_{\overline{n}|i}$ se leen como "*a* de *n* en *i*" y para algunos valores de *n* e *i* aparecen en la tabla A.3.4 del apéndice III. ☛ **18**

Por ejemplo, el ejemplo 2 puede resolverse utilizando la tabla como

$$A = Pa_{\overline{n}|i} = 5000a_{\overline{10}|0.08} = 5000(6.710081) = 33550.40$$

☛ **19.** En el ejemplo 2, utilice la tabla A.3.4 para calcular el valor presente de una anualidad de \$5000 por año durante 20 años.

A menudo llamamos a A el **valor presente** de una anualidad P por periodo para n periodos. Es la cantidad que debe pagarse para adquirir dicha anualidad. La cantidad $a_{\overline{n}|i}$ representa el valor presente de una anualidad de \$1 por periodo durante n periodos. Por contraste, recuerde que $s_{\overline{n}|i}$ es el valor futuro de tal anualidad, esto es, el valor al final de todos los pagos. ☛ **19**

Cuando una compañía de seguros otorga una póliza de pensión a una persona, por lo regular no la emite por un número determinado de años, sino más bien por el tiempo que la persona referida viva. En tal caso, el valor de n utilizado es la esperanza de vida de la persona, esto es, el número de años (en promedio) que vive una persona de su edad.

EJEMPLO 3 (*Anualidad*) La señora Jiménez se retira a la edad de 63 años y usa sus ahorros de toda la vida de \$120,000 para adquirir una pensión anual. La compañía de seguros de vida otorga una tasa de interés del 6% y estima que su esperanza de vida es de 15 años. ¿De cuánto será la anualidad (esto es, qué tan grande será la pensión anual) que recibirá?

Solución En la ecuación (1), sabemos que $A = 120,000$ *e* $i = R/100 = \frac{6}{100} = 0.06$. Deseamos calcular P. Tenemos que

$$A = Pa_{\overline{n}|i}$$

Esto es,

$$120,000 = Pa_{\overline{15}|0.06} = P(9.712249) \qquad \text{(por la tabla A.3.4).}$$

Por tanto, $P = 120,000/9.712249 = 12,355.53$ y la señora Jiménez recibirá una pensión anual de \$12,355.53.

Amortización

Cuando una deuda se salda mediante pagos constantes en un periodo, decimos que la deuda se **amortiza**. Por ejemplo, una persona podría pedir prestados al banco \$5000 con el propósito de adquirir un automóvil nuevo mediante el acuerdo de que una cantidad determinada le pagará al banco cada mes durante los próximos 24 meses. Nos gustaría determinar de cuánto deberían ser los pagos mensuales, dado que el banco fija un interés a cierta tasa sobre cada balance restante. Otro ejemplo de gran importancia son las hipotecas, que se liquidan mediante pagos regulares casi siempre a lo largo de 20 o 25 años.

Matemáticamente hablando, la amortización de una deuda presenta el mismo problema que el pago de una anualidad. Con una anualidad, podemos considerar que el receptor le prestó cierta cantidad a la compañía de seguros; ésta paga entonces la deuda mediante n pagos regulares iguales a una cantidad P cada uno. Sobre cada balance restante, la compañía agrega interés al crédito del acreedor a un interés del R por ciento por periodo. Ésta es la misma situación que aparece en el caso de un préstamo. Aquí el banco presta una cantidad determinada A al prestatario, el cual salda la deuda mediante n pagos regulares de P cada uno. Sobre cada saldo insoluto, el prestatario debe agregar interés a una tasa del R por ciento por periodo.

Respuesta $A = 5000a_{\overline{20}|0.08} = 49,090.74$

En consecuencia, la ecuación (1) también se aplica a la amortización de un préstamo.

$$A = Pa_{\overline{n}|i} \qquad \left(i = \frac{R}{100}\right) \tag{2}$$

EJEMPLO 4 Una pequeña compañía constructora planea expandir sus operaciones solicitando un préstamo al banco. Éste fija una tasa de interés del 1% mensual e insiste en que la deuda debe pagarse en un máximo de 24 meses. La compañía estima que puede comprometerse a pagar la deuda con pagos de $1500 al mes. ¿Cuánto es lo máximo que puede pedir al banco?

Solución En la fórmula anterior, hacemos $P = 1500$, $i = \frac{1}{100} = 0.01$ (dado que la tasa de interés del 1% por periodo, esto es, por mes en este caso) y $n = 24$. Se sigue que

$$A = 1500a_{\overline{24}|0.01} = 1500(21.243387) = 31{,}865.08$$

En consecuencia, la compañía puede pedir prestado hasta $31,865.08. ☛ **20**

☛ **20.** En el ejemplo 4, si la compañía sólo pide prestado $20,000, ¿cuáles serán los pagos mensuales, si con ellos se salda el préstamo en 18 meses?

EJEMPLO 5 ***(Préstamo hipotecario máximo)*** Un matrimonio tiene un ingreso combinado de $45,000. Su compañía hipotecaria les prestará una cantidad en la cual los pagos corresponden a una tercera parte de su ingreso. Si la tasa de interés es del 1.2% mensual amortizado en 25 años, ¿cuánto pueden pedir prestado?

Solución Aquí los pagos mensuales son de $P = (\frac{1}{3} \cdot 45{,}000) \div 12 = 1250$ e $i = 1.2/100 = 0.012$. En 25 años el número de pagos mensuales es $n = 25(12) = 300$. Por tanto, la suma que pueden pedir prestada es

$$\begin{aligned} A = Pa_{\overline{n}|i} &= \frac{P}{i}[1 - (1 + i)^{-n}] \\ &= \frac{1250}{0.012}[1 - (1.012)^{-300}] \\ &= 104166.67(0.97208) \\ &= \$101{,}258.80 \end{aligned}$$

Aquí usamos la fórmula para $a_{\overline{n}|i}$ porque el valor de $a_{\overline{n}|i}$ no está dado en la tabla A.3.4 para $n = 300$ e $i = 0.012$.

Por lo regular, necesitamos usar la ecuación (2) con el objetivo de calcular el monto de los pagos P. Despejando P, obtenemos

$$\boxed{P = \frac{iA}{1 - (1 + i)^{-n}} = \frac{A}{a_{\overline{n}|i}} \tag{3}}$$

Respuesta $P = \dfrac{20{,}000}{a_{\overline{18}|0.01}} = 1219.64$

EJEMPLO 6 Durante sus años en la universidad, un estudiante acumula préstamos de modo que, al graduarse, la deuda es de $8000. El préstamo acumula intereses al

8% anual y debe liquidarlo en pagos únicos al término de cada año. ¿Cuánto deberá pagar el estudiante cada año con el propósito de saldar la deuda en 5 años?

Solución La deuda inicial es $A = 8000$. El periodo de pago es $n = 5$. Puesto que la tasa de interés es $R = 8$, $i = R/100 = 0.08$. El pago anual se obtiene de la ecuación (3).

$$P = \frac{8000}{a_{\overline{5}|0.08}} = \frac{8000}{3.992710} = 2003.65$$

Por tanto, el estudiante deberá pagar \$2003.65 al término de cada año con objeto de amortizar la deuda en un plazo de 5 años.

EJERCICIOS 7-3

(1-8) Use la tabla A.3.4 para encontrar los siguientes valores.

1. $s_{\overline{6}|0.08}$ **2.** $s_{\overline{30}|0.01}$

3. $s_{\overline{36}|0.0075}$ **4.** $s_{\overline{40}|0.005}$

5. $a_{\overline{10}|0.01}$ **6.** $a_{\overline{15}|0.08}$

7. $a_{\overline{20}|0.005}$ **8.** $a_{\overline{36}|0.0075}$

(En lo que sigue, las tasas de interés indicadas, son tasas nominales).

(9-14) *(Plan de ahorro)* Encuentre el valor del plan de ahorro al final de:

9. Diez años si se depositan \$1000 al final de cada año en una cuenta que produce 8% de interés anualmente compuesto.

10. Cinco años si se depositan \$2000 al final de cada año al 6% de interés compuesto anualmente.

11. Cuatro años si se depositan \$500 al final de cada 6 meses al 8% de interés compuesto semestralmente.

12. Seis años si se depositan \$1000 al final de cada 3 meses al 8% de interés compuesto trimestralmente.

13. Tres años si se depositan \$200 al final de cada mes al 12% de interés compuesto mensualmente.

14. Cinco años si se depositan \$500 al final de cada 4 meses al 9% de interés compuesto tres veces al año.

(15-18) *(Planes de ahorro)* ¿Cuánto debe depositarse al final de:

15. Cada año durante 6 años para obtener la suma de \$15,000 al 8% anual de interés compuesto?

16. Cada 6 meses para obtener la suma de \$50,000 al final de 10 años cuando el interés compuesto ganado sea de 6% compuesto semestralmente?

17. Cada 3 meses para obtener la suma de \$20,000 al final de 4 años al 8% de interés anual compuesto trimestralmente?

18. Cada mes durante 3 años para obtener la suma de \$8000 al 12% de interés anual compuesto mensualmente?

(19-20) *(Planes de ahorro)* ¿Al final de qué año se tendrán:

19. \$5486.45 si se depositan \$100 al final de cada año al 6% anual de interés compuesto?

20. \$2950.21 si se depositan \$75 al final de cada mes al 6% de interés anual compuesto mensualmente?

21. *(Planes de ahorro)* Al inicio de cada año, se invierten \$2000 en un plan de ahorros, la tasa de interés es del 8% anual. Calcule el valor de la inversión:

a) Al término del quinto año;

b) Al finalizar el *n*-ésimo año.

22. *[Plan de ahorros (fondo de amortización)]* Jaime invierte dinero cada mes en un plan de ahorros que le paga intereses al $\frac{1}{2}$% mensual. Tres años (36 meses) después de empezar el plan, planea retirar el dinero y usarlo con el propósito de pagar la hipoteca de su casa. Si requerirá \$8000 para pagar la hipoteca, ¿cuánto deberá ahorrar cada mes?

23. *(Fondo de amortización)* El señor Gómez estima que enviar a su hijo a la universidad dentro de 8 años le costará \$20,000. Si deposita una suma de *P* dólares cada mes en una cuenta de ahorros que paga 6% anual de interés compuesto mensualmente, ¿cuánto deberá valer *P* para que el señor Gómez tenga \$20,000 cuando su hijo esté listo para su educación universitaria?

24. *(Plan de ahorro)* El señor López debe jubilarse dentro de 5 años y entonces quiere irse de vacaciones. Para lograrlo empieza a depositar $2500 cada año en una cuenta que paga 8% anual de interés compuesto. ¿Cuánto dinero tendrá para sus vacaciones?

***25.** *(Fondo de amortización)* Industrias Atlas estima que le costará $200,000 reemplazar cierta maquinaria dentro de 12 años, por lo que inicia un fondo de amortización con este propósito. Al principio hacen pagos anuales de $11,855.41 en una cuenta que paga 6% de interés compuesto anualmente. Después del octavo pago el banco incrementa a 8% la misma tasa de interés. ¿De cuánto deben ser los pagos restantes que haga la compañía?

***26.** *(Fondo de amortización)* La compañía Océano estima que le costará $120,000 reemplazar cierta maquinaria dentro de 10 años, por lo cual inicia un fondo de amortización con este propósito. Al comenzar deposita $1986.69 trimestralmente en una cuenta que paga 8% anual de interés compuesto trimestralmente. Después del trigésimo pago el banco incrementa a 12% la tasa de interés. ¿Cuánto deberá depositarse cada trimestre durante el tiempo restante?

(27-30) Encuentre el valor presente de una anualidad si:

27. Paga $500 anualmente durante 10 años a una tasa de interés del 7% anual.

28. Paga $2000 al final de cada semestre durante 5 años a una tasa de interés de 10% anual compuesto semestralmente.

29. Paga $750 trimestralmente durante 3 años a una tasa de interés de 8% anual compuesto trimestralmente.

30. Paga $300 mensualmente durante 2 años a una tasa de interés anual de 9% compuesto mensualmente.

(31-32) ¿Cuánto recibirá una persona al final de:

31. Cada año (durante 8), si compra una anualidad de $30,000 a una tasa de interés de 6% anual compuesto anualmente?

32. Cada mes durante 3 años si compra una anualidad de $25,000 a una tasa de interés de 12% anual compuesto anualmente?

33. *(Anualidad)* Un individuo desea adquirir una anualidad que le pagará $8000 cada año durante los próximos 15 años. Si la tasa de interés es del 6%, ¿cuál será el costo de tal anualidad?

34. *(Anualidad)* Si la esperanza de vida de un hombre es de 12 años al retirarse, ¿cuánto le costará comprar una anualidad vitalicia de $10,000 por año si la tasa de interés es del 8%?

35. *(Anualidad)* Repita el ejercicio 34 si la tasa de interés es

a) 7% *b*) 5%

36. *(Anualidad)* Si el sujeto del ejercicio 34 tiene $100,000 con los cuales comprar su anualidad, ¿cuánto recibirá de pensión anual?

37. *(Anualidad)* María recibe una herencia de $10,000 que invierte al 6% anual. Al término de cada año, ella desea retirar una suma *P* con objeto de tomarse unas vacaciones en Cancún. ¿De cuánto debe ser la cantidad *P* si el dinero está invertido a 10 años?

38. *(Anualidad)* Cuando Carlos se retiró, tenía $120,000 invertidos en bonos a largo plazo que pagan un interés del 5%. Al inicio de cada año, retira una cantidad *P* con el propósito de cumplir sus gastos del año. Si desea que el dinero le alcance para 15 años, ¿cuánto puede retirar cada año?

***39.** *(Anualidad)* En el ejercicio 38, calcule cuánto le queda a Carlos en los bonos exactamente después de realizar su décimo retiro.

40. *(Amortización de un préstamo)* Un préstamo de $5000 debe finiquitarse mediante pagos regulares mensuales en un periodo de 40 meses. Si la tasa de interés es del 1% mensual, ¿de cuánto deberían ser sus pagos mensuales?

41. *(Amortización de un préstamo)* Si el préstamo del ejercicio 40 debiera pagarse en 18 meses, ¿de cuánto deberían ser los pagos mensuales?

42. *(Amortización de un préstamo)* Samuel pide prestado $6000 al banco a un interés del 12% anual. Él cubre sus pagos regulares al término de cada año. Si el préstamo debe saldarse en 4 años, ¿de cuánto deben ser sus pagos anuales?

43. *(Amortización de hipotecas)* Una hipoteca de $40,000 debe saldarse mediante pagos mensuales en un periodo de 25 años (300 pagos). Si la tasa de interés es de $\frac{3}{4}$% por mes, calcule el pago mensual.

44. *(Amortización de hipotecas)* Resuelva de nuevo el ejercicio 43 si la hipoteca debe pagarse en 20 años.

***45.** *(Amortización de hipotecas)* En el ejercicio 43, calcule cuánto se debe de hipoteca:

a) Después de 5 años. *b*) Después de 15 años.

46. *(Préstamo para automóvil)* El señor Villa adquirió un automóvil nuevo por $15,000 e hizo un primer pago de 10% sobre su costo. El resto fue financiado por un banco al 12% compuesto mensualmente. Si el préstamo debe pagarse en 48 plazos mensuales, ¿de cuánto serán los pagos?

47. *(Hipoteca de una casa)* La casa de Saúl tiene un valor de \$90,000 y todavía tiene que hacer al banco 50 pagos mensuales más de \$450.00 con su hipoteca del 9%. ¿A cuánto asciende la hipoteca de su casa? (*Sugerencia*: El valor restante de una hipoteca es el valor de la casa menos el valor presente del préstamo hipotecario).

***48.** *(Hipoteca de una casa e inflación)* Hace siete años, Juan compró una casa en \$80,000 que se revaluó 9% al año debido a la inflación. Si Juan debe al banco 48 mensualidades de \$500 de su hipoteca al 12% anual, encuentre el monto actual de sus derechos sobre la casa.

***49.** *(Préstamo para automóvil)* Susana le paga al banco \$300 al mes por un préstamo para automóvil, al 12% anual compuesto mensualmente. Si el préstamo debe pagarse en 48 pagos iguales, qué proporción de su vigésimo quinto pago corresponde a intereses? (*Sugerencia*: Encuentre la deuda de Susana después del vigésimo cuarto pago calculando el valor presente de la anualidad restante).

***50.** *(Préstamo para automóvil)* El señor Suárez compró un automóvil por \$20,000 e hizo un pago de 15% sobre su costo. El resto lo pidió prestado en un banco, al 9% anual compuesto mensualmente. Si el préstamo debe pagarse en 36 pagos mensuales iguales, ¿de cuánto debe ser cada pago? ¿Qué proporción de su trigésimo pago es por intereses?

■ 7-4 ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Procesos a tiempo discreto

Las sucesiones que surgen en matemáticas financieras son ejemplos de procesos a tiempo discreto. Éstos son procesos que evolucionan con el tiempo pero tales que las variables implicadas cambian en ciertos puntos de tiempo definidos y discretos. Por ejemplo, el valor de una inversión que se compone mensualmente cambia al final de cada mes y la sucesión de valores forma un proceso discreto. (Al comparar esto con composición continua, que es un proceso a tiempo continuo en donde el valor cambia de un instante al otro).

Iniciaremos considerando el crecimiento de una inversión con k composiciones por año y tasa nominal de interés de $R\%$ anual. Entonces, la tasa de interés en cada composición es $(R/k)\%$. Denótese por A_0 la inversión inicial. Después de la primera composición, el valor, A_1, está dado por

$$A_1 = A_0 + \frac{R}{100k}A_0 = (1 + i)A_0 \qquad i = \frac{R}{100k}$$

Aquí el primer término es el monto original y el segundo es el interés. Para el paso general procedemos de manera similar. Denotamos el valor después de n composiciones por A_n de modo que el valor después de la siguiente composición será A_{n+1} y

$$A_{n+1} = A_n + \frac{R}{100k}A_n = (1 + i)A_n$$

Así tenemos una sucesión de valores, $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots,$ y una ecuación, $A_{n+1} = (1 + i)A_n$, que relaciona a cualesquiera dos valores sucesivos. Éste es un ejemplo de una ecuación en diferencias, la cual definiremos en un momento.

Primero, notemos que no es esencial que una sucesión cuyo término n-ésimo es T_n inicie realmente con el término denotado por T_1. Por ejemplo, en el análisis anterior del crecimiento de un inversión, los valores sucesivos se denotaron con $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots,$ y tenemos una sucesión que inicia con un **término en la posición cero**. En algunos casos, también puede ser conveniente incluir términos como T_{-1} o en otros casos iniciar una sucesión en, por ejemplo, T_2. En particular, con sucesiones que describen un proceso que evoluciona en el tiempo, por lo común es conveniente iniciar la sucesión con el término en la posición cero, que corresponde al instante inicial de tiempo en el que el proceso empieza. Por esta razón, en nuestro estudio general denotaremos la sucesión por

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$$

DEFINICIÓN Sea $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$ una sucesión de números reales. Una **ecuación en diferencias de orden *k*** es una ecuación que relaciona $y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+k}$ para todo valor de n ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$).

EJEMPLO 1

a) $y_{n+1} = 3y_n$ es una ecuación en diferencias de primer orden; es una ecuación que relaciona y_n y y_{n+1}

b) $ny_{n+1} + (n + 1)y_n = n^3$ también es una ecuación en diferencias de primer orden ya que, otra vez, sólo aparecen y_n y y_{n+1} en ella.

c) $y_{n+2} = y_n + y_{n+1}$ es una ecuación en diferencias de segundo orden; es una ecuación que relaciona y_n, y_{n+1} y y_{n+2}

d) $y_{n+2} = \sqrt{ny_n} - n - 1$ es también una ecuación en diferencia de segundo orden. (Observe que y_{n+1} no aparece en esta ecuación). ☛ **21**

☛ **21.** Dé el orden de las ecuaciones en las siguientes diferencias:
a) $y_{n+3} = ny_n$
b) $y_{n+2} - 2y_n = y_{n+1}$
c) $y_{n+1}^2\, y_n + 2y_n^3 = 1$

Observación Es importante darse cuenta de que si el índice n se reemplaza por cualquier otro índice que cubra el mismo rango de valores, la ecuación así obtenida es equivalente a la ecuación en diferencias original. Por ejemplo, de este modo n puede reemplazarse por $n - 1$ o $n - 2$ y la ecuación en diferencias permanece sin cambio. Por ejemplo, en el ejemplo *a*), al reemplazar n por $n - 1$, obtenemos la ecuación en diferencias equivalente

$$a') \qquad y_n = 3\, y_{n-1}$$

Tomando $n = 0$ en (a), obtenemos $y_1 = 3y_0$ y esta relación puede obtenerse de *a′*) haciendo $n = 1$. Tomando $n = 1$ en (a), obtenemos $y_2 = 3y_3$ y esto puede obtenerse de *a′*) haciendo $n = 2$, y así sucesivamente. Cualquiera de las relaciones obtenidas de *a*) dando valores particulares de n también pueden obtenerse de *a′*). De forma análoga, reemplazando n por $n - 1$ en el ejemplo *d*), obtenemos la ecuación en diferencias equivalente

$$d') \qquad y_{n+1} = \sqrt{(n-1)y_{n-1}} - n$$

o, de manera alterna, reemplazando n por $n - 2$, obtenemos otra forma equivalente:

$$d') \qquad y_n = \sqrt{(n-2)y_{n-2}} - n + 1$$

DEFINICIÓN Una **solución** de una ecuación en diferencias es un conjunto de valores para y_n como función de n tal que cuando estos valores se sustituyen en la ecuación en diferencias, la última ecuación se satisface como una identidad para todos los valores aplicables de n.

Respuesta *a*) 3; *b*) 2
c) 1

EJEMPLO 2 Escriba los primeros cuatro términos de la sucesión dada por

$$y_n = \tfrac{1}{2}\, n(n + 1) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Demuestre que esta sucesión es una solución de la ecuación en diferencias

$$y_n - y_{n-1} = n$$

Solución Haciendo $n = 1, 2, 3$ y 4 en la fórmula dada, obtenemos los primeros cuatro términos:

$$y_1 = \tfrac{1}{2}(1)(1 + 1) = 1 \qquad y_2 = \tfrac{1}{2}(2)(2 + 1) = 3$$
$$y_3 = \tfrac{1}{2}(3)(3 + 1) = 6 \qquad y_4 = \tfrac{1}{2}(4)(4 + 1) = 10$$

Es claro que estos términos satisfacen la ecuación en diferencias dada, por ejemplo $y_2 - y_1 = 2$, $y_3 - y_2 = 3$, etc. Sin embargo, debemos verificar que la sucesión es una solución para toda n. Como $y_n = \tfrac{1}{2}\, n(n + 1)$, el término precedente debe ser

$$y_{n-1} = \tfrac{1}{2}(n - 1)(n - 1 + 1) = \tfrac{1}{2}\, n(n - 1)$$

y sustituyendo éstos en el lado izquierdo de la ecuación en diferencias dada, obtenemos

$$\begin{aligned} y_n - y_{n-1} &= \tfrac{1}{2}\, n(n + 1) - \tfrac{1}{2}\, n(n - 1) \\ &= \tfrac{1}{2}\, n[(n + 1) - (n - 1)] \\ &= \tfrac{1}{2}\, n[2] = n \end{aligned}$$

☛ **22.** Demuestre que la sucesión $y_n = 2^n$ es una solución de la ecuación en diferencias $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$

y la ecuación en diferencias se satisface, como se requería. ☛ **22**

EJEMPLO 3 Demuestre que la sucesión cuyo n-ésimo término está dado por

$$y_n = \frac{1}{c + n} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

es una solución de la ecuación en diferencias

$$y_{n+1}(1 + y_n) = y_n$$

para cualquier valor positivo de la constante c.

Solución Si $y_n = \dfrac{1}{c + n}$, entonces $y_{n+1} = \dfrac{1}{c + n + 1}$. Por tanto, el lado izquierdo de la ecuación en diferencias es

$$\begin{aligned} y_{n+1}(1 + y_n) &= \frac{1}{c + n + 1}\left(1 + \frac{1}{c + n}\right) \\ &= \frac{1}{c + n + 1}\left(\frac{c + n + 1}{c + n}\right) \\ &= \frac{1}{c + n} = y_n \end{aligned}$$

Respuesta $2^{n+2} - 5 \cdot 2^{n+1} + 6 \cdot 2^n = 0$

y se satisface la ecuación en diferencias. (La razón para restringir de que c sea positiva es simplemente que si c es cero o un entero negativo, el denominador en uno de los términos de la sucesión se vuelve cero).

Observe que en el ejemplo 3 tenemos una ecuación en diferencias de primer orden y una solución que incluye una constante arbitraria, c. Ésta es una característica general a la cual regresaremos más adelante.

Solución por medio de iteración numérica

En los dos últimos ejemplos, la solución de la ecuación en diferencias ha sido dada como una fórmula algebraica para el n-ésimo término de la sucesión. Por lo común es muy deseable tener tal fórmula, y posteriormente se establecerán varias de tales fórmulas solución. Sin embargo, existen muchos casos en los que no puede encontrarse una fórmula para la solución de una ecuación en diferencias dada, y en tales casos debemos conformarnos con una tabla de valores de un número suficiente de términos en la sucesión solución. La construcción de tal tabla será ilustrada por medio de los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 4 Una cantidad de \$1000 se invirtió a una tasa de interés de 12% compuesto anualmente. Sea $A_0 = 1000$ la cantidad inicial y sea A_n el valor de la inversión después de n años. Escriba la ecuación en diferencias que satisface esta sucesión de valores y construya los términos hasta incluir A_8.

Solución Esto es similar al problema estudiado al inicio de esta sección. Aquí $R = 12$ y $k = 1$, de modo que $1 + i = 1.12$. La sucesión satisface la ecuación en diferencias $A_n = 1.12\ A_{n-1}$. Como conocemos el término inicial, es decir $A_0 = 1000$, podemos construir tantos términos de la sucesión como queramos, simplemente utilizamos repetidamente la ecuación en diferencias para $n = 1, 2, 3$, etc. Obtenemos,

$$n = 1: \qquad A_1 = 1.12A_0 = 1.12(1000) = 1120$$

$$n = 2: \qquad A_2 = 1.12A_1 = 1.12(1120) = 1254.4$$

$$n = 3: \qquad A_3 = 1.12A_2 = 1.12(1254.4) = 1404.928$$

TABLA 3

n	A_n
0	1000.00
1	1254.40
2	1404.93
3	1573.52
4	1762.34
5	1973.82
6	2210.68
7	2475.96
8	2773.08

y así sucesivamente. Continuando con este proceso, obtenemos los términos hasta A_8 en la tabla 3. (Los valores se han redondeado a dos decimales).

Observación En este ejemplo, la solución también puede expresarse por medio de una fórmula algebraica. Porque, utilizando la ecuación en diferencias con valores sucesivos de n,

$$A_1 = 1.12A_0$$

$$A_2 = 1.12A_1 = 1.12(1.12A_0) = (1.12)^2A_0$$

$$A_3 = 1.12A_2 = 1.12[(1.12)^2A_0] = (1.12)^3A_0$$

y así sucesivamente. De forma clara, el término general de la sucesión está dado por

$$A_n = (1.12)^n A_0$$

Por supuesto, esto no es más que la fórmula usual para el interés compuesto.

EJEMPLO 5 Dado que $y_0 = 1$, construya la solución hasta e incluyendo y_5 de la ecuación en diferencias

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 + y_n}$$

Solución Haciendo $n = 0, 1, 2, 3$ y 4 en la ecuación en diferencias, encontramos sucesivamente las soluciones para y_1, y_2, y_3, y_4 y y_5:

$$n = 0: \qquad y_1 = \frac{1}{1 + y_0} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$n = 1: \qquad y_2 = \frac{1}{1 + y_1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$n = 2: \qquad y_3 = \frac{1}{1 + y_2} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$n = 3: \qquad y_4 = \frac{1}{1 + y_3} = \frac{1}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{5}{8}$$

$$n = 4: \qquad y_5 = \frac{1}{1 + y_4} = \frac{1}{1 + \frac{5}{8}} = \frac{8}{13}$$

☛ **23**

☛ **23.** Calcule los primeros cuatro términos, si $y_0 = 2$ y $y_{n+1}\, y_n + 2y_n^2 = n$

EJEMPLO 6 Entre la población de Norteamérica, varias personas sufren de cierta enfermedad por debilitamiento. Cada año 1000 nuevos casos de la enfermedad aparecen y la mitad de los casos existentes son sanados. Al final de 1991 había 1200 casos de la enfermedad. Calcule el número de casos esperados al final de cada año subsecuente hasta 1998.

Solución Denotemos el final de 1991 por $n = 0$ y los años subsecuentes por $n = 1, 2, 3$, etc. Entonces $n = 7$ corresponde al final de 1998. Sea y_n el número de casos al final del año n. Entonces, primero, $y_0 = 1200$, el número de casos al final de 1991.

Segundo, el número de casos y_n consiste en la mitad de los casos y_{n-1} del año anterior que se quedan sin curar más 1000 nuevos casos. De modo que, podemos escribir la ecuación en diferencias

$$y_n = 0.5y_{n-1} + 1000$$

Construimos la solución poniendo n sucesivamente igual a 1, 2, 3, . . . Encontramos:

$$n = 1: \qquad y_1 = 0.5y_0 + 1000 = 0.5(1200) + 1000 = 1600$$

$$n = 2: \qquad y_2 = 0.5y_1 + 1000 = 0.5(1600) + 1000 = 1800$$

$$n = 3: \qquad y_3 = 0.5y_2 + 1000 = 0.5(1800) + 1000 = 1900$$

Respuesta $y_0 = 2$, $y_1 = -4$, $y_2 = \frac{31}{4}$, $y_3 = -\frac{945}{62}$

TABLA 4

n	Año	A_n
0	1991	1200
1	1992	1600
2	1993	1800
3	1994	1900
4	1995	1950
5	1996	1975
6	1997	1988
7	1998	1994

y así sucesivamente. La solución completa hasta $n = 7$ se da en la tabla 4. Vemos que al final de 1998 el número de casos es igual a 1994.

Esta técnica de calcular la solución por medio de evaluación numérica de términos sucesivos algunas veces se denomina **solución por iteración**. Es un método muy conveniente si tiene una computadora, o incluso una calculadora programable. El programa puede diseñarse para que repita las iteraciones sucesivas de la ecuación en diferencias, y así calcular tantos términos de la sucesión como sean necesarios.

Ecuaciones en diferencias lineales de primer orden

En los últimos tres ejemplos construimos las soluciones de ciertas ecuaciones en diferencias por medio de evaluación numérica directa de elementos sucesivos de la sucesión. Este enfoque siempre es posible y, en realidad para muchas ecuaciones es la única forma de obtener una solución. Sin embargo, existen ciertos tipos de ecuaciones en diferencias para los cuales puede encontrarse una fórmula algebraica para determinar el término general de la sucesión, y nuestro objetivo en el resto de esta sección es examinar una clase de tales ecuaciones junto con algunas de sus aplicaciones, en particular en matemáticas financieras.

En el ejemplo 4, construimos la solución de la ecuación en diferencias $A_n = 1.12A_{n-1}$ por medio de iteración numérica. Siguiendo ese ejemplo observamos que, de hecho, la solución puede expresarse por medio de la fórmula $A_n = (1.12)^n A_0$. Este resultado se generaliza como sigue.

TEOREMA 1 La solución general de la ecuación en diferencias

$$y_n = ay_{n-1}$$

en donde a es una constante dada, es

$$y_n = ca^n$$

en donde c es una constante arbitraria. El valor de c está determinado si se da un elemento de la sucesión: si se da y_p, entonces

$$c = y_p a^{-p}$$

DEMOSTRACIÓN Escribiendo la ecuación en diferencias sucesivamente para $n = 1, 2, 3, \ldots,$ encontramos

$$\begin{aligned} n = 1: &\qquad y_1 = ay_0 \\ n = 2: &\qquad y_2 = ay_1 = a(ay_0) = a^2y_0 \\ n = 3: &\qquad y_3 = ay_2 = a(a^2\,y_0) = a^3y_0 \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Es obvio que en general $y_n = a^n y_0$. (Si está familiarizado con el método de inducción, será capaz de proporcionar una justificación rigurosa de este hecho "obvio"). Así está demostrada la primera parte del teorema, con $c = y_0$. La segunda parte se sigue de inmediato poniendo $n = p$ en la fórmula general: $y_p = a^p y_0$. Entonces,

$$c = y_0 = y_p \div a^p = y_p\, a^{-p}$$

La solución $y_n = ca^n$ de la ecuación en diferencias $y_n = ay_{n-1}$ es una sucesión con crecimiento exponencial si $a > 1$ y es una sucesión con decaimiento exponencial si $0 < a < 1$. Observe que la solución general de la ecuación en diferencias incluye una constante arbitraria c. Con la finalidad de determinar el valor de esta constante se requiere un poco más de información; a saber, el valor de un término de la sucesión. En la práctica, por lo común el término inicial es uno que está dado. Encontraremos esta característica repetida para otras ecuaciones en diferencias de primer orden: la solución general incluye una constante arbitraria y se necesita información adicional para determinar esa constante.

EJEMPLO 7 Encuentre la solución de la ecuación en diferencias

$$y_{n+1} = -0.5y_n$$

para la cual $y_5 = 2$

Solución Podemos utilizar el teorema 1 con $a = -0.5$. La solución general es

$$y_n = c(-0.5)^n$$

en donde $c = y_p a^{-p} = y_5(-0.5)^{-5} = 2(-0.5)^{-5} = -2^6$. Así, sustituyendo este valor de c obtenemos

☛ **24.** Determine la solución de $y_n = -5y_{n-1}$, $y_2 = -3$

$$y_n = -2^6(-\tfrac{1}{2})^n = (-1)^{n-1}\,2^{6-n}$$ ☛ **24**

El siguiente teorema trata con una ecuación en diferencias que desempeña un papel fundamental en gran parte de las matemáticas financieras, como veremos en ejemplos posteriores.

TEOREMA 2 La solución general de la ecuación en diferencias

$$y_n = ay_{n-1} + b$$

en donde a y b son constantes dadas (con $a \neq 1$), es

$$y_n = ca^n - \frac{b}{a-1}$$

en donde c es una constante arbitraria. El valor de c está determinado si se conoce un elemento de la sucesión. Si se conoce y_p, entonces,

$$c = a^{-p}\left[y_p + \frac{b}{a-1}\right]$$

En particular, si se conoce y_0, entonces $c = y_0 + \dfrac{b}{a-1}$

DEMOSTRACIÓN Defínase

$$z_n = y_n + \frac{b}{a-1}$$

Respuesta $y_n = -3 \cdot (-5)^{n-2}$

☛ **25.** Determine la solución para la que $y_0 = 2$ de
a) $y_n + y_{n-1} = 3$
b) $y_n + 3y_{n-1} = 3$

Entonces,

$$\begin{aligned} z_n - az_{n-1} &= \left[y_n + \frac{b}{a-1}\right] - a\left[y_{n-1} + \frac{b}{a-1}\right] \\ &= \underbrace{y_n - ay_{n-1}}_{=b} + \underbrace{\frac{b}{a-1}[1-a]}_{=-b} \\ &= b - b = 0 \end{aligned}$$

Así las cantidades z_n satisfacen la ecuación en diferencias $z_n - az_{n-1} = 0$. Por tanto, por el teorema 1, la solución para ellas es $z_n = ca^n$, donde c es una constante. En consecuencia, de la definición de z_n,

$$y_n = z_n - \frac{b}{a-1} = ca^n - \frac{b}{a-1}$$

como se requería.

La expresión dada en el enunciado del teorema para c en términos de y_p se obtiene simplemente resolviendo para c la ecuación

$$y_p = ca^p - \frac{b}{a-1}$$

Nota Si $a = 1$, la solución general está dada por $y_n = y_0 + nb$

EJEMPLO 8 Encuentre la solución de la ecuación en diferencias

$$y_n - 2y_{n-1} = 3 \qquad y_1 = 5$$

Solución Esta ecuación en diferencias es del tipo en el teorema 2, con $a = 2$ y $b = 3$. Por tanto la solución es

$$y_n = ca^n - \frac{b}{a-1} = c2^n - \frac{3}{2-1} = c2^n - 3.$$

Haciendo $n = 1$ y utilizando el valor dado de y_1 tenemos

$$y_1 = c2^1 - 3 = 2c - 3 = 5$$

o bien, $c = 4$. Por consiguiente, la solución final es

$$y_n = 4 \cdot 2^n - 3 = 2^{n+2} - 3$$ ☛ **25**

Aplicaciones de ecuaciones en diferencias en matemáticas financieras

Ahora reexaminaremos los temas de matemáticas financieras estudiados en la sección 7-3; pero ahora utilizando ecuaciones en diferencias. Los ejemplos, en gran parte, serán los mismos que los utilizados anteriormente, de modo que usted pueda comparar los dos enfoques.

Respuesta *a*) $y_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n$

b) $y_n = \frac{3}{4} + \frac{5}{4}(-3)^n$

EJEMPLO 9 Cada mes Jane deposita \$100 en un plan de ahorros que genera interés al $\frac{1}{2}$% mensual. Calcule el valor de sus ahorros *a*) inmediatamente después de que haga su *n*-ésimo depósito y *b*) inmediatamente después de que haga su depósito número 25.

Solución Sea y_n el valor del plan inmediatamente después del depósito n. Entonces, primero, el valor inicial es $y_1 = 100$. (Un valor alterno inicial sería $y_0 = 0$). Segundo, podemos relacionar y_n con el valor precedente y_{n-1} como sigue:

Valor después del depósito

n = Valor después del depósito $(n-1)$ + Interés + Nuevo depósito

$$y_n = y_{n-1} + 0.005y_{n-1} + 100$$

El segundo término del lado derecho es el interés sobre el monto y_{n-1} para un mes a la tasa de $\frac{1}{2}$%. Así,

$$y_n = 1.005y_{n-1} + 100$$

que es la ecuación en diferencias del mismo tipo que en el teorema 2. Las dos constantes son $a = 1.005$ y $b = 100$, y así, con base en el teorema, la solución es

$$y_n = ca^n - \frac{b}{a-1} = c(1.005)^n - \frac{100}{1.005 - 1} = c(1.005)^n - 20{,}000$$

Haciendo $n = 1$ y utilizando la condición inicial, obtenemos

$$y_1 = 1.005c - 20{,}000 = 100$$

lo cual implica que $c = 20{,}000$. Así la solución a la parte *a*) es

$$y_n = 20{,}000[(1.005)^n - 1]$$

Para responder la parte *b*) simplemente tomamos $n = 25$ en esta fórmula:

$$y_n = 20{,}000[(1.005)^{25} - 1] = 20{,}000(1.13280 - 1) = 2655.91$$

El valor del plan de ahorro después de 25 depósitos es \$2655.91. Estas respuestas son las mismas que las que obtuvimos en el ejemplo 1 de la sección 7-3. ☛ **26**

☛ **26.** En el ejemplo 9, escriba la ecuación en diferencias, si los pagos mensuales son de \$150 y la tasa de interés es 1% mensual. Encuentre la solución general y la solución que satisface $y_0 = 0$

Generalizamos este ejemplo. Supóngase que una cantidad P se deposita en un plan de ahorro al final de cada periodo, en donde el periodo podría ser un mes, un trimestre, un año o cualquier otra longitud fija de tiempo. Sea R la tasa de interés por periodo. Como en el ejemplo, sea y_n el valor de la inversión inmediatamente después de que se hace el n-ésimo depósito. Entonces, como antes,

Valor después del depósito

n = Valor después del depósito $(n-1)$ + Interés + Nuevo depósito

$$y_n = y_{n-1} + \frac{R}{100}y_{n-1} + P$$

Respuesta $y_n = y_{n-1} + 0.01y_{n-1} + 150$,
$y_n = c(1.01)^n - 15{,}000$,
$y_n = 15{,}000[(1.01)^n - 1]$

Por lo regular, esta ecuación en diferencias se escribe como

$$y_n = (1 + i)y_{n-1} + P \qquad i = \frac{R}{100}$$

Tiene la forma dada en el teorema 2 con las constantes $a = 1 + i$ y $b = P$. Por tanto, la solución es

$$y_n = ca^n - \frac{b}{a-1} = c(1 + i)^n - \frac{P}{(1 + i) - 1} = c(1 + i)^n - \frac{P}{i}$$

Para la condición inicial, podemos utilizar el valor después del primer pago, $y_1 = P$, o el valor antes de que se haga el primer pago, $y_0 = 0$. Obtendremos el mismo valor de c en cualquier caso. Utilizando la primer condición,

$$y_1 = c(1 + i) - \frac{P}{i} = P$$

lo cual da $c = P/i$. Sustituyendo esta constante en la solución general anterior da el resultado final

$$y_n = \frac{P}{i}[(1 + i)^n - 1]$$

Como en la sección 7-3, utilizamos la notación siguiente para esta solución:

$$\boxed{y_n = Ps_{\overline{n}|i} \qquad \text{donde} \qquad s_{\overline{n}|i} = \frac{1}{i}[(1 + i)^n - 1]}$$

Puede encontrar valores tabulados de $s_{\overline{n}|i}$ para diferentes valores de n e i en la última columna de la tabla A.3.4 en el apéndice III.

Ahora considere el pago de un préstamo, por ejemplo, la liquidación de la hipoteca de una casa o un préstamo automotriz. Aquí, un banco u otra agencia de préstamos presta cierta suma a un cliente, quien lo salda por medio de pagos regulares, por lo común mensuales. Antes de estudiar la fórmula general para este tipo de situación, considere un ejemplo específico.

EJEMPLO 10 Una pequeña compañía constructora desea pedir prestado a un banco, para expansión de sus operaciones. El banco cobra interés al 1% mensual sobre el saldo insoluto del préstamo y exige que el préstamo se liquide en 24 pagos mensuales. La compañía estima que puede permitirse pagar el préstamo a un ritmo de \$1500 mensuales. ¿Cuál es la cantidad máxima que pueden pedir prestada?

Solución Sea y_n el saldo insoluto del préstamo inmediatamente después del n-ésimo pago. Como el préstamo se liquidará en 24 pagos, es necesario que $y_{24} = 0$. También podemos deducir una ecuación en diferencias como sigue:

Balance después de n pagos

$$= \text{Balance después de } (n-1) \text{ pagos} + \text{Interés} - \text{Un pago}$$

$$y_n = y_{n-1} + 0.01y_{n-1} - 1500$$

en donde el segundo término de la derecha es el interés mensual sobre el saldo insoluto, y_{n-1}. Esto puede escribirse así

$$y_n = 1.01y_{n-1} - 1500$$

que tiene la misma forma general que la ecuación en diferencias del teorema 1 con las constantes $a = 1.01$ y $b = -1500$. Por tanto, la solución es

$$y_n = ca^n - \frac{b}{a-1} = c(1.01)^n + \frac{1500}{1.01 - 1} = c(1.01)^n + 150{,}000$$

Para determinar c debemos hacer $n = 24$:

$$y_{24} = c(1.01)^{24} + 150{,}000 = 0$$

y así $c = -150{,}000(1.01)^{-24}$. Sustituyendo este valor de c en la solución anterior para y_n, obtenemos

$$y_n = 150{,}000[1 - (1.01)^{-(24-n)}]$$

☛ **27.** En el ejemplo 10, escriba la ecuación en diferencias, si los pagos mensuales son de \$900 y la tasa de interés es $\frac{1}{2}$% mensual. Determine la solución general y la solución que satisface $y_{24} = 0$

Estamos interesados en determinar la cantidad inicial del préstamo, que es el saldo insoluto, y_0, antes del primer pago. Haciendo $n = 0$, obtenemos

$$y_0 = 150{,}000[1 - (1.01)^{-24}] = 150{,}000[1 - 0.7875661] = 31{,}865.08$$

Por tanto, el préstamo máximo que la compañía puede obtener es \$31,865.08. ☛ **27**

Ahora generalizaremos este ejemplo. Supongamos que el préstamo inicial es A dólares y que se liquidará en pagos regulares de P dólares cada uno. Sea R por ciento la tasa de interés por periodo entre los pagos. Como en el ejemplo, sea y_n el saldo insoluto del préstamo inmediatamente después del pago n-ésimo. Entonces, tenemos

Balance después de n pagos

$$= \text{Balance después de } (n-1) \text{ pagos} + \text{Interés} - \text{Un pago}$$

$$y_n = y_{n-1} + \frac{R}{100}y_{n-1} - P$$

Reescribimos esto como

$$y_n = (1+i)y_{n-1} - P, \quad \text{donde} \quad i = \frac{R}{100}$$

La solución de esta ecuación en diferencias se obtiene del teorema 2 con $a = (1 + i)$ y $b = -P$:

$$y_n = ca^n - \frac{b}{a-1} = c(1+i)^n + \frac{P}{(1+i)-1} = c(1+i)^n + \frac{P}{i}$$

Respuesta $y_n = 1.005y_{n-1} - 900$, $y_n = c(1.005)^n + 180{,}000$, $y_n = 180{,}000[1 - (1.005)^{-(24-n)}]$

Ahora, el préstamo inicial (que es igual al saldo insoluto y_0 después de cero pagos) está dado por

$$A = y_0 = c(1 + i)^0 + \frac{P}{i} = c + \frac{P}{i}$$

y así $c = A - P/i$. Sustituyendo este valor de c en la solución para el saldo insoluto,

$$y_n = \left(A - \frac{P}{i}\right)(1 + i)^n + \frac{P}{i}$$

Ahora supóngase que n es tal que el préstamo se ha liquidado por completo. Esto significa que el saldo insoluto se ha reducido a cero: $y_n = 0$. Esto da la ecuación

$$\left(A - \frac{P}{i}\right)(1 + i)^n + \frac{P}{i} = 0$$

de la cual obtenemos

$$A - \frac{P}{i} + \frac{P}{i}(1 + i)^{-n} = 0$$

Por lo común, este resultado se escribe

$$\boxed{A = Pa_{\overline{n}|i} \qquad \text{donde} \qquad a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{i}[1 - (1 + i)^{-n}]}$$

EJEMPLO 11 Durante sus años como universitaria, una estudiante acumula préstamos estudiantiles que totalizan \$8000. El préstamo será pagado en los siguientes 5 años por medio de un solo pago al final de cada año. La tasa de interés es 8% anual. Sea y_n el saldo insoluto del préstamo después del pago n-ésimo. Escriba la ecuación en diferencias que satisface la sucesión y_n y obtenga su solución. Determine el monto de cada pago. ¿Cuánto requerirá la ex estudiante si ella piensa saldar el préstamo inmediatamente después del segundo pago?

Solución En términos de la notación general, $R = 8$, de modo que $i = 0.08$. El balance inicial es $y_0 = 8000$. Sea P el monto de cada pago. Entonces tenemos la ecuación en diferencias

Balance después de n pagos

= Balance después de $(n - 1)$ pagos + Interés – Un pago

$$y_n = y_{n-1} + \frac{8}{100}y_{n-1} - P = 1.08y_{n-1} - P$$

Con base en el teorema 2, con $a = 1.08$ y $b = -P$, la solución general es

$$y_n = c(1.08)^n + \frac{P}{0.08} = c(1.08)^n + 12.5P$$

Haciendo $n = 0$ en ésta, encontramos

$$y_0 = c + 12.5P = 8000$$

de modo que $c = 8000 - 12.5P$. Así,

$$y_n = (8000 - 12.5P)(1.08)^n + 12.5P$$

Si el préstamo se liquida en 5 años, $y_5 = 0$:

$$y_5 = (8000 - 12.5P)(1.08)^5 + 12.5P = 0$$

Despejando de aquí a P, obtenemos

$$P = \frac{8000}{12.5[1 - (1.08)^{-5}]} = 2003.65$$

Por lo que los pagos son de $2003.65 cada año. El balance restante en el préstamo después de dos pagos, está dado por

$$\begin{aligned} y_2 &= (8000 - 12.5P)(1.08)^2 + 12.5P \\ &= [8000 - 12.5(2003.65)][(1.08)^2 + 12.5(2003.65) = 5163.61 \end{aligned}$$

Por tanto, el balance es $5163.61 después de los primeros dos pagos, y éste es el monto que necesita pagarse para liquidar el préstamo. ☛ **28**

☛ **28.** Repita el ejemplo 11, si los $8000 prestados se pagarán en pagos trimestrales durante cinco años, con tasa de interés de 2% por trimestre.

Respuesta $y_n = 1.02y_{n-1} - P$, $y_n = (8000 - 50P)(1.02)^n + 50P$

donde

$$P = \frac{160}{1 - (1.02)^{-20}} = 489.25$$

Otra situación muy similar es aquella en que una persona jubilada compra una anualidad para obtener una pensión, por lo común la anualidad se compra a una compañía de seguros.

EJEMPLO 12 Después de la muerte del señor Josephs, su viuda utilizó parte de su capital para comprar una anualidad que le será pagada mensualmente, empezando un mes después de que la compre. La compañía de seguros da una tasa de interés de 0.5% mensual y estima que la esperanza de vida de la viuda es de 10 años. Si la señora Josephs desea recibir un ingreso mensual de $1000, ¿cuánto capital necesitará invertir? Si en realidad ella sobrevive durante 15 años, ¿cuál será el valor, en el instante que ella muera, de la pérdida en que incurre la compañía de seguros en la transacción?

Solución Sea y_n el balance del capital restante con la compañía de seguros después del n-ésimo pago. Entonces $y_{120} = 0$, ya que el plan está diseñado para realizar exactamente 120 pagos mensuales. El capital inicial que la señora Josephs debe depositar es y_0.

Podemos deducir una ecuación en diferencias como en el ejemplo 11:

Balance después de n pagos

= Balance después de (n – 1) pagos + Interés – Un pago

$$y_n = y_{n-1} + \frac{0.5}{100} y_{n-1} - 1000 = 1.005y_{n-1} - 1000$$

Con base en el teorema 2, con $a = 1.005$ y $b = -1000$, obtenemos la solución

$$y_n = c(1.005)^n - \frac{-1000}{0.005} = c(1.005)^n + 200{,}000$$

Entonces,

$$y_{120} = c(1.005)^{120} + 200{,}000 = 0$$

lo cual determina la constante c como $c = -200{,}000(1.005)^{-120}$. Así,

$$y_0 = c(1.005)^0 + 200{,}000 = 200{,}000[1 - (1.005)^{-120}] = 90{,}073.45$$

El capital inicial invertido para esta anualidad es \$90,073.45. Si la señora Josephs sobrevive durante 15 años, la compañía debe hacer 180 pagos mensuales, de modo que el valor del capital de la anualidad hasta su muerte sea y_{180}. Esto es,

$$y_{180} = c(1.005)^{180} + 200{,}000 = 200{,}000[1 - (1.005)^{60}] = -69{,}770.02$$

El hecho de que ésta es negativa representa una pérdida para la compañía de seguros, la cantidad de la pérdida será de \$69,770.02.

EJERCICIOS 7-4

(1-6) Determine el orden de las siguientes ecuaciones en diferencias.

1. $y_{n+1} + 2y_n = \dfrac{1}{n}$

2. $x_{n+1} + (x_n)^2 = 0$

3. $u_{n+3} + \dfrac{1}{u_{n-1}} = nu_{n+2}$

4. $y_{n-2} + \ln (y_n) = 1$

5. $t_{n+4} + 5t_{n-1} = (n + 3)^2$

6. $nx_{n-3} + \sqrt{n}\, x_{n-1} = 4$

(7-14) Demuestre que las siguientes sucesiones, cuyos n-ésimos términos se proporcionan a continuación, son las soluciones de las ecuaciones en diferencias indicadas (a, b y c son constantes).

7. $y_n = 3n + c; \quad y_{n+1} - y_n = 3$

8. $y_n = n(n + 2) + c; \quad y_{n+1} - y_n = 2n + 3$

9. $y_n = (-1)^n(n + c); \quad y_n + y_{n-1} = (-1)^n$

10. $y_n = 2^n(an + b); \quad y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0$

11. $y_n = (-3)^n(an + b); \quad y_{n+2} + 6y_{n+1} + 9y_n = 0$

12. $y_n = a \cdot 2^n + b \cdot 3^n; \quad y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$

13. $y_n = a + b(-1)^n; \quad y_{n+2} = y_n$

14. $y_n = a(-1)^n + b(2^n) + c(-3)^n;$

$y_{n+2} + 2y_{n+1} - 5y_n - 6y_{n-1} = 0$

(15-16) Construya una tabla de valores de la solución de cada una de las ecuaciones en diferencias siguientes para el valor indicado de n.

15. $y_n - y_{n-1} = (0.6 - 0.01y_{n-1})y_{n-1};$

$y_0 = 10, \quad 0 \le n \le 10$

16. $y_n - y_{n-1} = (1.5 - 0.001y_{n-1})y_{n-1};$

$y_0 = 1800, \quad 0 \le n \le 10$

17. Cierta población tiene un tamaño inicial de 10,000 y está creciendo 10% cada año. Si y_n denota el tamaño de la población después de n años, escriba la ecuación en diferencias para y_n. Proporcione una tabla de valores de y_n para $n = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

18. Una suma de \$5000 se invierte a una tasa de interés de 15% compuesta anualmente. Si A_n denota el valor de la inversión después de n años, escriba la ecuación en diferencias para A_n. Proporcione una tabla de valores de A_n para $n = 0, 1, 2, \ldots, 8$.

(19-33) Resuelva las ecuaciones en diferencias siguientes.

19. $y_n - 2y_{n-1} = 0$

20. $2y_{n+1} + 3y_n = 0$

21. $y_n - 3y_{n-1} = 0; \quad y_0 = 5$

22. $y_n - 1.2y_{n-1} = 0; \quad y_0 = 100$

23. $y_n + y_{n-1} = 2$

24. $y_n - \frac{1}{2} y_{n-1} = 3$

25. $y_n - 2y_{n-1} = 1$

26. $y_n - 3y_{n-1} = -5$

27. $y_n - 0.5y_{n-1} = 4; \quad y_3 = 8$

28. $y_n - 3y_{n-1} = 9; \quad y_3 = 5$

29. $y_n - y_{n-1} = 4; \quad y_0 = 6$

30. $y_n = y_{n-1} + 2; \quad y_3 = 25$

31. $y_n - 0.2y_{n-1} = 4; \quad y_0 = 25$

32. $y_n + 2y_{n-1} = -6; \quad y_0 = 0.5$

33. $y_n + y_{n-1} + 6 = 0; \quad y_5 = -7$

(34-36) Resuelva los problemas siguientes utilizando ecuaciones en diferencias.

34. Los activos de cierta compañía se han incrementado en 10% cada año. Si tenían \$100 millones al final de 1988, ¿cuántos años les tomará exceder \$200 millones?

35. El señor Black ha invertido \$50,000 a una tasa de interés de 10% compuesto anualmente. Si retira \$3000 cada año en el aniversario de su depósito, ¿en cuántos años su inversión será mayor a \$65,000?

36. Cierta población tiene un tamaño inicial de 1000 y crece 50% cada año. Si la población se recolecta a una tasa de 400 por año, determine el tamaño de la población en cada uno de los primeros 8 años.

37. Una suma de \$5000 se deposita en una cuenta de ahorros que paga 6% de interés compuesto anualmente. Si y_n denota la cantidad después de n años, escriba la ecuación en diferencias de y_n y luego resuélvala. ¿Cuánto dinero estará en la cuenta al final de 8 años?

38. Una suma de \$2000 se deposita en una cuenta de ahorros que paga 5% de interés compuesto anualmente. Si y_n denota la cantidad en la cuenta después de n años, escriba la ecuación en diferencias de y_n y resuélvala. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta al final de 5 años?

39. Una suma de \$2000 se invierte a un interés *simple* de 8% anual. Si y_n denota el valor de la inversión después de n años, escriba la ecuación en diferencias para y_n y resuélvala. ¿Cuál es el valor de la inversión al final de 10 años?

40. Una suma de \$8000 se invierte a un interés *simple* de 6% por año. Si y_n denota el valor de la inversión después de n años, escriba la ecuación en diferencias de y_n y resuélvala. ¿Cuál es el valor de la inversión al final de 5 años?

41. El señor White tomó un préstamo de \$5000 al 15% de interés compuesto anualmente y prometió pagar \$900 al final de cada año. Si y_n denota el monto que adeuda después de n años (después de que se hizo el pago anual).

   a) Escriba la ecuación en diferencias para y_n y resuélvala.

   b) ¿Cuánto debe el señor White después de que ha hecho su décimo pago?

42. La señorita Susan pidió prestada una suma de \$8000 a un banco al 12% de interés compuesto mensualmente y prometió pagar \$600 al final de cada mes. Denótese con y_n el balance de la deuda después de n pagos.

   a) Escriba la ecuación en diferencias para y_n y resuélvala.

   b) ¿Cuánto debe la señorita Susan después de su décimo sexto pago?

43. Cada mes Steve deposita \$200 en un plan de ahorro que genera un interés de 1% mensual. Denótese con y_n el valor del plan de ahorros inmediatamente después del n-ésimo depósito.

   a) Escriba la ecuación en diferencias para y_n y resuélvala.

   b) ¿Cuál es el valor de este plan inmediatamente después de su depósito trigésimo?

44. Cada año John deposita \$500 en un plan de ahorros que devenga un interés de 8% anual compuesto anualmente. Sea y_n el valor del plan de ahorro inmediatamente después del n-ésimo depósito.

   a) Escriba la ecuación en diferencias para y_n y resuélvala.

   b) ¿Cuál es el valor de su plan inmediatamente después de su depósito vigésimo quinto?

45. Sue quiere pedir prestado algún dinero al banco para renovar su casa. Ella puede pagar \$200 mensuales y el banco cobra un interés de 1.25% mensual. El préstamo será liquidado en 3 años. Sea y_n el balance del préstamo del banco después de n pagos.

   a) Determine la ecuación en diferencias que satisface y_n y resuélvala.

   b) Determine exactamente, cuánto puede pedir prestado Sue.

   c) ¿Cuánto deberá aún al banco después de que haga su pago vigésimo?

46. El señor Brown puede comprometerse a pagar \$500 mensuales y el banco cobra 12% de interés anual compuesto mensualmente. Su préstamo será liquidado en 25 años. Denote con y_n al balance que debe al banco después de n pagos.

a) Determine la ecuación en diferencias que satisface y_n y resuélvala.

b) Exactamente, ¿cuánto puede pedir el señor Brown al banco?

c) ¿Cuánto deberá aún al banco después de que haya hecho el pago centésimo?

47. Mary pidió prestada una suma de $10,000 a un banco para comprar un automóvil nuevo. El banco cobra un interés de 12% anual compuesto mensualmente y el préstamo se saldará en pagos mensuales iguales de $*P* cada uno. Sea y_n el monto que se debe después de n pagos mensuales.

a) Determine la ecuación en diferencias que satisface y_n y resuélvala.

b) Determine el pago mensual de $*P* al banco, si el préstamo se liquidará en 4 años.

48. Bruce pidió prestados $15,000 a un banco para renovar su casa. El banco cobra un interés de 15% anual compuesto mensualmente y el préstamo se liquidará en pagos mensuales iguales de $*P* cada uno. Sea y_n el monto que se debe después de n pagos mensuales.

a) Determine la ecuación en diferencias que satisface y_n y resuélvala.

b) Determine el pago mensual de $*P* al banco, si el préstamo se liquidará en 5 años.

49. El señor John quiere comprar una anualidad que le proporcione $500 cada mes durante 10 años y la tasa de interés es 12% anual compuesto mensualmente. Sea y_n el capital restante en la anualidad después de n pagos.

a) Escriba la ecuación en diferencias que satisface y_n y resuélvala.

b) ¿Cuánto debe pagar para comprar esta anualidad?

50. El señor Tom quiere comprar una anualidad que le proporcione $3000 cada año durante los siguientes 15 años y la tasa de interés es 8% anual compuesto anualmente. Sea y_n el principal que queda después de n pagos.

a) Escriba la ecuación en diferencias que satisface y_n y resuélvala.

b) ¿Cuánto debe pagar para comprar esta anualidad?

■ 7-5 NOTACIÓN DE SUMATORIA (SECCIÓN OPCIONAL)

Una notación conveniente para expresar sumas que involucran gran cantidad de términos es la notación sumatoria. Ésta se utiliza a menudo en estadística y otras ramas de las matemáticas.

De acuerdo con esta notación, la suma

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

se abrevia mediante la expresión

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Se lee como "la suma de x_i cuando i va desde 1 hasta n". La letra griega Σ (sigma mayúscula) corresponde a nuestra *S* en el alfabeto castellano y sugiere la palabra *suma*. Entonces

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (1)}$$

El subíndice i que aparece en el lado derecho de la expresión (1) en la notación sigma se llama el *índice de la sumatoria*. Puede ser reemplazado por cualquier otra letra como j, k o r que no se hubiera utilizado para representar otro término, y el valor de la suma no cambiará. Así,

$$\sum_{i=1}^{n} x_1 = \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{k=1}^{n} x_k, \ldots$$

En la suma $\sum_{i=1}^{n} x_i$, el índice de la sumatoria (el cual se indica debajo de Σ) toma los valores 1, 2, 3, . . . , n. El valor inicial (1 en este caso) está indicado debajo de Σ, y el último valor (n en este caso) arriba de Σ. Así, para desarrollar una suma dada en la notación Σ, tomamos todos los posibles valores enteros para el índice de la sumatoria en la expresión que sigue al símbolo Σ y después sumamos todos los términos. Por ejemplo, si queremos expandir $\sum_{k=3}^{7} f(x_k)$, notamos que el índice k toma los valores 3, 4, 5, 6, 7 (el valor inicial es 3 y se indica debajo de Σ, y el valor final 7 arriba de Σ). Por tanto, en la expresión que sigue de Σ, esto es, en $f(x_k)$, reemplazamos k por 3, 4, 5, 6, 7 y después hacemos la suma de todos los términos obtenidos. Así,

$$\sum_{k=3}^{7} f(x_k) = f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6) + f(x_7)$$

Lo único que cambia de un término al siguiente es el número en el lugar indicado por el índice de la sumatoria (k en este caso).

A continuación veremos algunos ejemplos dados en la notación Σ.

a) $\sum_{k=1}^{7} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3$

b) $\sum_{k=1}^{5} a^k = a^1 + a^2 + a^3 + a^4 + a^5$

c) $\sum_{i=2}^{5} \frac{3i}{i-1} = \frac{3(2)}{2-1} + \frac{3(3)}{3-1} + \frac{3(4)}{4-1} + \frac{3(5)}{5-1}$

d) $\sum_{j=1}^{4} \frac{j+1}{j^2+1} = \frac{1+1}{1^2+1} + \frac{2+1}{2^2+1} + \frac{3+1}{3^2+1} + \frac{4+1}{4^2+1}$

e) $\sum_{p=1}^{100} \ln p = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln 100$ ☛ **29**

☛ **29.** Desarrolle las siguientes sumas:

a) $\sum_{j=0}^{3} (j-1)^2$; *b*) $\sum_{k=1}^{5} \frac{2^k}{k}$

c) $\sum_{i=2}^{4} \left(i + \frac{1}{i}\right)$

EJEMPLO 1 Dadas $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, $x_3 = -1$ y $x_4 = 2$, determine

a) $\sum_{k=1}^{4} (x_k - 2)^2$ *b*) $\left[\sum_{k=1}^{4} (x_k - 2)\right]^2$

Solución

a)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4} (x_k - 2)^2 &= (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 + (x_4 - 2)^2\\ &= (4-2)^2 + (5-2)^2 + (-1-2)^2 + (2-2)^2\\ &= 4 + 9 + 9 + 0\\ &= 22\end{aligned}$$

Respuesta *a*) $(0-1)^2 + (1-1)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2$

b) $\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \frac{2^4}{4} + \frac{2^5}{5}$

c) $(2 + \frac{1}{2}) + (3 + \frac{1}{3}) + (4 + \frac{1}{4})$

$$b)\ \sum_{k=1}^{4}(x_k - 2) = (x_1 - 2) + (x_2 - 2) + (x_3 - 2) + (x_4 - 2)$$
$$= (4 - 2) + (5 - 2) + (-1 - 2) + (2 - 2)$$
$$= 2 + 3 - 3 + 0$$
$$= 2$$

☛ **30.** En el ejemplo 1, evalúe

a) $\sum_{j-1}^{4}(x_j - x_j^2)$; *b*) $\sum_{k=2}^{4} kx_k$

Así,

$$\left[\sum_{k=1}^{4}(x_k - 2)\right]^2 = 2^2 = 4 \quad ☛\ \mathbf{30}$$

Se debe observar que el número de términos en la expansión de $\sum_{k=m}^{n}$ es igual a $(n - m + 1)$. Así $\sum_{k=3}^{7} x_k$ contiene $7 - 3 + 1 = 5$ términos, $\sum_{i=1}^{10} x^i$ contiene $10 - 1 + 1 = 10$ términos y así sucesivamente.

TEOREMA 1 Si m y n son enteros con $n \geq m$, entonces,

a) $\sum_{k=m}^{n} c = (n - m + 1)c$, donde c es una constante.

b) $\sum_{k=m}^{n}(x_k \pm y_k) = \sum_{k=m}^{n} x_k \pm \sum_{k=m}^{n} y_k$

c) $\sum_{k=m}^{n} cx_k = c\sum_{k=m}^{n} x_k$, donde c es una constante.

d) $\sum_{k=m}^{n}(x_k - x_{k-1}) = x_n - x_{m-1}$

DEMOSTRACIÓN *a*) El número de términos en $\sum_{k=m}^{n} c$ es $(n - m + 1)$, y cada término en la expresión es igual a c, porque la expresión que sigue a Σ (esto es, c) no involucra al índice k de la sumatoria. Así,

$$\sum_{k=m}^{n} c = \underbrace{c + c + c + \cdots + c}_{(n - m + 1)\text{ términos}} = (n - m + 1)c$$

$$b)\ \sum_{k=m}^{n}(x_k \pm y_k) = (x_m \pm y_m) + (x_{m+1} \pm y_{m+1}) + \cdots + (x_n \pm y_n)$$
$$= (x_m + x_{m+1} + \cdots + x_n) \pm (y_m + y_{m+1} + \cdots + y_n)$$
$$= \sum_{k=m}^{n} x_k \pm \sum_{k=m}^{n} y_k$$

$$c)\ \sum_{k=m}^{n} cx_k = cx_m + cx_{m+1} + \cdots cx_n$$
$$= c(x_m + x_{m+1} + \cdots + x_n)$$
$$= c\sum_{k=m}^{n} x_k$$

Respuesta *a*) –36 *b*) 15

☛ **31.** En el ejemplo 3, determine

a) $\sum_{j=1}^{5} (x_j - 3)$; *b*) $\sum_{j=1}^{5} (x_j - 3)^2$

$$d)\ \sum_{k=m}^{n} (x_k - x_{k-1}) = (\cancel{x_m} - x_{m-1}) + (\cancel{x_{m+1}} - \cancel{x_m}) + (x_{m+2} - \cancel{x_{m+1}}) + \cdots + (\cancel{x_{n-1}} - \cancel{x_{n-2}}) + (x_n - \cancel{x_{n-1}})$$
$$= x_n - x_{m-1}$$

porque todos los demás términos se cancelan entre sí. (Algunas de estas cancelaciones están indicadas con diagonales en la expresión anterior).

COROLARIO En particular, cuando $m = 1$, los resultados *a*) y *d*) se transforman en

$$a)\ \sum_{k=1}^{n} c = nc$$

$$d)\ \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0$$

EJEMPLO 2 Desarrolle las siguientes sumas:

$$a)\ \sum_{k=-4}^{5} (3); \quad b)\ \sum_{k=1}^{n} (3)$$

Solución

a) $\sum_{k=-4}^{5} (3)$ tiene $5 - (-4) + 1 = 10$ términos, y cada uno de ellos es igual a 3. Así,

$$\sum_{k=-4}^{5} (3) = 10(3) = 30$$

b) $\sum_{k=1}^{n} (3)$ tiene $n - 1 + 1 = n$ términos. Así,

$$\sum_{k=1}^{n} 3 = n(3) = 3n$$

EJEMPLO 3 Dado que $\sum_{i=1}^{5} x_i = 13$ y $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 49$, encuentre $\sum_{i=1}^{5} (2x_i + 3)^2$

Solución

$$\sum_{i=1}^{5} (2x_i + 3)^2 = \sum_{i=1}^{5} (4x_i^2 + 12x_i + 9)$$
$$= 4\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + 12\sum_{i=1}^{5} x_i + 5(9)$$
$$= 4(49) + 12(13) + 45$$
$$= 196 + 156 + 45$$
$$= 397$$ ☛ **31**

Respuesta *a*) –2; *b*) 16

TEOREMA 2

$$a)\quad \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$b)\quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$c)\quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

DEMOSTRACIÓN

$$a)\quad \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$$

Los términos de esta suma forman una progresión aritmética, en la cual hay n términos; el primer término es igual a 1 y la diferencia común también es igual a l. Por la fórmula de la página 270, la suma está dada por

$$\sum_{k=1}^{n} k = S_n = \frac{n}{2}[2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 1]$$

Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

b) Para probar *b*) utilizaremos el siguiente resultado:

$$k^3 - (k-1)^3 = k^3 - (k^3 - 3k^2 + 3k - 1)$$

o bien,

$$k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$$

Ésta es una identidad que es cierta para todo valor de k. Haciendo $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, obtenemos la siguiente sucesión de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
1^3 - 0^3 &= 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 \\
2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 \\
3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 \\
&\vdots \\
n^3 - (n-1)^3 &= 3 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1
\end{aligned}$$

Si sumamos todas estas ecuaciones verticalmente, observamos que muchos de los términos de la izquierda se cancelan y nos quedamos con

$$n^3 - 0^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \cdots n) + \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{n \text{ términos}}$$

o bien,

$$n^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n$$

donde hemos usado los teoremas 1*a*) y 2*a*). Así,

$$\begin{aligned} 3\sum_{k=1}^{n} k^2 &= n^3 - n + \tfrac{3}{2}\, n(n+1) \\ &= n(n+1)(n-1) + \tfrac{3}{2}\, n(n+1) \\ &= n(n+1)[n - 1 + \tfrac{3}{2}] \\ &= n(n+1)\left(\frac{2n+1}{2}\right) \end{aligned}$$

Así,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

lo cual prueba el resultado.

c) La prueba de esta parte se deja como ejercicio. (*Sugerencia*: Utilice la identidad $k^4 - (k-1)^4 = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$).

EJEMPLO 4 Evalúe la suma de los cuadrados de los primeros 100 números naturales.

Solución

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 &= \sum_{k=1}^{100} k^2 \\ &= \frac{100(100+1)(2\cdot 100+1)}{6} \\ &= \frac{100(101)(201)}{6} = 338{,}350 \end{aligned}$$

Aquí utilizamos el teorema 2 *b*) para $n = 100$.

EJEMPLO 5 Evalúe la siguiente suma:

$$7^3 + 8^3 + 9^3 + \cdots + 30^3$$

Solución La suma dada se puede escribir como:

$$\begin{aligned} 7^3 + 8^3 + 9^3 + \cdots + 30^3 &= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 30^3) \\ &\quad - (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 6^3) \\ &= \sum_{k=1}^{30} k^3 - \sum_{k=1}^{6} k^3 \\ &= \left[\frac{30(30+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{6(6+1)}{2}\right]^2 \end{aligned}$$

☛ **32.** Evalúe *a*) $\sum_{j=1}^{20} (j-1)^2$ *b*) $\sum_{k=20}^{30} k^2$ *c*) $\sum_{i=1}^{10} (5i^2 - 3i + 2)$

$$= (465)^2 - (21)^2$$
$$= 216{,}225 - 441$$
$$= 215{,}784$$

EJEMPLO 6 Evalúe la siguiente suma:

$$\sum_{k=1}^{50} (3k^2 + 2k + 1)$$

Solución Primero encontraremos $\sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 2k + 1)$. Usando los teoremas 1 y 2 tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 2k + 1) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$
$$= 3\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] + 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + n(1)$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + n(n+1) + n$$

Si reemplazamos ahora n por 50 en ambos lados obtenemos

$$\sum_{k=1}^{50} (3k^2 + 2k + 1) = \frac{50(51)(101)}{2} + 50(51) + 50$$
$$= 128{,}775 + 2550 + 50$$
$$= 131{,}375$$ ☛ **32**

Respuesta *a*) 2470 *b*) 6985 *c*) 1780

EJERCICIOS 7-5

(1-22) Evalúe cada suma.

1. $\sum_{k=1}^{4} (2k - 3)$

2. $\sum_{k=0}^{3} (k^2 + 7)$

3. $\sum_{p=2}^{5} (p^2 + p - 1)$

4. $\sum_{i=-3}^{3} (i^2 - i + 2)$

5. $\sum_{i=2}^{4} \frac{i}{i-1}$

6. $\sum_{q=1}^{4} \left(\frac{q^2+1}{q}\right)$

7. $\sum_{n=1}^{3} \frac{1}{n(n+1)}$

8. $\sum_{k=0}^{5} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$

9. $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)$

10. $\sum_{k=1}^{n} (3k + 2)$

11. $\sum_{j=1}^{n} (j^2 + j + 1)$

12. $\sum_{j=1}^{n} (2j^2 - j + 3)$

13. $\sum_{k=1}^{n} (k+1)(2k-1)$

14. $\sum_{k=1}^{n} (k-1)(k+1)$

15. $\sum_{k=1}^{n} (k^3 + 7k - 1)$

16. $\sum_{p=1}^{n} (p-1)(p^2 + p + 1)$

17. $\sum_{p=1}^{20} (p^2 + 7p - 6)$

18. $\sum_{r=1}^{30} (r^3 + 1)$

19. $\sum_{k=1}^{25} (k+1)(k+3)$

20. $\sum_{k=1}^{20} (k+1)(k^2+1)$

21. $\sum_{k=11}^{50} k^2$

22. $\sum_{k=6}^{20} (2k^2 + 5k - 3)$

23. Utilice la identidad $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$ para evaluar la suma $\sum_{k=1}^{n} k$

24. Haciendo uso de la identidad $k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$ evalúe la suma $\sum_{k=1}^{n} k$

25. Dado $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 7$, $x_5 = 4$ evalúe

a) $\sum_{p=1}^{5} (2x_p - 3)$ *b)* $\sum_{p=1}^{5} (x_p + 2)^2$

26. Dado $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $y_1 = 3$, $y_2 = -1$, $y_3 = 7$, $y_4 = -2$ y $y_5 = -1$ determine:

a) $\sum_{p=1}^{5} x_p y_p$ *b)* $\sum_{p=1}^{5} x_p^2 y_p$ *c)* $\sum_{k=1}^{5} (x_k - y_k)^2$

27. Dado que $\sum_{i=1}^{7} x_i = 13$ y $\sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 63$, determine:

a) $\sum_{i=1}^{7} (5 - 2x_i)$ *b)* $\sum_{p=1}^{7} (3x_p - 1)^2$

28. Dado que $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 15$, $\sum_{i=1}^{10} (x_i + y_i)^2 = 73$ y $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 26$, encuentre $\sum_{p=1}^{10} x_p y_p$

REPASO DEL CAPÍTULO 7

Términos, símbolos y conceptos importantes

7.1 Sucesión, primer término, término general o n-ésimo término (T_n).
Progresión aritmética (PA), diferencia común, primer término (a), último término (l).
Fórmula para T_n.
Suma de n términos, S_n.
Interés simple, fórmulas para el interés simple.

7.2 Progresión geométrica (PG), razón común. Fórmula para T_n.
Suma de n términos, S_n. Suma de una PG infinita.

7.3 Plan de ahorro, anualidad, amortización.
Valor presente de una anualidad, $a_{\overline{n}|i}$
Valor futuro de una anualidad, $s_{\overline{n}|i}$

7.4 Ecuación en diferencias de orden k.
Solución de una ecuación en diferencias. Solución general.
Solución por medio de iteración numérica.

7.5 Notación de suma generalizada o notación sigma: $\sum_{i=m}^{n} f(i)$

Fórmulas

PA: $T_n = a + (n-1)d$

$$S_n = \tfrac{1}{2} n[2a + (n-1)d] = \tfrac{1}{2} n(a + l)$$

Interés simple:

Valor después de t años $= P + tI$, $\quad I = P\left(\dfrac{R}{100}\right)$

PG: $T_n = ar^{n-1}$; $\quad S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r} \quad \text{si } -1 < r < 1$$

Valor futuro de una anualidad de \$1: $\quad s_{\overline{n}|i} = \dfrac{1}{i}[(1 + i)^n - 1]$

Valor presente de una anualidad de \$1: $\quad a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1}{i}[1 - (1 + i)^{-n}]$

Plan de ahorro: Valor futuro, $\quad S = Ps_{\overline{n}|i}$.

Anualidad o amortización: Valor presente, $\quad A = Pa_{\overline{n}|i}$

Si $y_n = ay_{n-1}$, entonces $y_n = ca^n$

Si $y_n = ay_{n-1} + b$, entonces $y_n = ca^n - \dfrac{b}{a - 1}$ si $a \neq 1$ o bien,
$y_n = y_0 + n_b \quad$ si $\quad a = 1$

$$\sum_{k=1}^{n} c = c(n - m + 1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k \pm y_k) = \sum_{k=m}^{n} x_k \pm \sum_{k=m}^{n} y_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} cx_k = c \sum_{k=m}^{n} x_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \tfrac{1}{2} n(n + 1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \tfrac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = [\tfrac{1}{2} n(n + 1)]^2$$

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 7

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) El término n-ésimo de una progresión geométrica está dado por $T_n = ar^n$

b) Si una sucesión $T_1, T_2, T_3, \ldots$, cumple con $T_2 - T_1 = T_3 - T_2 = T_4 - T_3 = \cdots$ entonces la sucesión es una progresión aritmética.

c) El término k-ésimo de una progresión aritmética está dado por $T_k = a + (k - 1)d$

d) Si a, u y r son el primero, el último y la razón común de una PG, entonces su suma está dada por $\frac{a-ru}{1-r}$

e) Si $T_1, T_2, T_3, \ldots$ es una PG, entonces la razón común está dada por $\frac{T_2}{T_3}$

f) La sucesión $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \cdots$ es una PA.

g) La sucesión $0, y, 2y, 3y, 4y, \cdots$ es una PA.

h) El orden de la ecuación en diferencias $y_{n+3} = 2y_{n+1}$ es 3

i) $\sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} 2^j$

j) La siguiente suma representa la suma de una PG con primer término a, razón común r y n términos $\sum_{j=0}^{n-1} ar^j$

k) El valor de $\sum_{j=1}^{8} 2$ es 2

l) Los términos de una PG satisfacen $T_m = rT_{m+1}$ para toda m, donde r es la razón común.

m) Los términos de una PA satisfacen $T_m = T_{m+1} - d$ para toda m, donde d es la diferencia común.

n) La suma de una PG infinita es $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

2. Si $-6, x, y, 15$ y z forman una progresión aritmética, determine los valores de x, y y z.

3. Si tres términos de una progresión aritmética son $x + 3$, $5x$ y $8x - 1$, determine el valor de x.

4. Si los primeros tres términos de una progresión geométrica de números positivos son $x - 3$, $2x - 6$ y x. Determine el valor de x.

5. Si usted ahorra hoy 1 centavo, mañana 2 centavos, 3 centavos al día siguientes, y así sucesivamente. ¿A cuánto ascenderán sus ahorros después de 365 días?

6. Si usted pudiera ahorrar dentro de un mes 1 centavo, al cabo de dos meses 2 centavos, luego de tres meses 4 centavos, y así sucesivamente, duplicando siempre la cantidad del mes anterior. ¿A cuánto ascenderán sus ahorros después de 12 meses? ¿Y después de 24 meses?

7. Determine una progresión geométrica de siete términos donde el segundo sea 1.5 y el quinto sea $\frac{3}{16}$.

8. Si $27, a, b$ y -1 forman una progresión geométrica, determine los valores de a y b.

(9-14) Calcule la suma de cada una de las progresiones siguientes.

9. $2 + 5 + 8 + 11 + \cdots$; 15 términos.

10. $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots$; 10 términos.

11. $-4 - \frac{7}{3} - \frac{2}{3} + 1 \cdots$; 20 términos.

12. $3\sqrt{2} + 6 + 6\sqrt{2} + \cdots$; 16 términos.

13. $2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2}{27} + \cdots$; 25 términos.

14. $\frac{27}{4} + \frac{9}{2} + 3 + 2 + \cdots$; 15 términos.

15. Si $y - 2$, $4y - 1$ y $10 - 3y$ son los primeros tres términos de una progresión aritmética, determine el valor de y.

16. Si $z + 4$, $3z$ y $5z + 8$ son los primeros tres términos de una progresión geométrica, determine el valor de z. (Hay dos soluciones).

17. Una progresión aritmética con 16 términos tiene primer término 2 y último término 47. Encuentre una expresión para el término general y calcule la suma de la progresión.

18. La suma de la sucesión 101, 95, 89, ..., es 880. Encuentre el número de términos en la sucesión y el último término.

19. En una progresión geométrica, $T_4 = 3$ y $T_7 = 81$. Encuentre una expresión para T_n y calcule T_{10}.

20. Determine la suma de la progresión geométrica con 10 términos si $T_2 = \frac{2}{3}$ y $T_4 = \frac{3}{2}$.

21. *(Plan de ahorros)* Una suma de \$1000 se invierte a interés simple de 5% anual. Encuentre el valor después de t años. Después de 6 años, ¿cuál es el valor y cuánto interés total se ha devengado?

22. *(Interés compuesto)* Si \$2500 se invierten en una cuenta de ahorros a un interés del 7% capitalizable anualmente, calcule su valor después de 6 años.

23. *(Depreciación)* Jennifer compró una lancha de motor en \$15,000. La depreciación se calcula reduciendo el valor en 10% los primeros 3 años y 8% los siguientes 5 años. Determine el valor de la lancha de Jennifer al cabo de 8 años.

24. *(Amortización de hipotecas)* Otilio compró una casa para lo cual pidió un préstamo de \$200,000. El banco cobrará una tasa de interés de 0.8% mensual durante los 20 años de vigencia del préstamo. Calcule el pago mensual que debe realizar Otilio.

25. *(Depreciación)* Una computadora tuvo un costo de \$25,000. La depreciación se calcula disminuyendo el valor en 25% para los primeros 3 años y 20% para los siguientes 2 años. Encuentre el valor de la computadora después de un periodo de 5 años.

26. *(Depreciación)* Utilice el método de depreciación de la suma de los dígitos de los años (véase el ejercicio 33 de la sección 7-1) para calcular la depreciación durante el primer año de un automóvil cuyo costo inicial es de \$200,000 y cuyo valor de desecho después de 15 años es de \$20,000.

27. *(Plan de ahorros)* Los papás de Nimsi depositaron en una cuenta de ahorros, que gana un tasa de interés anual de 10%, \$3000 en cada aniversario de Nimsi, hasta que cumplió 21 años y retiraron el total de la inversión. ¿Cuál es el valor de la inversión? (Incluya el depósito del vigésimo primer aniversario). Redondee su respuesta al entero más cercano.

28. *(Amortización de hipotecas)* Con referencia al problema 24, suponga que, justo al final del año 12 de pagar la hipoteca, Otilio recibe un pago de \$100,000. Si todo lo destina para el pago de la misma, ¿es suficiente para saldar la hipoteca? En caso afirmativo, ¿cuánto le queda de los \$100,000? En caso contrario, ¿cuál es la cantidad que queda a deber (saldo insoluto) después del pago que hace?

(29-36) Resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias.

29. $2z_{n+1} - \frac{4}{3}z_n = 0$

30. $y_{n+1} + 1.1y_n = 0$

31. $z_n + z_{n-1} = 0$; $z_1 = 4$

32. $2y_{n+1} = y_n$; $y_0 = 3$

33. $z_{n+1} = z_n + 5$; $z_1 = 8$

34. $3y_{n+1} = 2y_n - 9$; $y_0 = -8$

35. $z_{n+1} - z_n = 10$; $z_0 = 0$

36. $y_n = y_{n-1} + 3$; $y_5 = 17$

37. *(Amortización de préstamo)* Jonathan y Nancy son propietarios de una pequeña compañía productora de alimentos; ellos desean pedir prestado a un banco, para expansión de sus operaciones. El banco cobra interés al 1% mensual sobre el saldo insoluto del préstamo y exige que el préstamo se liquide en 12 pagos mensuales. Nancy estima que pueden permitirse pagar el préstamo a un ritmo de \$1000 mensuales. ¿Cuál es la cantidad máxima que pueden pedir prestado?

*__38.__ En un piscicultivo, una población de truchas tiene un tamaño inicial de 1000 y crece 50% cada seis meses. Si la población se recolecta a una tasa de 475 cada seis meses. Determine la población al final del tercer año. Redondee al entero más cercano.

(39-40) Demuestre que las sucesiones siguientes cuyos términos n-ésimos se dan a continuación son las soluciones de las ecuaciones en diferencias indicadas (a y b son constantes).

39. $z_n = a + b(4^n)$; $z_{n+2} = 5z_{n+1} - 4z_n$

40. $y_{n+2} + y_{n+1} = 6y_n$; $y_n = a(2^n) + b(-3)^n$

CASO DE ESTUDIO

¿CÓMO SALVAR EL HONOR DEL ABUELO?

Como se analizó en este capítulo, lo que sucede con la deuda del abuelo es característico de las funciones con crecimiento exponencial, de acuerdo con lo que analizamos al inicio del capítulo, si el interés es de 1% mensual, los primeros cinco centavos se convierten en aproximadamente \$10.67, pero,

i. Si el interés que genera la deuda fuese de 2%, entonces, la deuda de los primeros \$0.05 ascendería a $1.02^{539} \approx$ \$2160.04. Un valor aproximadamente 200 veces mayor que con 1%.

ii. Si el interés que genera la deuda fuese de 5%, entonces la deuda de los primeros \$0.05 ahora sería de $1.05^{539} \approx$ **¡\$13,182,634,256.55!**, bien sabemos que el honor de un abuelo vale eso y más, pero sería preferible devolver a tiempo los libros a la biblioteca.

Observe que esto sólo es lo que se debe pagar por los primeros cinco centavos, la deuda total es mucho mayor. Para calcular la deuda total debemos proceder de forma semejante a como se calcularon las anualidades en este capítulo. Así, por los primeros 5 centavos el interés del 1% se aplica durante 539 meses, los 5 centavos del segundo mes generan intereses durante 538 meses, y así sucesivamente hasta llegar a los 5 centavos del mes 540 que no generan intereses. Por lo que la deuda total es:

$$\begin{aligned}\text{Deuda total} &= (1.01^{539} \times 0.05) + (1.01^{538} \times 0.05) + \cdots + 0.05\\ &= 0.05 \times (1.01^{539} + 1.01^{538} + \cdots + 1)\end{aligned}$$

Con la fórmula para la suma de una progresión geométrica, que se dedujo en este capítulo, se obtiene:

$$\text{Deuda total} = 0.05 \times \frac{1 - 1.01^{540}}{1 - 1.01} \approx \$21{,}454.69$$

i. ¿Cuál sería la deuda total, si el interés fuese de 2%?

ii. ¿Cuál sería la deuda total, si el interés fuese de 5%?

CAPÍTULO 8

Álgebra de matrices

En los últimos tres años, cuatro niñas y niños exploradores, Mang, Carolina, Dulce y Benjamín, han tenido como misión recolectar fondos para apoyar un asilo. Con este objetivo en mente, cada año compraron chocolates. Los adquirieron de tres tipos: blanco, amargo y semiamargo. Cada caja contiene 20 chocolates. Los venden por pieza y los dos últimos años vendieron todos. A continuación se resume la información para el primer año:

En esta tabla se muestra el número de cajas que cada uno compró.

	Cajas de chocolate		
	Blanco	Amargo	Semiamargo
Mang	6	15	9
Carolina	13	10	7
Dulce	10	10	10
Benjamín	5	12	13

En esta otra se muestra el precio por caja y el precio al que vendieron cada tipo de chocolate:

Tipo de chocolate	Precio por caja ($)	Precio de venta por pieza ($)
Blanco	50	4
Amargo	30	3
Semiamargo	40	3

Con base en esta información, determine:

i. ¿Quién obtuvo mayor ganancia el primer año?
ii. ¿Quién hizo la menor inversión?
iii. El segundo y el tercer años compraron las mismas cantidades de cajas de chocolate, pero el precio por caja para el segundo año fue 10% mayor que el del primer año; mientras que en el tercer año fue de 65, 45 y 40, para el chocolate blanco, amargo y semiamargo, respectivamente. Además, ellos conservaron los precios de venta del primer año. Responda las dos preguntas anteriores para el segundo y tercer años.

TEMARIO

■ 8-1 MATRICES

Una empresa produce cuatro productos, A, B, C y D. El productor de cada artículo requiere cantidades específicas de dos materias primas, X y Y, y también cantidades determinadas de mano de obra. Suponga que la empresa desea comparar los números de unidades de X y Y y de mano de obra que se requieren en la producción semanal de estos cuatro productos. En la tabla 1 aparece información muestral para tal caso. Por ejemplo, la producción semanal de A requiere 250 unidades de X, 160 unidades de Y y 80 unidades de mano de obra.

TABLA 1

Producto	**A**	**B**	**C**	**D**
Unidades de material X	250	300	170	200
Unidades de material Y	160	230	75	120
Unidades de mano de obra	80	85	120	100

Observe que los datos de esta tabla aparecen en forma natural en un arreglo rectangular. Si se suprimen los encabezados, obtenemos el arreglo rectangular de números siguiente:

$$\begin{bmatrix} 250 & 300 & 170 & 200 \\ 160 & 230 & 75 & 120 \\ 80 & 85 & 120 & 100 \end{bmatrix}$$

Este arreglo es ejemplo de una *matriz.*

En este ejemplo, es claro que un arreglo rectangular es una forma natural en la cual almacenar los doce números dados. Cada columna de tres números en el arreglo se refiere a uno de los productos A, B, C o D; mientras que cada renglón de cuatro números se aplica a uno de los insumos X, Y o a la mano de obra. Así, el número 75 que está en el segundo renglón y la tercera columna da el número de unidades de la segunda materia prima (Y) usadas en la producción semanal del tercer producto (C). El número 80 en el tercer renglón y la primera columna representa el número de unidades del tercer insumo (mano de obra), que se requieren en la producción semanal del primer producto (A), etcétera.

Una gran cantidad de otros conjuntos de datos tabulados forman naturalmente arreglos rectangulares. Veremos después que un buen número de cálculos que desearíamos realizar con tales datos corresponden a ciertas "operaciones con matrices" que se definen en esta sección y en las siguientes.

DEFINICIÓN Una **matriz** es un arreglo rectangular de números reales, encerrado en grandes paréntesis rectangulares. Las matrices por lo regular se denotan con letras mayúsculas negritas como **A**, **B** o **C**.

Algunos ejemplos de matrices aparecen abajo.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = [1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 5 \;\; 6] \qquad \mathbf{E} = [3]$$

Los números reales que forman el arreglo se denominan **entradas** o **elementos** de la matriz. Los elementos en cualquier línea horizontal forman un **renglón** y aquellos que se encuentran en cualquier línea vertical forman una **columna** de la matriz. Por ejemplo, la matriz **B** (que está arriba) tiene tres renglones y cuatro columnas. Los elementos del primer renglón son 3, 4, 5 y 6, y los que pertenecen a la tercera columna son 5, 9 y 3.

Si una matriz tiene m renglones y n columnas, se dice que su tamaño es $m \times n$ (léase m por n). De las matrices que se acaban de dar, **A** es una matriz 2×3, **B** es una matriz 3×4 y **C** es una matriz 4×1.

Una matriz de tamaño $1 \times n$ sólo tiene un renglón y una matriz de tamaño $m \times 1$ sólo tiene una columna. Una matriz que sólo tiene un renglón a menudo se conoce como **matriz renglón** o **vector renglón**. De manera similar, una matriz que sólo tiene una columna se denomina **matriz columna** o **vector columna**. En los ejemplos anteriores, **D** es un vector renglón y **C** es un vector columna.

Con frecuencia conviene usar una notación de dobles subíndices para los elementos de una matriz. En esta notación, por ejemplo, a_{ij} denota al elemento de la matriz **A** que está en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna. Así pues, a_{24} indica el elemento localizado en el segundo renglón y en la cuarta columna de **A**. Si **A** es la matriz 2×3

☛ **1.** ¿Cuál es el tamaño de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 9 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$? Dé los elementos a_{12}, a_{21}, a_{23} y a_{32}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

entonces $a_{11} = 2$, $a_{12} = -3$, $a_{13} = 7$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0$ y $a_{23} = 4$ ☛ **1**

En general, si **A** es una matriz $m \times n$, podemos escribir lo siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La matriz **A** puede denotarse por $[a_{ij}]$ cuando se sobreentiende su tamaño. Si el tamaño también debe especificarse, escribimos $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$

Si todos los elementos de la matriz son cero, la llamamos **matriz cero** y la denotamos por **0**. Por tanto, el siguiente es un ejemplo de una matriz cero de tamaño 2×3:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Respuesta 3×2, $a_{12} = 3$, $a_{21} = 9$; no existe el elemento a_{23}, $a_{32} = 7$

Una matriz con el mismo número de renglones que de columnas se conoce como **matriz cuadrada**. Las siguientes matrices son ejemplos de matrices cuadradas:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R} = [2]$$

DEFINICIÓN Se dice que dos matrices **A** y **B** son **iguales** si

i. son del mismo tamaño y

ii. sus elementos correspondientes son iguales.

Por ejemplo, sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & x & 3 \\ y & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & 5 & 3 \\ 0 & b & 4 \end{bmatrix}$$

Es claro que, **A** y **B** son del mismo tamaño y $A = B$ si y sólo si $a = 2$, $x = 5$, $y = 0$ y $b = -1$.

Multiplicación de una matriz por un escalar

La multiplicación de una matriz por un escalar se refiere a la operación de multiplicar la matriz por un número real. Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es una matriz $m \times n$ y c es cualquier número real, el producto $c\mathbf{A}$ es una matriz $m \times n$ obtenida multiplicando cada elemento de **A** por la constante c. En otras palabras, $c\mathbf{A} = [ca_{ij}]$. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

se sigue que

☛ **2.** Escriba -3A.

$$2\mathbf{A} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1) & 2(0) & 2(-1) \\ 2(0) & 2(-2) & 2(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$ ☛ **2**

EJEMPLO 1 Una cadena de tiendas de electrónica tiene dos distribuidores en Seattle. En mayo las ventas de televisores, videocaseteras y estéreos en los dos almacenes estuvieron dados por la siguiente matriz **A**:

$$\begin{array}{c} \\ \text{Distribuidor 1} \\ \text{Distribuidor 2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{TV} & \text{Videocaseteras} & \text{Estéreos} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 22 & 34 & 16 \\ 14 & 40 & 20 \end{bmatrix} \end{array} \equiv \mathbf{A}$$

Si la dirección establece ventas meta para junio de un 50% de aumento sobre las ventas de mayo, escriba la matriz que representa las ventas proyectadas para junio.

Solución Cada elemento en la matriz anterior debe aumentarse en 50%, esto es, multiplicarse por 1.5. Por tanto, la matriz para junio es 1.5A, o bien,

Respuesta $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & -12 \end{bmatrix}$

$$1.5\begin{bmatrix} 22 & 34 & 16 \\ 14 & 40 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 51 & 24 \\ 21 & 60 & 30 \end{bmatrix}$$

Adición y sustracción de matrices

Dos matrices **A** y **B** del *mismo tamaño* pueden sumarse (o restarse) sumando (o restando) sus elementos correspondientes. En otras palabras, si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ son dos matrices del mismo tamaño, entonces $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$ y $\mathbf{A} - \mathbf{B} = [a_{ij} - b_{ij}]$. En consecuencia,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 0+1 & -1+2 \\ 3+2 & 4+0 & 5+(-3) \\ 1+3 & -2+2 & 3+(-4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

y asimismo

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$ ☛ **3**

☛ **3.** Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$, encuentre $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ y $2\mathbf{B} - \mathbf{A}$

Respuesta $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $2\mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ -12 & 12 \end{bmatrix}$

EJEMPLO 2 Para la cadena de tiendas del ejemplo 1, el número de televisores, videocaseteras y estéreos en existencia en los dos almacenes al inicio de mayo está dado por la siguiente matriz **B**:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 30 & 30 & 20 \\ 18 & 32 & 28 \end{bmatrix}$$

(Los renglones y columnas tienen los mismos significados que en el ejemplo 1. Por ejemplo, en el almacén 2 estaban 32 videocaseteras en existencia). Durante mayo, se hicieron entregas a los almacenes de acuerdo con la siguiente matriz **C**:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 20 & 38 & 12 \\ 10 & 48 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine la matriz que representa el número de los tres artículos en existencia al final de mayo.

Solución Para cada artículo en cada almacén, tenemos

Número al final de mayo = Número al inicio de mayo + Recibidos − Ventas

De modo que la matriz que queremos está dada por $\mathbf{B} + \mathbf{C} - \mathbf{A}$ y es

$$\begin{bmatrix} 30 & 30 & 20 \\ 18 & 32 & 28 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 38 & 12 \\ 10 & 48 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 22 & 34 & 16 \\ 14 & 40 & 20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 30+20-22 & 30+38-34 & 20+12-16 \\ 18+10-14 & 32+48-40 & 28+0-20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28 & 34 & 16 \\ 14 & 40 & 8 \end{bmatrix}$$

☛ **4.** En el ejemplo 2, proporcione la matriz que especifica las entregas mínimas que se requerirán en junio, si se deben cumplir las ventas meta del ejemplo 1.

Respuesta Calculamos la matriz de ventas meta (1.5**A**) menos la matriz que contiene los números en existencia al final de mayo:

$$\begin{bmatrix} 33 & 51 & 24 \\ 21 & 60 & 30 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 28 & 34 & 16 \\ 14 & 40 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 17 & 8 \\ 7 & 20 & 22 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, el almacén 1 tenía 28 televisores, 34 videocaseteras y 16 estéreos en existencia al final de mayo. ☛ **4**

EJEMPLO 3 Dadas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

determine la matriz **X** tal que **X** + **A** = **2B**.

Solución Tenemos que **X** + **A** = **2B**, o **X** = **2B** − **A**.

$$\mathbf{X} = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 6 & 13 & 7 \end{bmatrix}$$ ☛ **5**

☛ **5.** Determine **Y** tal que **Y** + **B** = 2**A**.

Respuesta $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & -11 & 4 \end{bmatrix}$

EJERCICIOS 8-1

1. Determine el tamaño de cada matriz.

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\mathbf{G} = [4 \ \ 1 \ \ 3]$ $\quad \mathbf{H} = [1]$

2. En el ejercicio l, si $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, encuentre b_{12}, b_{21}, b_{22}, b_{23} y b_{32}

3. Determine la matriz 2 × 2, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ para la cual $a_{ij} = i + j - 2$. [*Sugerencia*: Con la finalidad de calcular a_{21}, por ejemplo, haga $i = 2$ y $j = 1$ en la fórmula: $a_{21} = 2 + 1 - 2 = 1$].

4. De la matriz 3 × 2, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ para la cual $b_{ij} = 2i + 3j - 4$

5. Construya un ejemplo de una matriz 3 × 3, $[c_{ij}]$ que satisfaga $c_{ij} = -C_{ji}$

6. Determine la matriz 3 × 4, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ para la cual

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

(7-14) Efectúe las operaciones indicadas y simplifique.

7. $3\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

8. $-2\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

11. $2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

12. $3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

13. $2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

14. $4\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

(15-24) Determine los valores de las variables para las cuales las siguientes ecuaciones matriciales son válidas.

15. $\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+2 & z \\ 4 & t-1 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 4 & x & 3 \\ y & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y-1 & 2-x & 3 \\ 5 & z+1 & 2 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} x+2 & 5 & y-3 \\ 4 & z-6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & t+1 & 2y-5 \\ 4 & 2 & z-1 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & x \\ y & 3 & 4 \\ 2 & z & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & 6 \\ 5 & 3 & 4 \\ u & 2 & v \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} x+1 & 2 & 3 \\ 4 & y-1 & 5 \\ u & -1 & z+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-1 & t+1 & 3 \\ v+1 & -3 & 5 \\ -4 & w-1 & 2z-1 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} x & 3 & 4 \\ 2 & -1 & y \\ 1 & z & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ 3 & 4 & x \\ u & y & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 7 & v+1 \\ 5 & w-2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

22. $\begin{bmatrix} x+1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & z+2 \\ -1 & y & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 6 & u+2 & 7 \\ v+1 & 5 & -7 \\ 7 & 0 & w \end{bmatrix}$$

23. $3\begin{bmatrix} x & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & y & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 & t & 0 \\ z & 1 & -1 \\ u & 2 & v \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} w-4 & 1 & -v \\ 4 & 2u & 2v+y \\ -1 & x+7 & 12 \end{bmatrix}$$

24. $2\begin{bmatrix} 1 & x+1 & 0 \\ 0 & -2 & y-1 \\ z & 1 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} u & -1 & 2 \\ 1 & v+2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 7 & 2v-2z \\ u+y & -7 & 1-7z \\ 4 & w+11 & t \end{bmatrix}$$

25. *(Costos de transporte)* Una compañía tiene plantas en tres localidades, X, Y y Z, y cuatro bodegas en los lugares A, B, C y D. El costo (en dólares) de transportar cada unidad de su producto de una planta a una bodega está dado por la siguiente matriz.

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix}\text{A}\\ \downarrow\end{matrix} & \begin{matrix}\text{X} & \text{Y} & \text{Z}\end{matrix}\ \leftarrow\text{De} \\ \begin{matrix}\text{A}\\ \text{B}\\ \text{C}\\ \text{D}\end{matrix} & \begin{bmatrix} 10 & 12 & 15 \\ 13 & 10 & 12 \\ 8 & 15 & 6 \\ 16 & 9 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) Si los costos de transportación se incrementan uniformemente en \$1 por unidad, ¿cuál es la nueva matriz?

b) Si los costos de transportación se elevan en un 20%, escriba los nuevos costos en forma matricial.

26. *(Costos de suministros)* Un contratista calcula que los costos (en dólares) de adquirir y transportar unidades determinadas de concreto, madera y acero desde tres diferentes localidades están dados por las siguientes matrices (una matriz por cada localidad).

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix}\text{Concreto} & \text{Madera} & \text{Acero}\end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 20 & 35 & 25 \\ 8 & 10 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix}\text{Costos de material}\\ \text{Costos de transportación}\end{matrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 22 & 36 & 24 \\ 9 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix}\text{Costos de material}\\ \text{Costos de transportación}\end{matrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 18 & 32 & 26 \\ 11 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix}\text{Costos de material}\\ \text{Costos de transportación}\end{matrix}$$

Escriba la matriz que representa los costos totales de material y de transportación por unidades de concreto, madera y acero desde cada una de las tres localidades.

27. *(Comercio internacional)* El comercio entre tres países I, II y III durante 1986 (en millones de dólares estadounidenses) está dado por la matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, en donde a_{ij} representa las exportaciones del país i al país j.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 16 & 20 \\ 17 & 0 & 18 \\ 21 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

El comercio entre estos tres países durante el año de 1987 (en millones de dólares estadounidenses) está dado por la matriz $\mathbf{B}$.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 17 & 19 \\ 18 & 0 & 20 \\ 24 & 16 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Escriba una matriz que represente el comercio total entre los tres países en el periodo de 2 años, 1986 y 1987.

b) Si en 1986 y 1987, 1 dólar estadounidense equivalía a 5 dólares de Hong Kong, escriba la matriz que representa el comercio total durante los 2 años en dólares de Hong Kong.

28. *(Matrices de producción)* Una empresa produce tres tamaños de cintas magnetofónicas en dos calidades diferentes. La producción (en miles) en su planta de Baja California está dada por la siguiente matriz:

$$\begin{array}{r} \\ \text{Calidad 1} \\ \text{Calidad 2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Tamaño 1} & \text{Tamaño 2} & \text{Tamaño 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 27 & 36 & 30 \\ 18 & 26 & 21 \end{bmatrix} \end{array}$$

La producción (en miles) en su planta de Monterrey está dada por la siguiente matriz:

$$\begin{array}{r} \\ \text{Calidad 1} \\ \text{Calidad 2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Tamaño 1} & \text{Tamaño 2} & \text{Tamaño 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 32 & 40 & 35 \\ 25 & 38 & 30 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) Escriba una matriz que represente la producción total de cintas en ambas plantas.

b) El dueño de la empresa planea abrir una tercera planta en Chihuahua, la cual tendría una vez y media la capacidad de la planta en Baja California. Escriba la matriz que representa la producción en la planta de Chihuahua.

c) ¿Cuál sería la producción total de las tres plantas?

29. *(Matrices de producción)* Un fabricante de zapatos los produce en color negro, blanco y café para niños, damas y caballeros. La capacidad de producción (en miles de pares) en la planta de Sonora está dada por la siguiente matriz:

$$\begin{array}{r} \\ \text{Negro} \\ \text{Café} \\ \text{Blanco} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Hombres} & \text{Mujeres} & \text{Niños} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 30 & 34 & 20 \\ 45 & 20 & 16 \\ 14 & 26 & 25 \end{bmatrix} \end{array}$$

La producción en la planta de Durango está dada por

$$\begin{array}{r} \\ \text{Negro} \\ \text{Café} \\ \text{Blanco} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Hombres} & \text{Mujeres} & \text{Niños} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 35 & 30 & 26 \\ 52 & 25 & 18 \\ 23 & 24 & 32 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) Determine la representación matricial de la producción total de cada tipo de zapato en ambas plantas.

b) Si la producción en Sonora se incrementa en un 50% y la de Durango en 25%, encuentre la matriz que representa la nueva producción total de cada tipo de calzado.

30. *(Ecología)* En un ecosistema, ciertas especies proveen de comida a otras. El elemento C_{ij} de la matriz de consumo es igual al número de unidades de la especie j consumidas diariamente por un individuo de la especie i. Construya la matriz (C_{ij}) para el siguiente ecosistema simple que consiste de tres especies.

a) Cada especie consume en promedio 1 unidad de cada una de las otras especies.

b) La especie 1 consume una unidad de la especie 2; la especie 2 consume 1 unidad de cada una de las especies 1 y 3; la especie 3 consume 2 unidades de la especie 1.

c) La especie 1 consume 2 unidades de la especie 3; la especie 2 consume 1 unidad de la especie 1; la especie 3 no consume de ninguna de las otras especies.

■ 8-2 MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Suponga que una empresa fabrica un producto usando diferentes cantidades de tres insumos P, Q y R (materias primas o mano de obra, por ejemplo). Sea el número de unidades de estos insumos usados por cada unidad del producto dado por la siguiente matriz renglón:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{P} & \text{Q} & \text{R} \end{array} \\ \mathbf{A} = & [\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 4 \end{array}] \end{array}$$

Sea entonces el costo por unidad de estos insumos dado por la siguiente matriz columna:

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} \\ \mathrm{R} \end{array}$$

Por consiguiente, el costo de los tres insumos por unidad de producto se obtiene sumando los costos de 3 unidades de P a un costo de 10 cada una, 2 unidades de Q a 8 cada una y 4 unidades de R a 6 cada una:

$$3 \cdot 10 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 6 = 30 + 16 + 24 = 70$$

Nos referiremos a este número como el *producto* de la matriz renglón **A** y la matriz columna **B**, denotado por **AB**. Observe que al formar **AB**, se multiplican los primeros elementos de **A** y de **B**, los segundos elementos se multiplican a la vez, se hace lo mismo con los terceros elementos y luego se suman estos tres productos. Este método de formar productos se aplica a matrices renglón y columna de cualquier tamaño.

DEFINICIÓN Sea **C** una matriz renglón $1 \times n$ y **D** una matriz columna $n \times 1$. El **producto CD** se obtiene calculando los productos de elementos correspondientes en **C** y **D** y después encontrando la suma de estos n productos.

EJEMPLO 1 Dadas las matrices siguientes:

$$\mathbf{K} = [2 \quad 5] \qquad \mathbf{L} = [1 \quad -2 \quad -3 \quad 2]$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

se sigue que

$$\mathbf{KM} = 2(-3) + 5(2) = -6 + 10 = 4$$

y asimismo

$$\mathbf{LN} = 1(2) + (-2)5 + (-3)(-3) + 2(4) = 9$$ ☛ **6**

☛ **6.** Dadas $\mathbf{A} = [3 \quad 4]$ $\mathbf{B} = [-1 \quad 4 \quad 2]$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

evalúe **AC** y **BD**

Observaciones **1.** La matriz renglón siempre se escribe a la izquierda y la matriz columna a la derecha en tales productos (por ejemplo, **KM**, no **MK**).

2. Las matrices renglón y columna deben tener el *mismo* número de elementos. En el ejemplo 1, los productos **LM** y **KN** no están definidos.

El método de formar productos puede extenderse a matrices en general. Consideremos el ejemplo siguiente. Suponga que una empresa fabrica dos productos, I y II, usando diferentes cantidades de las tres materias primas P, Q y R. Sean las unidades de materias primas usadas en los productos dadas por la matriz siguiente:

Respuesta $\mathbf{AC} = 7$; $\quad \mathbf{BD} = -7$

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{A} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P & Q & R \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Producto I} \\ \text{Producto II} \end{array}$$

Suponga que la empresa produce estos dos productos en dos plantas, X y Y. Sean los costos de las materias primas (por unidad) en las dos localidades X y Y dados por la matriz **B**.

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{B} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} X & Y \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ P \\ Q \\ R \end{array}$$

El costo total de materias primas por cada unidad del artículo I producido en la localidad X es

$$3(10) + 2(8) + 4(6) = 30 + 16 + 24 = 70$$

Esto se obtiene multiplicando los elementos del primer renglón en A por los correspondientes elementos de la primera columna de **B** y sumando los productos resultantes.

De manera similar, el costo total de las materias primas por cada unidad del artículo I producido en la planta Y se obtiene multiplicando los elementos del primer renglón de **A** por los elementos de la *segunda* columna de **B** y sumándolos.

$$3(12) + 2(7) + 4(5) = 36 + 14 + 20 = 70$$

El costo total de materias primas por cada unidad del producto II elaborada en la planta X se obtiene multiplicando los elementos del segundo renglón de **A** por los elementos de la primera columna de **B**.

$$2(10) + 5(8) + 1(6) = 20 + 40 + 6 = 66$$

Por último, el costo total de materias primas por unidad del producto II elaborada en la localidad Y es

$$2(12) + 5(7) + 1(5) = 24 + 35 + 5 = 64$$

Los costos totales de materias primas para los dos productos elaborados en las plantas X y Y pueden disponerse en la forma matricial:

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{C} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} X & Y \end{array} \\ \begin{bmatrix} 70 & 70 \\ 66 & 64 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Producto I} \\ \text{Producto II} \end{array}$$

Decimos que la matriz **C** es igual al producto **AB** de las matrices originales **A** y **B**. Esto se escribe como **AB** = **C** o, sin abreviar,

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 70 \\ 66 & 64 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que al formar la matriz producto **C**, cada renglón de **A** se multiplica por cada columna de **B**, de la misma manera que una matriz renglón se multiplica por una matriz columna. Por ejemplo, el elemento c_{21} se obtiene multiplicando el segundo renglón de **A** por la primera columna de **B**:

$$c_{21} = 2(10) + 5(8) + 1(6) = 66$$

> En general, si $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, entonces *el elemento c_{ij} de la matriz producto* **C** *se obtiene multiplicando el i-ésimo renglón de* **A** *por la j-ésima columna de* **B**.

Al formar el producto de dos matrices, cada renglón de la primera matriz se multiplica sucesivamente por cada columna de la segunda matriz. Nótese que tales productos pueden formarse sólo si los renglones de la primera matriz tienen el mismo número de elementos que las columnas de la segunda matriz. En otras palabras, *el producto* **AB** *de dos matrices sólo puede formarse si el número de columnas de* **A** *es igual al número de renglones de* **B**. Esto es, si **A** es una matriz $m \times n$ y **B** es una matriz $q \times p$, entonces el producto **AB** está definido sólo si $n = q$.

☛ **7.** Dadas $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, encuentre **AB**.

DEFINICIÓN Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es una matriz $m \times n$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ es una matriz $n \times p$, el producto **AB** es una matriz $m \times p$ $\mathbf{C} = [c_{ij}]$, en donde el ij-ésimo elemento c_{ij} se obtiene multiplicando el i-ésimo renglón de **A** por la j-ésima columna de **B**. ☛ **7**

EJEMPLO 2 Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Calcule **AB** y **BA** si existen.

Solución Aquí **A** es 2×2 y **B** es 2×3. Dado que el número de columnas de **A** es igual al número de renglones de **B**, el producto **AB** está definido. Su tamaño es 2×3. Si $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, podemos escribir **C** de la siguiente manera:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

El elemento c_{ij} se determina multiplicando el i-ésimo renglón de **A** por la j-ésima columna de **B**. Por ejemplo, para obtener el elemento del primer renglón y segunda columna, esto es, c_{ij}, sumamos los productos de los elementos del primer renglón de **A** y los elementos de la segunda columna de **B**.

Renglón 1 de **A**	Columna 2 de **B**	Producto
2	1	2
3	−3	−9
	Suma	$-7 = c_{12}$

Respuesta $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -13 \\ -2 \end{bmatrix}$

En consecuencia, en detalle,

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(3) + 3(2) & 2(1) + 3(-3) & 2(0) + 3(4) \\ 4(3) + 1(2) & 4(1) + 1(-3) & 4(0) + 1(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & -7 & 12 \\ 14 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

☛ **8.** Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$, determine **AB** y **BA**.

En este caso, el producto **BA** *no* está definido porque el número de columnas de **B** no es igual al número de renglones de **A**. ☛ **8**

EJEMPLO 3 Dadas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

calcule **AB** y **BA**.

Solución Aquí, **A** y **B** son de tamaño 3×3. En consecuencia, tanto **AB** como **BA** están definidas y ambas tienen tamaño 3×3. Tenemos las siguientes igualdades:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(-2) + 2(3) + 3(1) & 1(1) + 2(2) + 3(3) & 1(2) + 2(1) + 3(2) \\ 4(-2) + 5(3) + 6(1) & 4(1) + 5(2) + 6(3) & 4(2) + 5(1) + 6(2) \\ 2(-2) + 1(3) + 4(1) & 2(1) + 1(2) + 4(3) & 2(2) + 1(1) + 4(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 14 & 10 \\ 13 & 32 & 25 \\ 3 & 16 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2(1) + 1(4) + 2(2) & -2(2) + 1(5) + 2(1) & -2(3) + 1(6) + 2(4) \\ 3(1) + 2(4) + 1(2) & 3(2) + 2(5) + 1(1) & 3(3) + 2(6) + 1(4) \\ 1(1) + 3(4) + 2(2) & 1(2) + 3(5) + 2(1) & 1(3) + 3(6) + 2(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 13 & 17 & 25 \\ 17 & 19 & 29 \end{bmatrix}$$

Respuesta $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 17 & -13 \\ 28 & -2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 13 & -9 \\ 16 & 2 \end{bmatrix}$

es claro que $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, a pesar de que ambos productos están definidos.

De este ejemplo es claro que la multiplicación de matrices no es conmutativa. Aun cuando los dos productos **AB** y **BA** estén definidos para matrices **A** y **B** dadas, por lo regular no son iguales. (Por otra parte, la suma de matrices es conmutativa: **A** + **B** = **B** + **A**). Sin embargo, el producto de matrices satisface la propiedad asociativa:

Si **A**, **B** y **C** son tres matrices de tamaños $m \times n$, $n \times p$ y $p \times q$, respectivamente, entonces todos los productos **AB**, **BC**, (**AB**)**C** y **A**(**BC**) están definidos. Se demuestra la propiedad siguiente:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \qquad \textbf{\textit{Ley asociativa}}$$

En tales productos, podemos por tanto omitir los paréntesis y sólo escribir **ABC**. La matriz producto **ABC** es de tamaño $m \times q$. ☛ **9**

☛ **9.** Verifique la ley asociativa para

$\mathbf{A} = [3 \quad 4] \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$

Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es una matriz cuadrada, entonces los elementos a_{ij} para los cuales $i = j$ (esto es, los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, etc.) se denominan **elementos de la diagonal** de la matriz.

Una matriz cuadrada se llama **matriz identidad** si todos los elementos de su diagonal son iguales a 1 y todos los elementos que no están en la diagonal son iguales a cero. Las siguientes matrices son matrices identidad de tamaño 2×2 y 3×3, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo común, la matriz identidad se denota por **I** cuando su tamaño se entiende sin ambigüedad.

EJEMPLO 4 Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Calcule **AI** e **IA**, en donde **I** denota a la matriz identidad.

Solución Tanto el producto **AI** como el **IA** están definidos si **A** e **I** son matrices cuadradas del mismo tamaño. Puesto que **A** es una matriz 2×2, la matriz identidad **I** también debe ser de tamaño 2×2; esto es,

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Así pues

$$\mathbf{AI} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(1) + b(0) & a(0) + b(1) \\ c(1) + d(0) & c(0) + d(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

De manera similar,

$$\mathbf{IA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

Respuesta
$\mathbf{A(BC)} = [3 \quad 4]\begin{bmatrix} 12 \\ 19 \end{bmatrix} = 112$

$\mathbf{(AB)C} = [18 \quad -11]\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = 112$

Por consiguiente, $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$.

Advertimos en este ejemplo que al multiplicar cualquier matriz 2×2 por la matriz identidad, aquélla no se altera. Es fácil darse cuenta de que este resultado es válido para matrices cuadradas de cualquier tamaño. En otras palabras, **I** se comporta de la misma manera en la multiplicación de matrices que el número 1 en la multiplicación de números reales. Esto justifica el nombre de *matriz identidad* para **I**. Si **A** es una *matriz cuadrada* de cualquier tamaño, entonces siempre se cumple que

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$$

Si **A** es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$, podemos multiplicarla consigo misma. El producto resultante **AA** se denota por medio de $\mathbf{A}^2$, es de tamaño $n \times n$. Multiplicando nuevamente por **A**, obtenemos **AAA**, que se denota con $\mathbf{A}^3$ y otra vez es de tamaño $n \times n$. Continuamos multiplicando por **A** y, en consecuencia, definimos $\mathbf{A}^4$, $\mathbf{A}^5$, etcétera. Obsérvese que $\mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \ldots$ están definidas sólo si **A** es una matriz cuadrada.

Observación El producto de dos matrices puede ser la matriz cero **0** a pesar de que ninguna de las matrices sea la matriz cero. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es fácil ver que $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ aun cuando $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$. ☛ **10**

☛ **10.** Si **A** es una matriz $m \times n$ y $\mathbf{0}_k$ es la matriz cero de tamaño $k \times k$, evalúe $\mathbf{0}_m\mathbf{A}$ y $\mathbf{A0}_n$, y en cada caso proporcione el tamaño.

Usando la idea de multiplicación de matrices, los sistemas de ecuaciones lineales pueden escribirse en la forma de ecuaciones matriciales. Por ejemplo, considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 7 \\ 4x + y &= 21 \end{aligned}$$

que consta de dos ecuaciones lineales simultáneas en las variables x y y. Tenemos el siguiente producto de matrices:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -3y \\ 4x & + y \end{bmatrix}$$

Pero de las ecuaciones simultáneas dadas, tenemos la igualdad siguiente:

$$\begin{bmatrix} 2x & -3y \\ 4x & + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente,

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Si definimos matrices **A**, **B** y **X** como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Respuesta Ambas son la matriz cero de tamaño $m \times n$.

entonces, esta ecuación matricial puede escribirse como

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

Observe que las matrices **A** y **B** tienen elementos cuyos valores son números dados. La matriz **X** contiene las cantidades desconocidas x y y. La matriz columna **X** por lo regular se conoce como **vector de variables**, **A** se denomina **matriz de coeficientes** y **B** se llama **vector de valores**.

Definiendo matrices adecuadas **A**, **B** y **X**, cualquier sistema de ecuaciones lineales puede expresarse como una ecuación matricial.

EJEMPLO 5 Exprese el sistema de ecuaciones siguiente en forma matricial:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 7 \\ 4y &= 2 + 5z \\ 3z - 2x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Solución En primer término disponemos las ecuaciones de modo que los términos constantes aparezcan del lado derecho y las variables x, y y z estén alineadas en columnas en el lado izquierdo.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 7 \\ 0x + 4y - 5z &= 2 \\ -2x + 0y + 3z &= -6 \end{aligned}$$

Obsérvese que los términos faltantes se escriben como $0x$ y $0y$ en la segunda y tercera ecuaciones. Si definimos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

el sistema dado puede escribirse en la forma $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. De nuevo, **A** y **B** son matrices de números conocidos y **X** es la matriz cuyos elementos son las variables desconocidas. ☛ **11**

☛ **11.** Exprese los sistemas en la forma $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.
a) $x - 4y = 2$, $2x + 6x = 5$
b) $-3x + y - 2z = 1$
$4y - z = 2$, $x + 3z = 4$

Supongamos ahora que se nos da un sistema general de m ecuaciones lineales en n variables. Denotamos las variables por $x_1, x_2, \ldots\ x_n$, y supongamos que el sistema adopta la forma siguiente.

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots\ + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots\ + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ \ldots\ + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \ldots\ + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

Aquí los coeficientes a_{ij} son números dados, en donde a_{ij} es el coeficiente de x_j en la i-ésima ecuación, y $b_1, b_2, \ldots, b_m$ son los lados derechos conocidos de las ecuaciones.

Respuesta *a*) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

Definimos la matriz **A** $m \times n$ cuyos elementos son los coeficientes de x_1, $x_2, \ldots x_n$; $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.

Note que la primera columna de **A** contiene todos los coeficientes de x_1, la segunda contiene todos los coeficientes de x_2, etc. Sea **X** el vector columna integrado por las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y **B** el vector columna formado por las m constantes a la derecha de las ecuaciones. Por consiguiente,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ahora consideremos el producto **AX**. Este producto está definido porque el número de columnas de **A** es igual al número de renglones de **X**. Tenemos

$$\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} = \mathrm{B}$$

en donde usamos las ecuaciones (1). Así que el sistema de ecuaciones (1) es otra vez equivalente a la sola ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

EJERCICIOS 8-2

(1-6) Si **A** es una matriz 3×4, **B** es 4×3, **C** es 2×3 y **D** es 4×5, calcule los tamaños de los siguientes productos de matrices.

1. **AB**

2. **BA**

3. **CA**

4. **AD**

5. **CAD**

6. **CBA**

(7-18) Efectúe las operaciones indicadas y simplifique.

7. $[2 \quad 3]\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

8. $[2 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\right)$

18.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

19. Calcule $\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} - 3\mathbf{I}$ para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

20. Determine $\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 2\mathbf{I}$ para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

21. Dadas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2$

b) Encuentre $\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$

c) ¿Es $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$?

22. Dadas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcule $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$ y $(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ y muestre que $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 \neq (\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B})$

(23-24) Dadas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p & 1 \\ q & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Determine p y q para que:

23. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2$

24. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$

***(25-28)** Determine la matriz **A** que hace verdadera cada ecuación matricial.

***25.** $\mathbf{A}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [5 \quad 3]$

***26.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}$

***27.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

***28.** $\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$

(29-34) Exprese los sistemas de ecuaciones lineales siguientes en forma matricial.

29. $2x + 3y = 7$
$x + 4y = 5$

30. $3x - 2y = 4$
$4x + 5y = 7$

31. $x + 2y + 3z = 8$
$2x - y + 4z = 13$
$3y - 2z = 5$

32. $2x - y = 3$
$3y + 4z = 7$
$5z + x = 9$

33. $2x + y - u = 0$
$3y + 2z + 4u = 5$
$x - 2y + 4z + u = 12$

34. $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$
$3x_3 + 5x_4 - x_1 = 7$
$x_1 + x_2 = x_3 + 2x_4$

35. Para la matriz **A** dada a continuación, encuentre una matriz 2×2 no cero **B** tal que **AB** sea una matriz cero. (Existe más de una respuesta).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

36. Dé un ejemplo de dos matrices no cero **A** y **B** de tamaños diferentes tales que el producto **AB** está definido y es una matriz cero. (Hay muchas respuestas posibles).

(37-40) Determine la matriz $\mathbf{A}^n$ para un entero positivo general n, en donde **A** es como aparece abajo.

37. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **38.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

***39.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **40.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

41. *(Valoración de inventarios)* Un comerciante de televisores a color tiene cinco televisores de 26 pulgadas, ocho de 20, cuatro televisores de 18 pulgadas y diez de 12. Los televisores de 26 pulgadas se venden en \$650 cada uno, los de 20 en \$550 cada uno, los televisores de 18 pulgadas en \$500 cada uno y los de 12 se venden en \$300 cada uno. Exprese el precio de venta total de su existencia de televisores como el producto de dos matrices.

42. *(Costos de materias primas)* Una empresa usa cuatro diferentes materias primas M_1, M_2, M_3 y M_4 en la elaboración de su producto. El número de unidades de M_1, M_2, M_3 y M_4 usadas por unidad del producto son 4, 3, 2 y 5, respectivamente. El costo por unidad de las cuatro materias primas es de \$5, \$7, \$6 y \$3, respectivamente. Exprese el costo total de las materias primas por unidad del producto como el producto de dos matrices.

43. *(Costos de materias primas)* Una empresa utiliza tres tipos de materias primas M_1, M_2 y M_3 en la elaboración de dos productos P_1 y P_2. El número de unidades de M_1, M_2 y M_3 usados por cada unidad de P_1 son 3, 2 y 4, respectivamente, y por cada unidad de P_2 son 4, 1 y 3, respectivamente. Suponga que la empresa produce 20 unidades de P_1 y 30 unidades de P_2 a la semana. Exprese las respuestas a las preguntas siguientes como productos de matrices.

a) ¿Cuál es el consumo semanal de las materias primas?

b) Si los costos por unidad (en dólares) para M_1, M_2 y M_3 son 6, 10 y 12, respectivamente, ¿cuáles son los costos de las materias primas por unidad de P_1 y P_2?

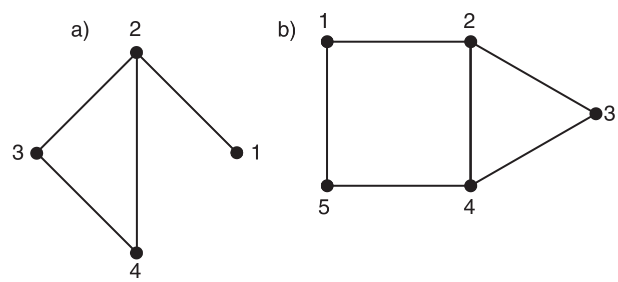
c) ¿Cuál es la cantidad total gastada en materias primas a la semana en la producción de P_1 y P_2?

44. *(Costos de suministros)* Un contratista puede adquirir las cantidades requeridas de madera, ladrillos, concreto, vidrio y pintura de cualesquiera tres proveedores. Los precios que cada proveedor fija a cada unidad de estos cinco materiales están dados en la matriz **A**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 5 & 2 & 5 \\ 9 & 5 & 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

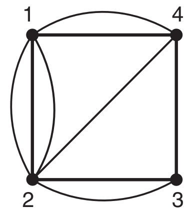
En esta matriz, cada renglón se refiere a un proveedor y las columnas a los materiales, en el orden listado arriba. El contratista tiene la política de adquirir todos los materiales requeridos en cualquier obra particular al mismo proveedor para de minimizar los costos de transportación. Hay tres obras en construcción actualmente: la obra I requiere 20 unidades de madera, 4 de ladrillos, 5 de concreto, 3 de vidrio y 3 de pintura; la obra II requiere 15, 0, 8, 8 y 2 unidades, respectivamente; y la obra III requiere 30, 10, 20, 10 y 12 unidades, respectivamente. Disponga esta información en una matriz **B** 5×3 y forme la matriz producto **AB**. Interprete los elementos de este producto y úselos con el propósito de decidir cuál proveedor debería usar en cada obra.

45. *(Teoría de gráficas)* Una gráfica consiste en un número de puntos llamados vértices, algunos de los cuales están conectados por líneas (llamadas aristas). A continuación se dan dos ejemplos de gráficas con cuatro y cinco vértices.



Si los vértices se numeran como 1, 2, 3, . . . , definimos la matriz **A** poniendo $a_{ij} = 1$ si hay una arista uniendo los vértices i y j y $a_{ij} = 0$ si no lo hay. Construya **A** para cada una de las gráficas dadas anteriormente. Construya $\mathbf{A}^2$ en cada caso. Muestre que el elemento ij en $\mathbf{A}^2$ da el número de trayectorias del vértice i al vértice j que pasan exactamente a través de algún otro vértice. ¿Qué piensa que significan los elementos de $\mathbf{A}^3$?

46. *(Aplicación de la teoría de gráficas)* La gráfica mostrada representa la conexión de líneas telefónicas entre cuatro pueblos. Sea a_{ij} la línea telefónica que conecta el pueblo i con el pueblo j. Construya la matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Evalúe $\mathbf{A}^2$ y pruebe que el elemento ij de esa matriz representa el número de líneas telefónicas entre el pueblo i y el pueblo j que pasa exactamente a través de un pueblo intermedio. ¿Qué representan los elementos de $\mathbf{A} + \mathbf{A}^2$?



8-3 SOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES POR REDUCCIÓN DE RENGLONES

En la sección 4-4, estudiamos cómo los sistemas de ecuaciones lineales aparecen en ciertas áreas de la administración y la economía. En esa sección, resolvimos sistemas que constaban de dos ecuaciones lineales en dos incógnitas. Desarrollaremos ahora un método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales que puede utilizarse sin importar el número de ecuaciones de que se componga el sistema. Ilustraremos los principios del método resolviendo el siguiente sistema simple de dos ecuaciones.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 3 \\ x - 2y &= 5 \end{aligned} \tag{1}$$

Si intercambiamos las dos ecuaciones (la razón de esto se hará evidente después), obtenemos el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 5 \\ 2x + 3y &= 3 \end{aligned} \tag{2}$$

Si multiplicamos la primera de estas dos ecuaciones por -2, obtenemos $-2x + 4y = -10$; sumamos esta ecuación a la segunda del sistema (2) y simplificamos.

$$\begin{gathered} 2x + 3y + (-2x + 4y) = 3 + (-10) \\ 0x + 7y = -7 \end{gathered}$$

Así pues, el sistema (2) se transforma en

$$\begin{aligned} x - 2y &= 5 \\ 0x + 7y &= -7 \end{aligned} \tag{3}$$

Multiplicamos ambos lados de la segunda ecuación por $\frac{1}{7}$, lo cual da el sistema equivalente

$$\begin{aligned} x - 2y &= 5 \\ 0x + y &= -1 \end{aligned} \tag{4}$$

De la segunda ecuación del sistema (4), tenemos que $y = -1$. Por consiguiente,

$2y = -2$. Sumando esto a la primera ecuación del sistema (4), tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x + 0y &= 3 \\ 0x + y &= -1 \end{aligned} \tag{5}$$

Por tanto, $x = 3$ y $y = -1$ y hemos resuelto el sistema dado de ecuaciones.

En el método anterior, efectuamos operaciones específicas en las ecuaciones originales del sistema (1), transformándolas en aquéllas del sistema (5), del cual los valores de las incógnitas x y y pueden verse directamente. Con cada operación, el sistema se transforma en uno equivalente al original. Las operaciones consisten de los tipos básicos siguientes:

1. Intercambio de dos ecuaciones.

2. Multiplicación o división de una ecuación por una constante distinta de cero.

3. Adición (o sustracción) de un múltiplo constante de una ecuación a (o de) otra ecuación.

Si respetamos las posiciones de las diversas variables y de los signos de igualdad, un sistema de ecuaciones lineales puede escribirse como una matriz con las variables omitidas. Por ejemplo, el sistema (1) anterior,

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 3 \\ x - 2y &= 5 \end{aligned}$$

puede abreviarse como

$$\left[\begin{array}{rr|r} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{array}\right]$$

Este arreglo de números se denomina la **matriz aumentada** del sistema dado. Nótese que al escribir esta matriz aumentada, hemos dispuesto los elementos de la matriz de coeficientes a la izquierda de la línea vertical y los elementos del vector de valores (esto es, las constantes de los lados derechos de las ecuaciones) a la derecha de esta línea vertical. Por consiguiente, si el sistema de ecuaciones considerado en forma matricial es $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, la matriz aumentada puede denotarse por $\mathbf{A} \mid \mathbf{B}$. La matriz aumentada es simplemente una manera de escribir el sistema de ecuaciones sin arrastrar las variables todo el tiempo.

EJEMPLO 1 Para las variables x, y, z y t, en ese orden, la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 7 \\ -4 & 0 & 5 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

corresponde al sistema lineal siguiente:

☛ **12.** Escriba la matriz aumentada para cada uno de los sistemas:
a) $x - 4y = 2$, $2x + 6y = 5$
b) $-3x + y - 2z = 1$, $4y - z = 2$, $x + 3z = 4$

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z + 4t &= 5 \\ x + 3y - 2z &= 7 \\ -4x + 5z + t &= -3 \end{aligned}$$ ☛ **12**

Ya que cada renglón de la matriz aumentada corresponde a una ecuación en el sistema lineal, las tres operaciones listadas antes corresponden a las siguientes tres **operaciones entre renglones** de la matriz aumentada:

1. Intercambio de dos renglones.
2. Multiplicación o división de un renglón por una constante distinta de cero.
3. Adición (o sustracción) de un múltiplo constante de un renglón a (o de) otro renglón.

Ilustraremos el uso de las operaciones entre renglones en una matriz aumentada en la resolución del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ x + 3y &= 5 \end{aligned}$$

La matriz aumentada en este caso es

$$\left[\begin{array}{rr|r} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

A fin de aclarar la aplicación de estas operaciones, resolveremos el sistema operando sobre las ecuaciones, a la vez que las operaciones correspondientes en la matriz aumentada.

SISTEMA

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ x + 3y &= 5 \end{aligned}$$

Intercambiando la primera y segunda ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 5 \\ 3x - 2y &= 4 \end{aligned}$$

Sumando -3 veces la primera ecuación a la segunda:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 5 \\ 0x - 11y &= -11 \end{aligned}$$

Dividimos ambos lados de la segunda ecuación entre -11:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 5 \\ 0x + y &= 1 \end{aligned}$$

MATRIZ AUMENTADA

$$\left[\begin{array}{rr|r} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

Intercambiando la primera y segunda ecuaciones:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

Sumando -3 veces el primer renglón al segundo:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -11 & -11 \end{array}\right]$$

Dividimos el segundo renglón entre -11:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Respuesta *a*) $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right]$

☛ **13.** Escriba la matriz aumentada para el sistema
$2x + 3y = 4$, $-3x + 5y = 13$.
Obtenga el resultado de las operaciones por renglón $\frac{1}{2}R_1$, seguida por $R_2 + 3R_1$. Dé las restantes operaciones que completan la reducción.

Restamos tres veces la segunda ecuación de la primera:

$$\begin{aligned} x + 0y &= 2 \\ 0x + \quad y &= 1 \end{aligned}$$

Restamos tres veces el segundo renglón del primero:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

La solución es, por tanto, $x = 2$ y $y = 1$. Observe que los valores de x y y están dados por los elementos de la última columna de la matriz aumentada final.

La última matriz aumentada de la cual leemos la solución es de la forma $\mathbf{I}|\mathbf{C}$, en donde **I** es la matriz identidad y **C** es cierto vector columna. Así, a fin de obtener la solución de un sistema dado $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, escribimos en primer término la matriz aumentada $\mathbf{A}|\mathbf{B}$ y usamos las operaciones entre renglones para cambiarla a la formal $\mathbf{I}|\mathbf{C}$. Esto no siempre es posible;* sin embargo, si lo logramos, la solución de las variables está dada en los elementos de la última columna **C**. La forma final de la matriz $\mathbf{I}|\mathbf{C}$ que da las soluciones a un sistema se llama la **matriz reducida**. Este método de resolución de sistemas lineales se denomina el **método de reducción de renglones**.

Antes de explicar cómo seleccionar el orden de las operaciones entre renglones con la finalidad de obtener la matriz reducida a partir de la matriz aumentada original, presentamos alguna notación para evitar repetir largas expresiones. Usaremos el símbolo R_p para el p-ésimo renglón de la matriz aumentada. Por ello, R_1 denota al primer renglón, R_2 al segundo, etc. Cuando decimos "aplique $R_2 - 2R_1$", esto significa "restar dos veces el primer renglón del segundo renglón", mientras que la operación $R_3 + 4R_2$ consiste en sumar cuatro veces el segundo renglón al tercero y $R_2 + R_3$ significa sumar el tercer renglón al segundo (*no* el segundo renglón al tercero). De manera similar, la operación $2R_3$ significa multiplicar el tercer renglón de la matriz aumentada por 2 y $-\frac{1}{2}R_1$ significa multiplicar el primer renglón por $-\frac{1}{2}$. Por último, la notación $R_1 \leftrightarrow R_3$ significa la operación de intercambiar el primero y tercero renglones. Usaremos la notación siguiente.

$$\text{matriz } \mathbf{A} \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \text{matriz } \mathbf{B}$$

la cual significa que la matriz **B** se obtiene aplicando la operación $R_1 - 2R_2$ (esto es, la sustracción de dos veces el segundo renglón del primer renglón) sobre la matriz **A**. ☛ **13**

Estamos ahora en posición de explicar en detalle el método de reducción de renglones. Lo haremos por medio de un ejemplo.

EJEMPLO 2 Use el método de reducción de renglones para resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 13 \\ x + \quad y + 2z &= 4 \\ 3x + 5y - \quad z &= -4 \end{aligned}$$

Respuesta $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 5 & 13 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}R_1]{}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ -3 & 5 & 13 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2+3R_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \frac{19}{2} & 19 \end{array}\right]$

$\frac{2}{19}R_2$ seguida por $R_1 - \frac{3}{2}R_2$. La solución es $x = -1$, $y = 2$

* Véase la sección 8.4.

Solución La matriz aumentada de este sistema es

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 4 & 13 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

Nuestro propósito es aplicar operaciones entre renglones a esta matriz hasta que obtengamos su forma reducida, esto es, hasta que las tres primeras columnas formen una matriz identidad. Por lo general, el mejor método es tratar las columnas una por una, cambiando los elementos de la diagonal principal a 1 y haciendo que los demás elementos de las columnas sean cero. En la primera columna de nuestra matriz, el primer elemento es 2. Con el objetivo de que este elemento se transforme en 1, podríamos dividir R_1 entre 2 o, alternativamente, intercambiar R_1 y R_2. Si aplicamos $\frac{1}{2}R_1$, de inmediato introducimos fracciones, mientras que si intercambiamos R_1 y R_2 (esto es, aplicamos $R_1 \leftrightarrow R_2$), nos evitamos las fracciones (o por lo menos al principio). Por consiguiente, es preferible aplicar $R_1 \leftrightarrow R_2$ y obtener

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 13 \\ 3 & 5 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

Ya que obtuvimos un elemento diagonal de 1 en la primera columna, usamos el primer renglón para transformar los demás elementos de la primera columna a cero. Primero, la operación $R_2 - 2R_1$ coloca un cero en el segundo elemento:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2-2(1) & -3-2(1) & 4-2(2) & 13-2(4) \\ 3 & 5 & -1 & -4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

Entonces, la operación $R_3 - 3R_1$ hace cero al tercer elemento:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 3-3(1) & 5-3(1) & -1-3(2) & -4-3(4) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -7 & -16 \end{array}\right]$$

Hemos reducido la primera columna a la forma requerida (esto es, a la primera columna de la matriz identidad). Ahora resolvemos sobre la segunda columna. En esta columna, debemos tener 1 en el segundo renglón y cero en el primero y tercer renglones. Mientras logramos este propósito, *debemos tener cuidado en no modificar la primera columna.* (Esto significa, por ejemplo, que no podemos sumar 6 veces el primer renglón al segundo, porque esto modificaría los elementos de la primera columna.) Hay muchas maneras de colocar un 1 en el segundo elemento de la segunda columna. Por ejemplo, podemos aplicar $-\frac{1}{5}R_2$ o $R_2 + 3R_3$. La aplicación de $-\frac{1}{5}R_2$ es más simple en este caso; nos lleva a la siguiente matriz:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & -16 \end{array}\right]$$

Usemos ahora el *segundo renglón* para hacer que los otros dos elementos de la segunda columna sean cero. La operación $R_1 - R_2$ hace cero el primer elemento y luego la operación $R_3 - 2R_2$ hace cero el tercer elemento. Podemos realizar estas dos operaciones de manera simultánea:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1-0 & 1-1 & 2-0 & 4-(-1) \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0-2(0) & 2-2(1) & -7-2(0) & -16-2(-1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{array}\right].$$

Obsérvese que estas operaciones no han modificado la primera columna. Así pues, también reducimos la segunda columna a la forma requerida, con 1 sobre la diagonal principal y 0 en los demás lugares.

Por último, resolvemos sobre la tercera columna. Debemos transformar el tercer elemento de esta columna a 1; esto puede realizarse aplicando $-\frac{1}{7}R_3$, lo cual nos lleva a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

En la tercera columna, los elementos del primero y segundo renglones también deben ser cero. Ya tenemos un cero en el segundo renglón. Con la finalidad de obtener un cero en el primer renglón, aplicamos la operación $R_1 - 2R_3$. Esto da

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2-2(1) & 5-2(2) \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Por consiguiente, hemos logrado nuestro propósito, esto es, hemos transformado las primeras tres columnas de la matriz aumentada del sistema a una matriz identidad. La matriz final representa al sistema

$$\begin{aligned} x + 0y + 0z &= 1 & \qquad x &= 1 \\ 0x + 1y + 0z &= -1 \quad \text{o} & y &= -1 \\ 0x + 0y + 1z &= 2 & z &= 2 \end{aligned}$$

☛ **14.** Es buena idea sustituir su solución en cada una de las ecuaciones del sistema original, para verificar que sea correcta. Intente esto con la solución del ejemplo 2.

del cual la solución requerida puede advertirse de inmediato. ☛ **14**

A la luz del ejemplo anterior, podemos resumir los pasos requeridos en la transformación de la matriz aumentada a su forma reducida de la siguiente manera.* Cada paso se efectúa por medio de una o varias de las operaciones entre renglones dadas antes.

*El procedimiento no siempre funciona y debemos modificarlo en ciertos casos. (Véase la sección 8-4.)

Paso 1 Realizamos operaciones entre renglones con el objetivo de obtener un elemento superior igual a 1 en la primera columna.

Paso 2 Sumamos o restamos los múltiplos apropiados del primer renglón a los otros renglones, de modo que los elementos restantes de la primera columna sean cero.

Paso 3 Sin alterar la primera columna, usamos operaciones entre renglones con el propósito de hacer el segundo elemento de la segunda columna igual a 1. Después sumamos o restamos múltiples adecuados del segundo renglón a los otros con el propósito de obtener ceros en el resto de la segunda columna.

Paso 4 Sin alterar las primeras dos columnas, hacemos que el tercer elemento de la tercera columna sea igual a 1. Luego usamos el tercer renglón con la finalidad de obtener ceros en el resto de la tercera columna.

Paso 5 Continuamos el proceso columna por columna hasta que se obtenga la forma reducida; esto es, hasta que la matriz adopte la forma **I | C**, con una matriz identidad **I** a la izquierda de la línea vertical. Las soluciones de las variables están dadas, entonces, por los elementos de la última columna, **C**. ☛ **15**

☛ **15.** Utilice el procedimiento de reducción por renglones para resolver los siguientes sistemas:
a) $2x - 4y + 2 = 0$.
$-x + 3y = 3$
b) $q + 3r = 1$;
$2p - 5r = 1$, $2p + 2q + 3r = 1$

EJEMPLO 3 ***(Punto de equilibrio del mercado)*** Dos productos **A** y **B** compiten. Las demandas x_A y x_B de estos productos están relacionadas con sus precios P_A y P_B por las ecuaciones de demanda

$$x_A = 17 - 2P_A + \tfrac{1}{2}P_B \qquad \text{y} \qquad x_B = 20 - 3P_B + \tfrac{1}{2}P_A$$

Las ecuaciones de la oferta son

$$P_A = 2 + x_A + \tfrac{1}{3}x_B \qquad \text{y} \qquad P_B = 2 + \tfrac{1}{2}x_B + \tfrac{1}{4}x_A$$

que dan los precios a los cuales las cantidades x_A y x_B estarán disponibles en el mercado. En el punto de equilibrio del mercado, las cuatro ecuaciones deben satisfacerse (dado que la demanda y la oferta deben ser iguales). Calcule los valores de equilibrio de x_A, x_B, P_A y P_B.

Solución Reacomodando las cuatro ecuaciones, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
x_A \phantom{+ \tfrac{1}{3}x_B} + 2P_A - \tfrac{1}{2}P_B &= 17\\
x_B - \tfrac{1}{2}P_A + 3P_B &= 20\\
x_A + \tfrac{1}{3}x_B - P_A &= -2\\
\tfrac{1}{4}x_A + \tfrac{1}{2}x_B - P_B &= -2
\end{aligned}$$

Note que las variables en cada ecuación se pusieron en el orden x_A, x_B, P_A y P_B. La matriz aumentada es la siguiente:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 2 & -\tfrac{1}{2} & 17\\
0 & 1 & -\tfrac{1}{2} & 3 & 20\\
1 & \tfrac{1}{3} & -1 & 0 & -2\\
\tfrac{1}{4} & \tfrac{1}{2} & 0 & -1 & -2
\end{array}\right]$$

Respuesta *a*) $x = 3$, $y = 2$
b) $p = -2$, $q = 4$, $r = -1$

Para la primera columna aplicamos las operaciones $R_3 - R_1$ y $R_4 - \frac{1}{4}R_1$ para obtener ceros debajo de la primera entrada. El resultado es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 17 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 3 & 20 \\ 0 & \frac{1}{3} & -3 & \frac{1}{2} & -19 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{8} & -\frac{25}{4} \end{array}\right]$$

Entonces, para la segunda columna, aplicamos $R_3 - \frac{1}{3}R_2$ y $R_4 - \frac{1}{2}R_2$ para obtener

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 17 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 3 & 20 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{6} & -\frac{1}{2} & -\frac{77}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{19}{8} & -\frac{65}{4} \end{array}\right]$$

Antes de reducir la matriz aún más, observemos que el intercambio de los renglones tercero y cuarto nos ayuda a evitar fracciones complicadas, ya que en la tercera columna tendríamos $-\frac{1}{4}$ en vez de $-\frac{17}{6}$. Así que realizando este intercambio y multiplicando el R_3 por -4 tenemos las siguientes matrices:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 17 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{2} & 65 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{6} & -\frac{1}{2} & -\frac{77}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 + \frac{17}{6}R_3]{\substack{R_1 - 2R_3 \\ R_2 + \frac{1}{2}R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{39}{2} & -113 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{31}{4} & \frac{105}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{2} & 65 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{317}{12} & \frac{317}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{12}{317}R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{39}{2} & -113 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{31}{4} & \frac{105}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{2} & 65 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1 + \frac{39}{2}R_4 \\ R_2 - \frac{31}{4}R_4 \\ R_3 - \frac{19}{2}R_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

La solución para el punto de equilibrio del mercado es, por tanto, $x_A = 4$, $x_B = 6$, $P_A = 8$ y $P_B = 6$.

EJERCICIOS 8-3

(1-14) En los problemas siguientes, resuelva el sistema dado (si la solución existe) usando el método de reducción de renglones.

1. $2x + 3y = 7$
$3x - y = 5$

2. $x + 2y = 1$
$3y + 2x = 3$

3. $u + 3v = 1$
$2u - v = 9$

4. $3p + 2q = 5$
$p - 3q + 2 = 0$

5. $x + y + z = 6$
$2x - y + 3z = 9$
$-x + 2y + z = 6$

6. $x + 2y - z = -3$
$3y + 4z = 5$
$2x - y + 3z = 9$

7. $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$
$2x_1 - x_2 + 4x_3 = -4$
$x_1 + x_2 - 2x_3 = 5$

8. $$\begin{aligned} 2u - 3v + 4w \quad &= 13 \\ u + v + w \quad &= 6 \\ -3u + 2v + w + 1 &= 0 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} p - q + r &= -1 \\ 3p - 2r \quad &= -7 \\ r + 4q \quad &= 10 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} b &= 3 - a \\ c &= 4 - a - b \\ 3a + 2b + c &= 8 \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} x + 2y + z - t &= 0 \\ y - 2z + 2t &= 13 \\ 2x + 4y - z + 2t &= 19 \\ y - z - 3t &= 0 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} p - q - r &= 4 \\ q - r - s &= -5 \\ r - s - p &= -8 \\ p + 2q + 2r + s &= -5 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} x + y + z \quad &= 1 \\ 2x + 3y \quad - w &= 3 \\ -x \quad + 2z + 3w &= 3 \\ 2y - z + w &= 5 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= -4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$$

15. Encuentre *x, y* y *z* tales que

$$x[1 \quad 2 \quad -1] - y[2 \quad -1 \quad 3] + z[3 \quad -2 \quad 1] = [9 \quad -1 \quad -2]$$

16. Determine *a, b* y *c* tales que

$$a[2 \quad 3 \quad -1] + b[1 \quad 2 \quad 3] + c[1 \quad 0 \quad 2] = [3 \quad 7 \quad 3]$$

(17-24) Utilice el método de reducción de renglones para resolver los siguientes problemas.

17. *(Punto de equilibrio del mercado)* La ecuación de demanda de cierto producto es $p + 2x = 25$ y la ecuación de la oferta es $p - 3x = 5$, en donde p es el precio y x es la cantidad demandada o suministrada, según el caso. Calcule los valores de x y p en el punto de equilibrio del mercado.

18. *(Punto de equilibrio del mercado)* Las ecuaciones de la demanda y la oferta de cierto artículo son $3p + 5x = 200$ y $7p - 3x = 56$, respectivamente. Determine los valores de x y p en el punto de equilibrio del mercado.

19. *(Punto de equilibrio del mercado)* Si se impone un impuesto sobre las ventas de 11% en cada artículo del ejercicio 18, calcule los nuevos valores de la cantidad x y del precio p_1 pagado por los consumidores. (Véase la sección 4-5).

20. *(Utilidades del fabricante)* El costo en dólares de producir x artículos a la semana de cierto producto está dado por $C = 3x + 500$. Si los artículos se venden a $5 cada uno, ¿cuántos deberá producir a fin de lograr una utilidad semanal igual a $300 más el 10% de los costos de producción?

21. *(Asignación de maquinaria)* Una empresa produce tres productos, A, B y C, los que procesa en tres máquinas. El tiempo (en horas) requerido para procesar una unidad de cada producto por las tres máquinas está dado enseguida.

$$\begin{array}{l} \\ \text{Máquina I} \\ \text{Máquina II} \\ \text{Máquina III} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se dispone de la máquina I por 850 horas, de la máquina II por 1200 horas y de la máquina III por 550 horas. ¿Cuántas unidades de cada producto deberían producirse con el objetivo de emplear todo el tiempo disponible de las máquinas?

22. *(Carga aérea)* Una compañía de carga transportó tres tipos de flete en su transporte aéreo ligero. El espacio requerido por cada unidad de los tres tipos de carga eran de 5, 2 y 4 pies cúbicos, respectivamente. Cada unidad de los tres tipos de carga pesó 2, 3 y 1 kilogramos, repectivamente; mientras que los valores unitarios de los tres tipos de carga fueron $10, $40 y $60, respectivamente. Determine el número de unidades de cada tipo de carga transportada si el valor total de la carga fue de $13,500, ocupó 1050 pies cúbicos de espacio y pesó 550 kilogramos.

23. *(Inversiones)* Una persona invirtió un total de $20,000 en tres inversiones al 6, 8 y 10%. El ingreso anual total fue de $1624 y el ingreso de la inversión del 10% fue dos veces el ingreso de la inversión al 6%. ¿De cuánto fue cada inversión?

24. Un contratista dispone de 5000 horas-hombre de mano de obra para tres proyectos. Los costos por hora-hombre de los tres proyectos son de $8, $10 y $12, respectivamente, y el costo total es de $53,000. Si el número de horas-hombre para el tercer proyecto es igual a la suma de las horas-hombre requeridas por los primeros dos proyectos, calcule el número de horas-hombre de que puede disponerse en cada proyecto.

(25-26) Resuelva los siguientes problemas por reducción de renglones y comente las soluciones.

25. Las ecuaciones de demanda y oferta de cierto artículo son $2p + x = 5$ y $3p - 2x = 11$, respectivamente.

26. En el ejercicio 21, suponga que se dispone de las máquinas I, II y III por 1200, 900 y 1100 horas, respectivamente.

■ 8-4 SISTEMAS SINGULARES

Todos los sistemas de ecuaciones lineales que resolvimos en la última sección tenían soluciones únicas. Existen sistemas de ecuaciones que tienen más de una solución y otros sistemas que no tienen ninguna. Se dice que tales sistemas son **singulares**. Consideremos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Resuelva este sistema:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 4 \\ 3x - 2y + 4z &= 9 \\ 9x - y + 5z &= 30 \end{aligned}$$

Solución Reducimos la matriz aumentada de este sistema de la siguiente manera:

☛ **16**. Demuestre que el sistema $x - 4y + 3z = 4$, $-3x + 2y - z = -1$, $-x - 6y + 5z = 7$ tiene un número infinito de soluciones. Exprese a x y y en términos de z.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 4 & 9 \\ 9 & -1 & 5 & 30 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 9R_1]{R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & -10 & 14 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -10 & 14 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 + 10R_2]{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hasta ahora hemos obtenido las primeras dos columnas en la forma deseada. Sin embargo, al mismo tiempo el tercer renglón sólo tiene ceros, de modo que no podemos obtener un 1 en el tercer elemento de la tercera columna sin alterar la primera y segunda columnas. Así que no podemos continuar el proceso de reducción entre renglones aún más.

La matriz que obtuvimos corresponde a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + \tfrac{2}{5}z &= \tfrac{17}{5} \\ y - \tfrac{7}{5}z &= \tfrac{3}{5} \end{aligned} \qquad (1)$$

La tercera ecuación es $0x + 0y + 0z = 0$, o $0 = 0$, que es válida para todos los valores de x, y y z por lo que podemos ignorarla. Advertimos, por consiguiente, que el sistema dado de tres ecuaciones del sistema (1) puede resolverse para x y y en términos de z.

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{17}{5} - \tfrac{2}{5}z = \tfrac{1}{5}(17 - 2z) \\ y &= \tfrac{3}{5} + \tfrac{7}{5}z = \tfrac{1}{5}(3 + 7z) \end{aligned} \qquad (2)$$

La variable z es arbitraria y puede tomar cualquier valor. Por ejemplo, si $z = 1$, entonces $x = \frac{1}{5}(17 - 2) = 3$ y $y = \frac{1}{5}(3 + 7) = 2$. Así pues, $x = 3$, $y = 2$ y $z = 1$ es una solución. Cambiando los valores de z, obtenemos valores diferentes de x y y del sistema (2) y, por consiguiente, distintas soluciones del sistema dado. Por ello, el sistema tiene un número infinito de soluciones. La forma general de la solución es $x = \frac{1}{5}(17 - 2z)$, $y = \frac{1}{5}(3 + 7z)$, z, en donde z es arbitraria. ☛ **16**

Respuesta $x = \frac{1}{5}z - \frac{2}{5}$, $y = \frac{4}{5}z - \frac{11}{10}$

La solución del ejemplo 1 es sólo una forma de la solución general. Podemos, en realidad, resolver para cualesquiera dos de las variables en términos de la tercera. Por ejemplo, si deseamos resolver para x y z en términos de y, reducimos la matriz a una forma que contenga una matriz identidad de segundo orden en las columnas correspondientes a x y z.

El ejemplo 2 ilustra una situación diferente en que puede ocurrir un número infinito de soluciones.

EJEMPLO 2 Resuelva el sistema siguiente de cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - y + z - t &= 5 \\ 2x - 2y + z + 3t &= 2 \\ -x + y + 2z + t &= 4 \\ 3x - 3y + z + 3t &= 3 \end{aligned}$$

Solución La matriz aumentada de este sistema es

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 + R_1 \\ R_4 - 3R_1}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & -12 \end{array}\right]$$

En esta etapa, observemos que la segunda columna sólo contiene ceros debajo del primer renglón. Así que, es imposible obtener un 1 en la segunda posición de esa columna sin alterar los ceros de la primera columna. En esta clase de situación, lo que debemos hacer es olvidarnos de la segunda columna y pasar a la tercera. La sucesión de operaciones entre renglones $(-1)R_2$ seguida por $R_1 - R_2$, $R_3 - 3R_2$ y $R_4 + 2R_2$ da la matriz en la siguiente forma:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1-1 & -1-(-5) & 5-8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 3-3(1) & 0-3(-5) & 9-3(8) \\ 0 & 0 & -2+2(1) & 6+2(-5) & -12+2(8) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right]$$

Al descartar la segunda columna, hemos reducido la tercera columna a la forma que la segunda columna normalmente tendría (esto es, un 1 en el segundo elemento y ceros en los demás lugares). Aplicando $\frac{1}{15}R_3$, obtenemos ahora

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_1 - 4R_3 \\ R_2 + 5R_3 \\ R_4 + 4R_3}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Al igual que en el ejemplo 1, obtuvimos un renglón completo con ceros en la matriz, que corresponde a la ecuación trivial $0 = 0$. Los otros tres renglones corresponden a las ecuaciones

$$x - y = 1, \quad z = 3 \quad \text{y} \quad t = -1$$

Así pues, observamos que en este caso ciertas variables (z y t) tienen valores definidos, mientras que las otras (x y y) no. Otra vez el número de soluciones es infinito, puesto que podemos permitir que y tome cualquier valor; x está dada entonces por $x = y + 1$. ☛ **17**

☛ **17.** Demuestre que el sistema $2x - 4y + 3z = 4$, $-x + 2y - z = -1$ $x - 2y + 2z = 3$ tiene un número infinito de soluciones. Proporcione la forma de la solución.

Respuesta $z = 2$, $x = 2y - 1$, y es arbitraria.

Existen sistemas que no tienen ninguna solución.

EJEMPLO 3 Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 3x - 2y + 7z &= 20 \\ 2x + 7y + 3z &= 27 \end{aligned}$$

Solución Reducimos la matriz aumentada del sistema de la siguiente manera:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & -2 & 7 & 20 \\ 2 & 7 & 3 & 27 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 2R_1]{R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -5 & 1 & -7 \\ 0 & 5 & -1 & 9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 5 & -1 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 5R_2]{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{11}{5} & \frac{38}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Las primeras dos columnas están en la forma deseada de una matriz identidad. Sin embargo, no pudimos poner un 1 en la tercera columna y tercer renglón sin alterar aquellas dos columnas, de modo que la reducción no puede continuarse aún más. Examinamos la ecuación representada por el tercer renglón.

$$0x + 0y + 0z = 2, \quad \text{o} \quad 0 = 2$$

Es claro que esta ecuación es absurda. Así que, el sistema no tiene ninguna solución, esto es, no existen valores de x, y y z que satisfagan las tres ecuaciones del sistema. ☛ **18**

☛ **18.** Reduzca la matriz aumentada del sistema
$2x - 4y + 3z = 4$
$-3x + 2y - z = 0$
$5x - 6y + 4z = 3$
y de aquí demuestre que el sistema es inconsistente.

Respuesta La forma reducida es

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

En general, *un sistema no tendrá ninguna solución si se obtiene un renglón en que todos los elementos sean cero excepto el último.*

Hemos visto tres posibilidades para la solución de un sistema. Puede tener una solución única, un número infinito de soluciones o ninguna solución. Se dice que un sistema es **consistente** si tiene al menos una solución, o que es **inconsistente** si no tiene ninguna. El sistema del ejemplo 3 es inconsistente; pero los ejemplos 1 y 2 (así como todos los ejemplos de la sección 8-3) son sistemas consistentes.

Es claro por los ejemplos de esta sección que el procedimiento de reducción por renglones esbozado en la sección 8-3 no es lo bastante general para cubrir todos los casos. No siempre podemos reducir la matriz aumentada a la forma $\mathbf{I}|\mathbf{C}$. Más generalmente, podemos reducirla a una forma que posea las siguientes propiedades:

1. El primer elemento distinto de cero en cada renglón es 1.
2. En la columna en que un primer 1 aparece, todos los demás elementos son 0.
3. El primer elemento distinto de cero en cualquier renglón está a la derecha del primer elemento distinto de cero de cada renglón anterior.
4. Cualesquiera renglones que consten por completo de ceros están por debajo de los renglones que tienen elementos distintos de cero.

☛ **19.** En la prueba de unicidad, la posibilidad que $k > n$ no está incluida. ¿Puede ver por qué esto nunca puede suceder? (*Sugerencia*: Vea la propiedad 3 de la forma reducida).

La matriz aumentada de *cualquier* sistema lineal puede reducirse por medio de las operaciones entre renglones a una forma que satisfaga estas condiciones. (El número de ecuaciones puede ser mayor o menor que el número de variables). Con la forma reducida final, es fácil examinar la consistencia y unicidad de la solución.

☛ **20.** ¿Los sistemas siguientes son consistentes? Si es así, ¿la solución es única?
a) $x - 2y = 4$, $y = \frac{1}{2}x + 2$
b) $x - 4y + 3z = 4$, $-x + 2y - z = -2$, $y - z = -1$
c) $2x - y + 3z - 4w = 4$, $-x - z + 2w = 0$, $x + 2y - 2w = -3$, $-2x - y - 2z + 4w = -1$

PRUEBA DE CONSISTENCIA Si la forma reducida final contiene un renglón en el cual sólo la última entrada es distinta de cero, entonces el sistema es inconsistente. De otra manera, es consistente.

PRUEBA DE UNICIDAD Supongamos que el sistema es consistente. En la forma reducida final, sea k el número de renglones en los cuales hay entradas distintas de cero (k se llama el rango por renglón de la matriz de coeficientes A). Sea n el número de variables. Entonces:

Si $k = n$ el sistema tiene sólo una solución.

Si $k < n$ el sistema tiene un número infinito de soluciones. ☛ **19, 20**

Estas pruebas son muy fáciles de aplicar una vez obtenida la forma reducida.

Si en un sistema el número de ecuaciones es menor que el número de variables, el sistema siempre tendrá más de una solución, con tal de que no sea inconsistente. Usaremos el método de los ejemplos 1 y 2 anteriores, y trataremos de obtener una matriz identidad en las columnas correspondientes a algunas de las variables. Esto nos da la solución de las variables correspondientes en términos de las otras. El ejemplo 4 ilustra lo anterior.

EJEMPLO 4 Resuelva el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z + 3w &= -2 \\ x + 3y - 3z + 2w &= 12 \end{aligned}$$

Respuesta *a*) Inconsistente; *b*) consistente, un número infinito de soluciones; *c*) consistente, un número infinito de soluciones.

Solución La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 12 \end{array}\right]$$

Puesto que sólo hay dos ecuaciones en este caso, podemos obtener una matriz identidad de tamaño a lo más 2×2. Supongamos que deseamos resolver para y y w en términos de las variables restantes x y z. Así pues, debemos obtener una matriz identidad en las dos columnas correspondientes a y y a w (esto es, las columnas segunda y cuarta). Aplicando $R_1 \leftrightarrow R_2$,

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -3 & 2 & 12 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + 2R_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -3 & 2 & 12 \\ 5 & 0 & -2 & 5 & 22 \end{array}\right]$$

Así, hemos obtenido la columna de y, como se requería. Ahora debemos cambiar los elementos de la columna de w para obtener cero en la parte superior y 1 en la inferior. Con el propósito de obtener 1 en R_2 aplicamos $\frac{1}{5}R_2$.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -3 & 2 & 12 \\ 5 & 0 & -\frac{2}{5} & 1 & \frac{22}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -\frac{11}{5} & 0 & \frac{16}{5} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{5} & 1 & \frac{22}{5} \end{array}\right]$$

En consecuencia, tenemos una matriz identidad en las columnas que corresponden a y y a w, como lo planeamos. El sistema representado por la matriz final es

$$\begin{aligned} -x + y - \tfrac{11}{5}z + 0w &= \tfrac{16}{5} \\ x + 0y - \tfrac{2}{5}z + w &= \tfrac{22}{5} \end{aligned}$$

Después de despejar y y w, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{16}{5} + x + \tfrac{11}{5}z \\ w &= \tfrac{22}{5} - x + \tfrac{2}{5}z \end{aligned}$$

Por consiguiente, logramos expresar a y y w en términos de las otras variables, x y z.

EJEMPLO 5 El sistema

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 7 \\ 6x - 9y + 12z &= 22 \end{aligned}$$

contiene dos ecuaciones con tres variables. Se deja como un ejercicio verificar que este sistema sea inconsistente. (Si el proceso de reducción de renglones se efectúa ahora, se encontrará que el segundo renglón se reduce a ceros, con excepción del último elemento).

EJERCICIOS 8-4

(1-18) Determine las soluciones de los sistemas siguientes, si éstas existen.

1. $\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ -x + y + 3z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 8 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + y + z &= 4 \\ 2x + 2y - 2z &= 5 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ -x - y + z &= -1 \\ 3x + 3y + 4z &= 8 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 6x - 5y + 6z &= 7 \\ 2x + y + 6z &= 5 \\ 2x - y + 3z &= 3 \end{aligned}$

5. $u - v + 2w = 5$

6. $-x + y + z = 4$

$$\begin{aligned} 4u + u + 3w &= 15 \\ 5u - 2v + 7w &= 31 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= -3 \\ 4x - 2y + z &= 3 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ 3x + 2y + 4z &= 8 \\ 5x + 4y + 14z &= 20 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} a + b - 2c &= 3 \\ 2a + 3b + c &= 13 \\ 7a + 9b - 4c &= 35 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} x + 2y - 3z - t &= 2 \\ 2x + 4y + z - t &= 1 \\ 3x + 6y + 2z + t &= -7 \\ x + 2y + z + t &= 6 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} p + 2q - r + 2s &= 6 \\ -2p + q + 2r + 3s &= 6 \\ 3p + 5q - 3r + s &= 0 \\ p + 2q - r + s &= 2 \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} u + v - w &= 4 \\ 3u - v + 2w &= -1 \\ 2u + 3v + w &= 7 \\ u + 2v + 3w &= 2 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 10 \\ 2x - y + 3z &= 9 \\ x + y - 2z &= -3 \\ 2x + 3y + 4z &= 20 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} x + y - 2z &= -3 \\ 2x + 3y + z &= 10 \\ -x + 2y + 3z &= 9 \\ 3x + y - z &= 4 \\ x - 2y - z &= 2 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 &= 17 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 19 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 9 \\ 3y - 6x - 9z &= 12 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} u - 2v + w &= 7 \\ 5u - 10v + 5w &= 36 \end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ 2x - 3y + 4z &= -3 \end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 10 \\ 3x + 2y + z &= 11 \end{aligned}$$

19. *(Asignación de recursos)* Una pequeña compañía constructora ofrece tres tipos de casas. El primer tipo de casa requiere 3 unidades de concreto, 2 unidades de madera para cancelería y 5 unidades de madera para estructuras. Los tipos segundo y tercero requieren 2, 3, 5 y 4, 2, 6 unidades, respectivamente, de concreto, madera para cancelería y madera para estructuras. Si cada mes la compañía dispone de 150 unidades de concreto, 100 unidades de madera para cancelería y 250 unidades de madera para estructuras, calcule el número de diferentes tipos de casas que la compañía podrá construir al mes si usa todos los materiales de que dispone.

20. *(Decisiones sobre producción)* Una empresa elabora tres productos, A, B y C, los cuales deben procesarse por tres máquinas, I, II y III. Una unidad de A requiere 3, 1 y 8 horas de procesamiento en las máquinas; mientras que 1 unidad de B requiere 2, 3, 3 y una unidad de C necesita 2, 4 y 2 horas en las máquinas. Se dispone de las máquinas I, II y III por 800, 1200 y 1300 horas, respectivamente. ¿Cuántas unidades de cada producto pueden elaborarse usando todo el tiempo disponible en las máquinas?

21. Repita el ejercicio 19 si el número de unidades de concreto, madera para cancelería y madera para estructuras son 100, 80 y 200, respectivamente.

22. En el ejercicio 20, ¿cuántas unidades de A, B y C pueden producirse si se dispone de las máquinas por 900, 1200 y 1500 horas, respectivamente?

REPASO DEL CAPÍTULO 8

Términos, símbolos y conceptos importantes

8.1 Matriz; elementos (o entradas) de una matriz, renglón o columna de una matriz.
Tamaño de una matriz, matriz (o vector) renglón, matriz (o vector) columna.
Matriz cero. Matriz cuadrada.
Igualdad de dos matrices.
Multiplicación de una matriz por un número real (multiplicación por un escalar).
Suma de dos matrices del mismo tamaño.

8.2 Producto de una matriz renglón y una matriz columna.
Multiplicación de dos matrices, condición para que el producto exista.
Elementos de la diagonal de una matriz. Matrices identidad.
Sistemas de ecuaciones: vector variable, matriz de coeficientes, vector de valores.

8.3 Matriz aumentada. Operaciones por renglón.
Método de reducción por renglón. Forma reducida.

8.4 Sistema singular. Forma general reducida.
Sistemas consistente e inconsistente.
Prueba de la consistencia. Prueba de unicidad.

Fórmulas

Si **P** es una matriz renglón $1 \times n$ y **Q** una matriz columna $n \times 1$, entonces, el producto **PQ** es un número real igual a la suma de los n productos de los correspondientes elementos de **P** y **Q**.

Si $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, entonces *el elemento* ij *de la matriz producto* **C** *se obtiene mediante la multiplicación del renglón* i-*ésimo de* **A** *por la* j-*ésima columna de* **B**.

Si **I** es la matriz identidad del tamaño apropiado, $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$ e $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$.

Sistema de ecuaciones lineales: $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 8

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) El siguiente arreglo de números

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

representa una matriz

b) Si **A**, **B** y **C** son matrices del mismo tamaño, entonces $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$.

c) Si $\mathbf{A} = [a_1 \;\; a_2]$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ entonces **AB** está bien definido.

d) Si $\mathbf{A} = [a_1 \;\; a_2]$ y $\mathbf{B} = [b_1 \;\; b_2]$ entonces **AB** está bien definido.

e) Si tanto **AB** como **BA** están definidas, entonces $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

f) Si $\mathbf{AB} = 0$, entonces **A** o **B** es una matriz cero.

g) Si $\mathbf{A} + \mathbf{B} = 0$, entonces $\mathbf{A} = -\mathbf{B}$.

h) Si en un sistema de ecuaciones lineales, el número de ecuaciones es igual al número de variables, entonces el sistema tiene una solución única.

i) La suma de matrices es conmutativa, es decir, si **A** y **B** son matrices del mismo tamaño, entonces $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

j) Si un sistema de ecuaciones lineales consiste en más ecuaciones que variables, entonces tiene un número infinito de soluciones.

k) Un sistema de ecuaciones lineales consistente siempre tiene una solución.

2. Proporcione un ejemplo de dos matrices, **A** y **B**, ambas de 2×2, distintas de la matriz cero y tales que $\mathbf{AB} = 0$. (La respuesta no es única).

(3-10) Dadas las matrices siguientes, efectúe las operaciones que se indican. En caso de que no sea posible realizar la operación indique la razón de ello.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 4 & -7 & 9 \end{bmatrix}$$

3. $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$

4. $\mathbf{E} - 2\mathbf{F} + \mathbf{DC}$

5. $\mathbf{C}(\mathbf{E} + \mathbf{F})$

6. $\mathbf{CD} + \mathbf{AB} - 3\mathbf{B}$

7. $(-3\mathbf{E} + \mathbf{F})\mathbf{D}$

***8.** $\mathbf{C}[(\mathbf{E} - \mathbf{F})\mathbf{D}] - (2\mathbf{A} - \mathbf{B})$

9. $\mathbf{EC}$

10. $\mathbf{D}[(\mathbf{E} - \mathbf{F})\mathbf{D}] - (2\mathbf{A} - \mathbf{B})$

(11-20) Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones matriciales.

11. $x[1 \;\; -1] + y[2 \;\; 3] = [5 \;\; 5]$

12. $x\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

13. $x[1 \;\; -2 \;\; -5] + y\,[0 \;\; 6 \;\; -8] + z[3 \;\; -1 \;\; 4] = [14 \;\; -26 \;\; 30]$

14. $x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 2y\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ -14 \\ 36 \end{bmatrix}$

15. $x\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 8 & -6 & 17 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \\ 6 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} -6 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 9 \\ 17 \end{bmatrix}$

(21-25) En cada una de los ejercicios siguientes, determine una matriz **X** tal que se satisfaga la ecuación dada. Las matrices **A**, **B**, **C**, **D**, **E** y **F** son las que se definieron para los problemas 3 al 10.

***21.** $\mathbf{AX} = \mathbf{C}$

***22.** $\mathbf{XA} = \mathbf{D}$

***23.** $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$

***24.** $\mathbf{EX} = \mathbf{D}$

***25.** $\mathbf{FX} = \mathbf{C}$

26. Si $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ muestre que $\mathbf{A}^2$ es la matriz identidad.

27. Proporcione un ejemplo de dos matrices, **M** y **N**, de 2×2 tales que $\mathbf{MN} = \mathbf{I}$, pero que ninguna de ellas sea igual a la matriz identidad, **I**. (La respuesta no es única).

28. *(Matriz de inventarios)* Carolina lleva el control del número de rosas en un pequeño invernadero. Las tiene clasificadas en dos tamaños, grandes y chicas. El inventario, al inicio de una semana, está dado por la matriz **S**. La primera columna representa el número de rosas rojas, la segunda blancas y la tercera las de color amarillo.

$$\mathbf{S} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 90 & 100 & 75 \\ 55 & 95 & 70 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Grandes} \\ \text{Chicas} \end{array}$$

Si las ventas de esa semana fueron

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 60 & 80 & 50 \\ 55 & 67 & 60 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Grandes} \\ \text{Chicas} \end{array}$$

Escriba el inventario al término de esa semana.

29. *(Matriz de producción)* La fábrica de zapatos "Dura Siempre" produce tres tipos de zapato: para niño, para dama y para caballero. La producción, en cientos de pares al mes, en su planta de León, es

Tipo

	Niño	Dama	Caballero
Café	70	60	70
Negro	80	60	90

Mientras que en su planta de Guanajuato la producción mensual es

Tipo

	Niño	Dama	Caballero
Café	20	30	90
Negro	50	60	110

a) ¿Cuál es la prodcción total mensual en las dos plantas?

b) Si la producción en la planta de León aumentó 20% y en la de Guanajuato se reduce en 10%, ¿cuál será ahora la producción total en las dos plantas?

30. *(Matriz de producción)* Una empresa produce chocolate de dos tipos, amargo y dulce; los empaca en tres tamaños distintos. La producción, en miles de unidades, en su planta de Costa Rica está dada por

	Pequeño	Mediano	Grande
Amargo	20	16	32
Dulce	35	42	58

Mientras que en su planta de Guatemala la producción, también en miles, está dada por

	Pequeño	Mediano	Grande
Amargo	24	32	43
Dulce	47	54	72

a) Escriba la matriz que represente la producción total de ambas plantas.

b) Si la producción en la planta de Costa Rica aumentó 20% y en la de Guatemala aumentó 10%, ¿cuál será ahora la producción total en las dos plantas?

***31.** *(Matrices de costo y de venta)* Dulce María está encargada de la producción de salsa de tomate en una empresa que se elabora en tres presentaciones distintas, y se requieren de cuatro ingredientes principales que por simplicidad les llamaremos I, II, III y IV. La siguiente tabla resume las unidades de cada ingrediente para la elaboración de 100 botellas de cada presentación de salsa de tomate.

	I	II	III	IV
Económica	1	2	2	1
Normal	2	3	2	2
Súper	2	4	3	4

El precio, en dólares, de cada unidad de ingrediente está dado por la siguiente matriz

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 30 \\ 15 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}$$

a) Si Dulce María denota con **R** la matriz de requerimientos, ¿qué representa **RP**? Calcule **RP**.

b) Si se recibe un pedido de 5000 botellas de salsa de tomate Económica, 4500 botellas en presentación Normal y 3000 botellas Súper, ¿cuál es el costo total en ingredientes? Escriba el costo en términos de matrices.

c) El precio de venta de cada botella es 40% más que el costo de los cuatro ingredientes utilizados en su elaboración. ¿Cuál es el precio de venta, redondeado al centavo más cercano, de cada tipo de botella? Escriba el precio en términos de matrices.

*32. Daniela es la gerente de una compañía que vende cuatro modelos de impresoras en tres tiendas distintas. El inventario en la tienda i del modelo j está dado por el elemento c_{ij} de la matriz

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 16 & 10 & 15 & 20 \\ 0 & 15 & 18 & 17 \\ 20 & 26 & 32 & 14 \end{bmatrix}$$

Los precios, en dólares, a los que compra Daniela y a los que se vende al público cada impresora de modelo i está representado por p_{i1} y p_{i2}, respectivamente, de la matriz

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 170 & 239.99 \\ 225 & 289.99 \\ 375 & 519.99 \\ 585 & 729.99 \end{bmatrix}$$

a) Determine **CP**.

b) ¿Qué representa **CP**?

33. *(Costo de adquisiciones)* Daniel está encargado de un torneo de tenis de mesa en su escuela, por lo que compró 4 redes, 10 raquetas y 5 paquetes de pelotas. Si las redes tienen un costo de 10 dólares, cada raqueta un costo de 4 y 12 cada paquete de pelotas, utilice la multiplicación de matrices para representar la cantidad total que Daniel gastó en la compra de estos artículos.

34. *(Costo de adquisiciones)* Una empresa debe amueblar sus dos oficinas. Para una debe comprar 20 sillas, 5 escritorios y 3 computadoras; para la segunda debe comprar 15 sillas, 3 escritorios y 2 computadoras. Si las sillas tienen un costo de \$120 cada una, los escritorios \$500 y cada computadora tiene un costo de \$650, exprese las cantidades totales gastadas en cada una de las oficinas en términos de producto de matrices.

35. *(Ingresos por la renta de automóviles)* Una empresa de renta de automóviles concentró en la siguiente tabla el número de rentas de sus tres tipos de automóviles durante los últimos 4 meses.

Mes				
Ene	Feb	Mar	Abr	
50	75	60	70	Sedán
65	80	50	75	Mediano
40	55	45	40	Vagoneta

Con la tabla anterior defina una matriz **A** de 3×4 que represente la información dada y si $\mathbf{P} = [100 \;\; 120 \;\; 150]$ denota la matriz, determine la matriz **PA** e interprete el significado de cada uno de sus elementos.

CASO DE ESTUDIO

LOS NIÑOS Y LAS NIÑAS EXPLORADORES

Después de leer este capítulo, es claro que el problema de la venta de chocolates se puede plantear de manera clara y natural utilizando la notación matricial. Definimos cada una de las matrices siguientes:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 9 \\ 10 & 10 & 10 \\ 13 & 10 & 7 \\ 5 & 12 & 13 \end{pmatrix}, \text{ la matriz del número de cajas}$$

de cada quien. El primer renglón corresponde a Mang, el segundo a Carolina, el tercero a Dulce y el cuarto a Benjamín.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}, \text{ vector columna del precio por caja.}$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ precio de venta por pieza de chocolate}$$

de cada tipo.

Para calcular las ganancias de cada quien y responder a la pregunta de quién obtuvo la mayor ganancia, calculamos

$$\text{ganancia} = \text{ingreso obtenido} - \text{inversión}.$$

En términos de matrices, tenemos:

$$\mathbf{CP} = \begin{pmatrix} 1110 \\ 1200 \\ 1230 \\ 1130 \end{pmatrix}: \text{ inversión de cada uno.}$$

Por cada caja con 20 chocolates de cada tipo se obtiene un ingreso de:

$$20\mathbf{V} = 20\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix}$$

por lo que el ingreso total que obtuvo cada quien está dado por:

$$\mathbf{C}(20\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 9 \\ 10 & 10 & 10 \\ 13 & 10 & 7 \\ 5 & 12 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 80 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1920 \\ 1200 \\ 1230 \\ 1130 \end{pmatrix}$$

Así, las utilidades de cada uno son:

$$\mathbf{C}(20\mathbf{V}) - \mathbf{CP} = \begin{pmatrix} 1920 \\ 2000 \\ 2060 \\ 1900 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1110 \\ 1200 \\ 1230 \\ 1130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 810 \\ 800 \\ 830 \\ 770 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

i) La que obtuvo la mayor ganancia el primer año fue Dulce, a quien le corresponde el tercer renglón del último vector que se calculó.
ii) La menor inversión se puede ver del vector **CP**, fue \$1110 y corresponde a Mang.
iii) Para responder esta parte, tenemos que reproducir el trabajo anterior, pero con los vectores:

Para el segundo año, $\mathbf{P}_2 = 1.10\mathbf{P} = 1.10\begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 33 \\ 44 \end{pmatrix}$

ya que los precios se incrementaron en 10%.

Por tanto, para el segundo año:

$$\mathbf{C}(20\mathbf{V}) - \mathbf{CP}_2 = \begin{pmatrix} 1920 \\ 2000 \\ 2060 \\ 1900 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1221 \\ 1320 \\ 1353 \\ 1243 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 699 \\ 680 \\ 707 \\ 657 \end{pmatrix}$$

así pues, la que nuevamente obtuvo la mayor ganancia fue Dulce, y el que invirtió menos fue Mang.

Para el tercer año, $\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 65 \\ 45 \\ 40 \end{pmatrix}$, que corresponde a los precios dados para el tercer año.

Con lo que,

$$\mathbf{C}(20\mathbf{V}) - \mathbf{CP}_3 = \begin{pmatrix} 1920 \\ 2000 \\ 2060 \\ 1900 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1425 \\ 1500 \\ 1575 \\ 1385 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 495 \\ 500 \\ 485 \\ 515 \end{pmatrix}$$

Ahora, el que invirtió menos y ganó más fue Benjamín.

Observación: Factorizando la matriz **C**, se puede hacer el cálculo así: $\mathbf{C}(20\mathbf{V} - \mathbf{P})$, que implica hacer menos operaciones.

Ahora suponga que las cajas que compró y vendió cada niño están dadas por las matrices siguientes:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 10 & 5 & 2 \\ 2 & 12 & 3 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 4 & 12 & 10 \\ 9 & 4 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 8 \\ 8 & 5 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \\ 8 & 13 & 5 \end{pmatrix}$$

para los años 1, 2 y 3, respectivamente.

Además, el primer año el precio por caja fue de 60, 30 y 40, para el chocolate blanco, amargo y semiamargo, respectivamente. El segundo año sufrió un incremento del 10%, pero el precio del tercer año fue el mismo que el del segundo. Los niños vendieron cada chocolate al mismo precio los dos primeros años, es decir, en 4, 3 y 3, para cada pieza de chocolate blanco, amargo y semiamargo, respectivamente.

i) ¿Cuántas cajas de cada tipo de chocolate vendió en total cada uno de ellos en los tres años?
ii) ¿Cuál fue la ganancia de cada uno de ellos en cada uno de los primeros dos años?
iii) Si el tercer año las ganancias de Mang, Carolina, Dulce y Benjamín fueron de \$606, \$459, \$459 y \$771, respectivamente, ¿cuál fue el precio de cada pieza de chocolote de cada tipo?

CAPÍTULO 9

Inversas y determinantes

CODIFICACIÓN DE MENSAJES

Un mensaje secreto puede codificarse usando un código y una matriz que realice la codificación del mensaje. Una forma es asignar un número a cada una de las letras del alfabeto y a caracteres de puntuación; por ejemplo:

A	1	G	7	M	13	S	19	Y	25
B	2	H	8	N	14	T	20	Z	26
C	3	I	9	O	15	U	21	?	27
D	4	J	10	P	16	V	22	,	28
E	5	K	11	Q	17	W	23	espacio	29
F	6	L	12	R	18	X	24	.	30

Una matriz de codificación puede ser:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Para codificar el mensaje "ESTUDIA Y APRENDE".

Se debe cambiar cada carácter por su código numérico, con lo que obtenemos la siguiente secuencia:

5 19 20 21 4 9 1 29 25 29 1 16 18 5 14 4 5 30

Ahora, como la matriz de codificación es 3×3, dividimos la secuencia en grupos de tres, en este ejemplo son 6 grupos, con lo cual formamos la siguiente matriz de 3×6:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & 21 & 1 & 29 & 18 & 4 \\ 19 & 4 & 29 & 1 & 5 & 5 \\ 20 & 9 & 25 & 16 & 14 & 30 \end{pmatrix}$$

Para encriptar el mensaje basta con multiplicar la matriz de codificación, C, por la matriz del mensaje, M. Multiplicando estas matrices, como se estudió en el capítulo anterior, obtenemos la siguiente matriz del mensaje encriptado:[1]

$$\mathbf{C\,M} = \begin{pmatrix} 130 & 92 & 173 & 108 & 93 & 67 \\ 43 & 29 & 59 & 31 & 28 & 14 \\ 108 & 77 & 135 & 108 & 88 & 108 \end{pmatrix}$$

Lo que uno recibiría sería esta matriz de 3×6. ¿Cómo podemos recuperar el mensaje original?

En este capítulo, se estudiará, entre otras cosas, una operación que nos servirá para descifrar el mensaje.

[1] Si el último grupo no tiene tres números, se puede completar con uno o dos códigos del espacio. El mensaje se codifica por columnas de izquierda a derecha.

TEMARIO

■ 9-1 LA INVERSA DE UNA MATRIZ

DEFINICIÓN Sea **A** una matriz cuadrada $n \times n$. Entonces, una matriz **B** se dice que es una inversa de **A** si satisface las dos ecuaciones matriciales

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I} \quad \text{y} \quad \mathbf{BA} = \mathbf{I}$$

en donde **I** es la matriz identidad de tamaño $n \times n$. En otras palabras, el producto de las matrices **A** y **B** en cualquier orden da la matriz identidad.

Es claro por la definición que **B** debe ser una matriz cuadrada del mismo tamaño que **A**; de otra manera uno o ambos de los productos **AB** o **BA** no estarían definidos.

EJEMPLO 1 Muestra que $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ es una inversa de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Solución Con el objetivo de probar que **B** es una inversa de **A**, todo lo que necesitamos probar es que **AB** = **I** y que **BA** = **I**.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(-2) + 2(\frac{3}{2}) & 1(1) + 2(-\frac{1}{2}) \\ 3(-2) + 4(\frac{3}{2}) & 3(1) + 4(-\frac{1}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2(1) + 1(3) & -2(2) + 1(4) \\ \frac{3}{2}(1) - \frac{1}{2}(3) & \frac{3}{2}(2) - \frac{1}{2}(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

☛ **1.** Demuestre que $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ es una inversa de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

Por consiguiente, **B** es una inversa de **A**. ☛ **1**

No toda matriz cuadrada tiene una inversa. Esto se ilustra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Determine una inversa de la matriz **A**, si tal inversa existe, en el caso de que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución Sea **B** una inversa de **A**. Si **B** existe, es una matriz cuadrada del mismo tamaño que **A** y debe ser de la forma

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

en donde *a, b, c* y *d* son elementos específicos.

Ahora la ecuación $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ implica que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o bien,

$$\begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 2a + 4c & 2b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, comparando los elementos de estas matrices, encontramos que

$$\begin{aligned} a + 2c &= 1 \\ 2a + 4c &= 0 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} b + 2d &= 0 \\ 2b + 4d &= 1 \end{aligned}$$

☛ **2.** Como en el ejemplo 2, demuestre que $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ no tiene una inversa.

Estos sistemas de ecuaciones son inconsistentes, como advertimos, si dividimos las dos ecuaciones de abajo entre 2. En consecuencia, estos sistemas *no tienen solución,* de modo que no existe una matriz **B** que satisfaga la condición $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$. Así que **A** no tiene una inversa. ☛ **2**

DEFINICIÓN Se dice que una matriz **A** es **invertible** o **no singular** si tiene una inversa. Si **A** no tiene una inversa, se dice que es una **matriz singular**.

Puede probarse que la inversa de cualquier matriz no singular es única. Esto es, si **A** tiene alguna inversa, ésta es única. Debido a esto, denotamos la inversa de **A** por $\mathbf{A}^{-1}$ (léase **A** *inversa*). Así, tenemos las dos ecuaciones

$$\boxed{\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}}$$

Regresemos ahora al problema de encontrar la inversa de una matriz no singular. Como ejemplo, supongamos que deseamos determinar la inversa de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Denotemos con

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

a la inversa de **A**. Se sigue que **B** debe satisfacer las dos ecuaciones

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I} \quad \text{y} \quad \mathbf{BA} = \mathbf{I}$$

La ecuación matricial $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, cuando se escribe por completo, es

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o bien,

$$\begin{bmatrix} a + 3c & b + 3d \\ 2a + 5c & 2b + 5d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} a + 3c &= 1 & \qquad b + 3d &= 0 \\ 2a + 5c &= 0 \quad \text{y} & 2b + 5d &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Obsérvese que las dos ecuaciones de la izquierda forman un sistema de ecuaciones en las incógnitas a y c, mientras que las dos ecuaciones de la derecha forman un sistema en las incógnitas b y d. Para resolver estos dos sistemas de ecuaciones, debemos transformar las correspondientes matrices aumentadas

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{array}\right] \quad \text{y} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{array}\right] \tag{2}$$

a sus formas reducidas. El lector puede verificar que estas formas reducidas son, respectivamente,

☛ **3.** Encuentre la sucesión de operaciones por renglón que se necesita para reducir cada una de las matrices aumentadas en (2).

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \text{y} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$ ☛ **3**

Así pues, $a = -5$, $c = 2$, $b = 3$ y $d = -1$. En consecuencia, la matriz **B** que satisface la ecuación **AB** = **I** es

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Es fácil verificar ahora que esta matriz **B** también satisface la ecuación **BA** = **I**.* Por tanto, **B** es la inversa de **A**, y podemos escribir

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo, para encontrar la inversa, resolvimos los dos sistemas de la ecuación (1) reduciendo sus matrices aumentadas [ecuación (2)]. Ahora puede observarse que los dos sistemas que aparecen en la ecuación (1) tienen la misma matriz de coeficientes **A**, de modo que es posible reducir ambas matrices aumentadas en el mismo cálculo puesto que ambas requieren la misma sucesión de operaciones entre renglones. El procedimiento que podemos usar con la finalidad de lograr esta reducción simultánea es escribir la matriz de coeficientes **A**, dibujar una línea vertical y escribir las constantes que aparecen en los lados derechos de los sistemas de la ecuación (1) en dos columnas, como se aprecia a continuación.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{3}$$

Enseguida efectuamos operaciones entre renglones de manera ordinaria, con el propósito de reducir el lado izquierdo de esta matriz aumentada a una matriz identidad.

Respuesta La *misma* sucesión funciona para ambas matrices:

$$R_2 - 2R_1,\ -R_2,\ R_1 - 3R_2$$

---

* Puede comprobarse (si bien la demostración es un poco difícil) que si cualesquiera de las dos condiciones **AB** = **I** o **BA** = **I** se cumple, la otra también se satisface. Por eso sólo necesitamos usar una de las dos condiciones para determinar **B**.

Puede observarse que los elementos a la derecha de la línea vertical en la matriz aumentada (3) forman una matriz identidad 2×2. Por ello, esta matriz aumentada puede abreviarse como $\mathbf{A} \mid \mathbf{I}$. Si transformamos $\mathbf{A} \mid \mathbf{I}$ a su forma reducida, al mismo tiempo reduciremos las dos matrices aumentadas que aparecen en la ecuación (2) y, por tanto, resolveremos los dos sistemas lineales que se advierten en la ecuación (1) a la vez.

En este ejemplo, $\mathbf{A} \mid \mathbf{I}$ se reduce por la sucesión siguiente de operaciones entre renglones.

$$\mathbf{A} \mid \mathbf{I} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 - 3R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Ésta es la matriz reducida requerida, puesto que tienen una matriz identidad a la izquierda de la línea vertical. Los elementos a la derecha de esta línea son las soluciones de los dos sistemas dados por la ecuación (1); en otras palabras, forman la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Pero esta matriz es la inversa de $\mathbf{A}$. Por tanto, concluimos que en la forma reducida de la matriz aumentada $\mathbf{A} \mid \mathbf{I}$, la inversa de $\mathbf{A}$ aparece a la derecha de la línea vertical. Resumiendo: *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz cuadrada invertible de tamaño* $n \times n$, *y sea* $\mathbf{I}$ *la matriz identidad del mismo tamaño. Entonces, la forma reducida de* $\mathbf{A} \mid \mathbf{I}$ *es* $\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}$.

EJEMPLO 3 Encuentre $\mathbf{A}^{-1}$, dada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Solución

$$\mathbf{A} \mid \mathbf{I} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 3R_1]{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 - R_2]{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

☛ **4.** Encuentre $\mathbf{A}^{-1}$, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1 - R_3 \\ R_2 - R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Esta matriz es la forma reducida $\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}$.

Por consiguiente,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -5 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

El lector puede verificar que ésta es en realidad la matriz inversa de **A** comprobando las dos ecuaciones

$$\mathbf{AA}^{-1} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$ ☛ **4**

Respuesta $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$

¿Cómo sabemos si una matriz **A** es invertible o no? Si aplicamos el procedimiento de transformar $\mathbf{A} \mid \mathbf{I}$ a su forma reducida y si en cualquier etapa encontramos que cualquiera de los renglones a la izquierda de la línea vertical sólo consta de ceros, entonces puede probarse que $\mathbf{A}^{-1}$ no existe.

EJEMPLO 4 Determine $\mathbf{A}^{-1}$ si existe, dada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

Solución

$$\mathbf{A} \mid \mathbf{I} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

☛ **5.** Encuentre $\mathbf{A}^{-1}$, si existe, si

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

Dado que el tercer renglón a la izquierda de la línea vertical sólo consta de ceros, la reducción no puede completarse. Debemos concluir que $\mathbf{A}^{-1}$ no existe y que **A** es una matriz *singular*. (Véase también el ejemplo 4 de la sección 9-5). ☛ **5**

Respuesta

a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A}^{-1}$ no existe.

Las inversas de matrices tienen muchos usos, uno de los cuales está en la solución de sistemas de ecuaciones. En la sección 8-3, resolvimos sistemas de ecuaciones lineales transformando la matriz aumentada a su forma reducida. En el caso en que tengamos n ecuaciones con n variables, también podemos resolver el sistema encontrando la inversa de la matriz de coeficientes.

Un sistema de ecuaciones puede escribirse en forma matricial como $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Si la matriz de coeficientes **A** es invertible, existe $\mathbf{A}^{-1}$. Multiplicando por la izquierda ambos lados de la ecuación matricial dada por $\mathbf{A}^{-1}$, obtenemos

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX}) = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}.$$

Usando la propiedad asociativa y simplificando, podemos escribir esto de la manera siguiente:

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$$
$$\mathbf{IX} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$$
$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$$

Así, hemos obtenido una expresión que proporciona la solución $\mathbf{X}$ del sistema de ecuaciones dado.

EJEMPLO 5 Resuelva el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 2x + 5y + 7z &= 6 \\ 3x + 7y + 8z &= 5 \end{aligned}$$

Solución El sistema de ecuaciones considerado en forma matricial es

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \tag{4}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Así que $\mathbf{A}^{-1}$ (como se encontró en el ejemplo 3) está dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -5 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Se sigue que la solución de la ecuación (4) está dada por

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -5 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 27 - 30 + 5 \\ -15 + \ \ 6 + 5 \\ 3 + \ \ 6 - 5 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Esto es,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente $x = 1$, $y = -2$ y $z = 2$

☛ **6.** Resuelva el ejemplo 6 si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

A primera vista, parecería que este método de resolver un sistema de ecuaciones es mucho menos conveniente que el método más simple de reducción de renglones descrito en la sección 8-3. La ventaja de usar la matriz inversa se hace patente en casos en que deben resolverse varios sistemas de ecuaciones con la misma matriz de coeficientes. En problemas de ese tipo, las soluciones de *todos* los sistemas pueden determinarse de inmediato una vez que se ha encontrado la inversa de la matriz de coeficientes; no es necesario usar la reducción de renglones una y otra vez sobre cada sistema. (Véase la observación final de la sección siguiente).

EJEMPLO 6 Determine la solución del sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

y a, b y c son números reales arbitrarios.

Solución Dejamos para usted, como ejercicio, calcular la inversa de la matriz. El resultado es

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3 & 7 & -1 \\ 8 & -14 & 5 \\ 6 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces la solución del sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ es

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3 & 7 & -1 \\ 8 & -14 & 5 \\ 6 & -7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3a + 7b - c \\ 8a - 14b + 5c \\ 6a - 7b + 2c \end{bmatrix}$$

Respuesta $x = -\frac{1}{2}(a + 4b + 3c)$,

$y = \frac{1}{2}(a + 2b + c)$,

$z = \frac{1}{2}(a - 2b - c)$

Por tanto,

$$x = \frac{1}{7}(-3a + 7b - c) \quad y = \frac{1}{7}(8a - 14b + 5c) \quad z = \frac{1}{7}(6a - 7b + 2c)$$ ☛ **6**

EJERCICIOS 9-1

(1-16) En los siguientes problemas, encuentre la inversa de la matriz dada (si existe).

1. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 4 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 10 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(17-24) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones determinando la inversa de la matriz de coeficientes.

17. $2x - 3y = 1$
$3x + 4y = 10$

18. $3x_1 + 2x_2 = 1$
$2x_1 - x_2 = 3$

19. $4u + 5v = 14$
$2v - 3u = 1$

20. $3y - 2z = -4$
$5z + 4y = -13$

21. $2x - y + 3z = -3$
$x + y + z = 2$
$3x + 2y - z = 8$

22. $x + 2y - z = 1$
$2z - 3x = 2$
$3y + 2z = 5$

23. $2u + 3v - 4w = -10$
$w - 2u - 1 = 0$
$u + 2v = 1$

24. $p + 2q - 3r = 1$
$q - 2p + r = 3$
$2r + p - 2 = 0$

25. *(Purificación del mineral)* Dos metales, X y Y, pueden extraerse de dos tipos de minerales, P y Q. Cien libras de mineral P producen 3 onzas de X y 5 onzas de Y; y 100 libras de mineral Q producen 4 onzas de X y 2.5 onzas de Y. ¿Cuántas libras de minerales P y Q se requerirán para producir 72 onzas de X y 95 onzas de Y?

26. *(Inversiones)* Una persona invierte un total de $20,000 en tres diferentes inversiones que producen 5, 6 y 8%, respectivamente. El ingreso de la inversión al 8% es equivalente a dos veces el ingreso de la inversión al 5% y el ingreso total por año de las tres inversiones es $1296. Encuentre la cantidad depositada en cada inversión.

27. Si $\mathbf{A}$ es una matriz no singular y $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, demuestre que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

28. Si $\mathbf{AB} = \mathbf{A}$ y $\mathbf{A}$ es no singular, pruebe que $\mathbf{B} = \mathbf{I}$.

29. Dadas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Verifique el resultado $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

30. Con las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ del ejercicio 29 verifique que $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$

***31.** Demuestre que $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ con $\mathbf{A}$ cualquier matriz invertible.

***32.** Pruebe que si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos matrices $n \times n$ invertibles, entonces

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

***33.** Demuestre que si tanto $\mathbf{B}$ como $\mathbf{C}$ son inversas de una matriz $\mathbf{A}$, se sigue que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. (*Sugerencia*: Considere $\mathbf{BAC}$).

■ 9-2 ANÁLISIS INSUMO-PRODUCTO

El modelo insumo-producto fue introducido por primera vez a finales de los años cuarenta por Leontief, el ganador del premio Nobel en 1973, en un estudio de la economía de Estados Unidos. La principal característica de este modelo es que incorpora las interacciones entre diferentes industrias o sectores que integran la economía. El objetivo del modelo es permitir a los economistas predecir los niveles de producción futuros de cada industria, con el propósito de satisfacer demandas futuras para diversos productos. Tal predicción se complica por las interacciones entre las diferentes industrias, a causa de las cuales un cambio en la demanda de un producto de una industria puede modificar los niveles de producción de otras industrias. Por ejemplo, un incremento en la demanda de automóviles no sólo conducirá a un aumento en los niveles de producción de los fabricantes de automóviles, sino también en los niveles de una variedad de otras industrias en la economía, tales como la industria del acero, la industria de los neumáticos, etc. En el modelo original de

Leontief, la economía de Estados Unidos aparece dividida en 500 sectores de este tipo que interactúan entre sí.

Con el objetivo de describir el modelo en los términos más simples, consideremos una economía que conste sólo de dos industrias, P y Q. Para clarificar nuestras ideas, suponga que las interacciones entre estas dos industrias son las dadas en la tabla l. Las primeras dos columnas de esta tabla contienen los *insumos* de las dos industrias, medidos en unidades adecuadas. (Por ejemplo, las unidades podrían ser millones de dólares al año). De la primera columna, advertimos que en su producción anual, la industria P usa 60 unidades de su propio producto y 100 unidades del producto de la industria Q. De manera similar, Q emplea 64 unidades del producto de P y 48 unidades de su propio producto. Además, en el último renglón observamos que P usa 40 unidades de *insumos primarios,* los cuales incluyen insumos tales como mano de obra, suelos o materias primas; mientras que Q utiliza 48 unidades de insumos primarios.

TABLA 1

	Insumos de la industria P	Insumos de la industria Q	Demandas finales	Producción total
Producción de la industria P	60	64	76	200
Producción de la industria Q	100	48	12	160
Insumos primarios	40	48		
Insumos totales	200	160		

Totalizando las columnas, advertimos que los insumos totales son de 200 unidades en el caso de P y de 160 unidades para Q. En el modelo se supone que todo lo que se produce se consume, o en otras palabras, la producción de cada industria debe ser igual a la suma de todos los insumos (medidos en las mismas unidades). Así, la producción total de P debe ser de 200 unidades y de 160 unidades en el caso de Q.

Consideremos ahora los dos primeros renglones de la tabla 1, en los cuales se advierte cómo se utilizan los productos de cada industria. De las 200 unidades producidas por P, 60 son utilizadas por ella misma y 64 por Q. Esto deja 76 unidades disponibles para satisfacer la *demanda final*; esto es, los bienes que no utilizan internamente las propias industrias productoras. Estos podrían consistir en esencia de bienes producidos para consumo doméstico, consumo del gobierno o exportación. De manera similar, de las 160 unidades producidas por Q, 100 las utiliza P, 48 no salen de Q y 12 unidades se destinan a satisfacer la demanda final.

Suponga que la investigación de mercado predice que en 5 años, la demanda final para P decrecerá de 76 a 70 unidades; mientras que en el caso de Q, se incrementará de 12 a 60 unidades. La pregunta que surge se refiere a qué tanto debería cada industria ajustar su nivel de producción para satisfacer estas demandas finales proyectadas.

Es claro que las dos industrias no operan independientemente una de otra (por ejemplo, la producción total de P depende de la demanda final del producto de Q y viceversa). Por tanto, la producción de una industria está ligada a la producción de la otra industria (u otras industrias). Supongamos que con el propósito de satisfacer las demandas finales proyectadas en 5 años, P debe producir x_1 unidades y Q debe producir x_2 unidades.

En la tabla 1 advertimos que con el objetivo de producir 200 unidades, la industria P emplea 60 unidades de su propio producto y 100 unidades del producto de Q. Así, la elaboración por parte de la industria P de x_1 unidades requiere la utilización de $\frac{60}{200}x_1$ unidades de su propio producto y $\frac{100}{200}x_1$ unidades del producto de Q. En forma análoga, para producir x_2 unidades, la industria Q debería usar $\frac{64}{160}x_2$ unidades del producto de P y $\frac{48}{160}x_2$ unidades de su propio producto. Por lo que tenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{array}{c} \text{Producción total} \\ \text{de la industria P} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Unidades} \\ \text{consumidas por P} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Unidades} \\ \text{consumidas por Q} \end{array} + \text{Demanda final}$$

Es decir,

$$x_1 = \tfrac{60}{200}x_1 + \tfrac{64}{160}x_2 + 70$$

dado que la nueva demanda final es de 70 unidades.

De manera similar, de x_2 unidades producidas por la industria Q, $\frac{100}{200}x_1$ unidades las utiliza P y $\frac{48}{160}x_2$ unidades las emplea Q misma. Así,

$$\begin{array}{c} \text{Producción total} \\ \text{de la industria Q} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Unidades} \\ \text{consumidas por P} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Unidades} \\ \text{consumidas por Q} \end{array} + \text{Demanda final}$$

Esto es,

$$x_2 = \tfrac{100}{200}x_1 + \tfrac{48}{160}x_2 + 60$$

Estas dos ecuaciones pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{60}{200} & \frac{64}{160} \\ \frac{100}{200} & \frac{48}{160} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 70 \\ 60 \end{bmatrix}$$

En consecuencia,

$$\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{D} \tag{1}$$

en donde

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{60}{200} & \frac{64}{160} \\ \frac{100}{200} & \frac{48}{160} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 70 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Llamaremos a **X** la **matriz de producción**, a **D** la **matriz de demanda** y a **A** la **matriz insumo-producto**. Los elementos de la matriz **A** se denominan **coeficientes de insumo-producto**.

Consideremos la interpretación de los elementos de la matriz insumo-producto. Como de costumbre, denotaremos por a_{ij} a un elemento arbitrario de **A**. Nótese que de las 200 unidades de los insumos totales de la industria P, 60 constan de unidades de su propio producto y 100 corresponden a unidades del producto de Q. Por ello, los elementos $\frac{60}{200}$ y $\frac{100}{200}$ de la primera columna de la matriz insumo-producto representan la proporción de los insumos de P que provienen de las industrias P y Q, respectivamente. En general, a_{ij} representa la parte fraccionaria de los insumos de la industria j que son producidos por la industria i.

Cada elemento de la matriz de insumo-producto está entre 0 y 1, y la suma de los elementos de cualquier columna nunca es mayor que 1. Observemos que la matriz insumo-producto

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{60}{200} & \frac{64}{160} \\ \frac{100}{200} & \frac{48}{160} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$$

del ejemplo anterior puede obtenerse directamente de la tabla 1 dividiendo cada número en el rectángulo interior de la tabla entre la producción total de la industria que encabeza la columna. Por ejemplo, en la primera columna, encabezada por P, dividimos cada elemento entre 200, que es la producción total de la industria P. Así, obtenemos $\frac{60}{200}$ y $\frac{100}{200}$ como los elementos de la primera columna de la matriz insumo-producto.

La ecuación (1), $\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{D}$, se conoce como **ecuación insumo-producto**. Para encontrar la matriz de producción **X** que cumplirá con las demandas finales proyectadas, debemos resolver la ecuación (1) para **X**. Tenemos

$$\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{D}$$

$$\mathbf{X} - \mathbf{AX} = \mathbf{D}$$

Podemos escribir esto como

$$\mathbf{IX} - \mathbf{AX} = \mathbf{D} \quad \text{o bien} \quad (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{D}$$

Tenemos un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Podemos resolver este sistema por medio de la reducción por renglones o de forma alterna utilizando la inversa de la matriz de coeficientes. Suponga que $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ existe. Entonces, como en la sección 9-1, tenemos

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{D}$$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{D}$$

Por tanto, observamos que la matriz de producción **X** queda determinada una vez que se encuentra la inversa de la matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Esta inversa puede calcularse usando los métodos de la sección 9-1.

En nuestro ejemplo, tenemos

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.4 \\ -0.5 & -0.7 \end{bmatrix}$$

Empleando los métodos de la sección 9-1,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{29}\begin{bmatrix} 70 & 40 \\ 50 & 70 \end{bmatrix}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{D} \\ &= \frac{1}{29}\begin{bmatrix} 70 & 40 \\ 50 & 70 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 70 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7300}{29} \\ \frac{7700}{29} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 251.7 \\ 265.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Concluyendo, la industria P debe producir 251.7 unidades y Q debería producir 265.5 unidades con el objetivo de satisfacer las demandas finales proyectadas en 5 años. ☛ **7**

Puede suceder que un economista no tenga seguridad acerca de sus pronósticos de las demandas futuras finales. Así él o ella podría desear calcular la matriz de producción **X** para diferentes matrices de demanda **D**. En tal caso, es mucho más conveniente utilizar la fórmula $\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{D}$, que incluye la matriz inversa, que utilizar la reducción por renglón para obtener **X** para cada **D** diferente. ☛ **8**

☛ **7.** ¿Cuáles son las producciones si el pronóstico de las demandas futuras se cambia a 70 y 50 para P y Q, respectivamente?

Respuesta $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 70 \\ 50 \end{bmatrix}$

$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{6900}{29} \\ \frac{7000}{29} \end{bmatrix}$

☛ **8.** Los encabezados de la siguiente tabla son los mismos que los de la tabla 1.

20	40	40	100
80	80	40	200
0	80		
100	200		

Construya la matriz de insumo-producto y encuentre las producciones, si las demandas se cambian a 30 y 50, respectivamente.

Respuesta $A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.8 & 0.4 \end{bmatrix}$

Producciones 87.5 y 200

EJEMPLO 1 ***(Modelo insumo-producto)*** Suponga que en una economía hipotética con sólo dos industrias, I y II, la interacción entre industrias es como se advierte en la tabla 2.

a) Determine la matriz insumo-producto **A**.

b) Obtenga la matriz de producción si las demandas finales cambian a 312 unidades en el caso de la industria I y a 299 unidades para la industria II.

c) ¿Cuáles serán entonces los nuevos insumos primarios correspondientes a las dos industrias?

TABLA 2

	Industria I	**Industria II**	**Demandas finales**	**Producción total**
Industria I	240	750	210	1200
Industria II	720	450	330	1500
Insumos primarios	240	300		

Solución

a) Dividiendo la primera columna (encabezada por la industria I) entre la producción total de la industria I, 1200, y la segunda columna (encabezada por la industria II) entre la producción total de la industria II, 1500, obtenemos la matriz insumo-producto **A**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{240}{1200} & \frac{750}{1500} \\ \frac{720}{1200} & \frac{450}{1500} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.6 & 0.3 \end{bmatrix}$$

b) Si **I** denota la matriz identidad 2×2, se sigue que

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.6 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.5 \\ -0.6 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Usando los métodos de la sección 9-1,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{35}{13} & \frac{25}{13} \\ \frac{30}{13} & \frac{40}{13} \end{bmatrix} = \frac{5}{13}\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Si **D** representa al nuevo vector de demanda, esto es,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 312 \\ 299 \end{bmatrix}$$

y **X** la nueva matriz de producción, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{D} \\ &= \frac{5}{13}\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 312 \\ 299 \end{bmatrix} = \frac{5}{13}\begin{bmatrix} 3679 \\ 4264 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1415 \\ 1640 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por consiguiente, la industria I debe producir 1415 unidades y la industria II debe producir 1640 unidades para satisfacer las nuevas demandas finales.

☛ **9.** Una economía de dos sectores se describe en la tabla siguiente:

	Industria primaria	Industria secundaria	Demandas finales	Producción total
Primaria	10	75	15	100
Secundaria	50	60	40	150
Insumos primarios	40	15		

Construya la matriz de insumo-producto y determine las producciones si las demandas finales se cambian a 40 y 40, respectivamente.

Respuesta $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}$

$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{4400}{29} \\ \frac{5600}{29} \end{bmatrix}$

c) En el caso de la industria I, deben producirse 240 unidades de insumos primarios para generar una producción total de 1200 unidades. Esto es, los insumos primarios son $\frac{240}{1200} = 0.2$ de la producción total. Así, 0.2 de la nueva producción, 1415, da los nuevos insumos primarios de la industria I. Los insumos primarios de la industria I son $0.2(1415) = 283$ unidades. En forma análoga, los insumos primarios en el caso de la industria II son $\frac{300}{1500} = 0.2$ de la producción total, de modo que son iguales a $0.2(1.640) = 328$ unidades. En consecuencia, los nuevos insumos primarios para las dos industrias serán de 283 y 328 unidades, respectivamente. ☛ ***9***

Las suposiciones básicas del modelo insumo-producto pueden advertirse en estos ejemplos simples en que sólo interactúan dos sectores. En un modelo realista de una economía, es necesario considerar un número mucho más grande de sectores. La extensión del modelo introduce grandes complicaciones en los cálculos, por lo que es imprescindible utilizar una computadora que resuelva el sistema de ecuaciones. Sin embargo, los principios que intervienen en el modelo en esencia son los mismos que se consideraron en nuestro ejemplo de dos sectores.

Podemos resumir estas suposiciones básicas de la siguiente manera:

1. Cada industria o sector de la economía produce un solo bien y no existen dos industrias que produzcan un mismo bien.
2. Para cada industria, el valor total de la producción es igual al valor total de todos los insumos, y toda la producción es consumida por otros sectores productivos o por las demandas finales.
3. La matriz insumo-producto permanece constante en el tiempo considerado. En periodos más largos, los avances tecnológicos provocan cambios en la matriz insumo-producto y esto significa que las predicciones basadas en este modelo sólo serán relativamente confiables a corto plazo.

EJERCICIOS 9-2

1. *(Modelo insumo-producto)* La tabla 3 da la interacción entre dos sectores en una economía hipotética.

TABLA 3

	Industria I	**Industria II**	**Demandas finales**	**Producción total**
Industria				
I	20	56	24	100
II	50	8	22	80
Insumos primarios	30	16		

a) Encuentre la matriz insumo-producto **A**.

b) Si en 5 años las demandas finales cambian a 74 en el caso de la industria I y a 37 para la industria II, ¿cuánto deberá producir cada industria para satisfacer esta demanda proyectada?

c) ¿Cuáles serán los nuevos requerimientos de insumos primarios en 5 años para las dos industrias?

2. *(Modelo insumo-producto)* La interacci6n entre los dos sectores de una economía hipotética están dados en la tabla 4.

a) Encuentre la matriz insumo-producto **A**.

b) Suponga que en 3 años la demanda de productos agrícolas decrece a 63 unidades y se incrementa a 105 unida-

TABLA 4

	Agri-cultura	Bienes manu-facturados	Demandas finales	Producción total
Agricultura	240	270	90	600
Bienes manufacturados	300	90	60	450
Mano de obra	60	90		

des para bienes manufacturados. Determine el nuevo vector de producción que satisfaga estas nuevas demandas.

c) ¿Cuáles serán los nuevos requerimientos de mano de obra para cada sector?

3. *(Modelo insumo-producto)* La tabla 5 da la interacción entre dos sectores de una economía hipotética.

TABLA 5

	Industria P	Industria Q	Demandas finales	Producción total
Industria				
P	60	75	65	200
Q	80	30	40	150
Mano de obra	60	45		

a) Determine la matriz insumo-producto **A**.

b) Encuentre la matriz de producción si las demandas finales cambian a 104 en el caso de P y a 172 para Q.

c) ¿Cuáles son los nuevos requerimientos de mano de obra?

4. *(Modelo insumo-producto)* La interacción entre dos industrias P y Q que integran una economía hipotética están dadas en la tabla 6.

a) Encuentre la matriz insumo-producto **A**.

TABLA 6

	Industria P	Industria Q	Demanda del consumidor	Producción total
Industria				
P	46	342	72	460
Q	322	114	134	570
Insumos de mano de obra	92	114		

b) Determine la matriz de producción si las demandas de los consumidores cambian a 129 en el caso de P y a 213 por lo que respecta a Q.

c) ¿Cuáles serán los nuevos requerimientos de mano de obra para las dos industrias?

***5.** En la economía del ejercicio 3, se anticipa que la demanda final para la producción de la industria Q se incrementará el doble a corto plazo, comparada con la demanda final de la industria P. Durante los próximos 5 años, la mano de obra de que podrán disponer se incrementará de 105 a 150 unidades. ¿En cuánto deberán incrementarse las dos demandas finales durante este periodo si esta oferta de mano de obra se emplea por completo?

6. *(Modelo insumo-producto)* La interacción entre tres industrias P, Q y R está dada por la tabla 7.

TABLA 7

	Industria P	Industria Q	Industria R	Demandas finales	Producción total
Industria					
P	20	0	40	40	100
Q	40	40	100	20	200
R	0	80	40	80	200
Insumos primarios	40	80	20		

a) Construya la matriz de insumo-producto.

b) Determine las nuevas producciones de P, Q y R si las demandas finales cambian en el futuro a 70, 50 y 120, respectivamente.

c) ¿Cuáles serán entonces los insumos primarios para las tres industrias?

7. Repita el ejercicio 6 para los tres sectores de economía dados en la tabla 8, si las nuevas demandas finales son 68, 51 y 17 para P, Q y R, respectivamente.

TABLA 8

	Industria P	Industria Q	Industria R	Demandas finales	Producción total
Industria					
P	22	80	76	42	220
Q	88	40	38	34	200
R	66	60	57	7	190
Insumos primarios	44	20	19		

■ 9-3 CADENAS DE MARKOV (OPCIONAL)

Un proceso o sucesión de eventos que se desarrolla en el tiempo en el cual el resultado en cualquier etapa contiene algún elemento que depende del azar se denomina un **proceso aleatorio** o **proceso estocástico**. Por ejemplo, la sucesión podría ser las condiciones del tiempo en Veracruz en una serie de días consecutivos: el tiempo cambia día con día de una manera que en apariencia es algo aleatorio. O bien, la sucesión podría consistir de los precios diarios al cierre de ciertas acciones que cotizan en la bolsa, en donde otra vez interviene cierto grado de aleatoriedad. Una sucesión de elecciones gubernamentales es otro ejemplo de un proceso estocástico.

Un ejemplo muy simple de un proceso estocástico es una sucesión de ensayos de Bernoulli, por ejemplo, una sucesión de lanzamientos de una moneda. En este caso, el resultado en cualquier etapa es independiente de todos los resultados previos. (En realidad, esta condición de independencia es parte de la definición de los ensayos de Bernoulli). Sin embargo, en la mayoría de los procesos estocásticos cada resultado depende de lo que sucedió en etapas anteriores del proceso. Por ejemplo, el tiempo en un día determinado no es aleatorio por completo, sino que es afectado en cierto grado por el tiempo de días previos. El precio de una acción al cierre de cualquier día depende en cierta medida del comportamiento de la bolsa en días previos.

El caso más simple de un proceso estocástico en que los resultados dependen de otro(s), ocurre cuando el resultado en cada etapa sólo depende del resultado de la etapa anterior y no de cualquiera de los resultados previos. Tal proceso se denomina *proceso de Markov* o *cadena de Markov* (una cadena de eventos, cada evento ligado al precedente).

DEFINICIÓN Una *cadena de* **Markov** es una sucesión de ensayos similares u observaciones en la cual cada ensayo tiene el mismo número finito de resultados posibles, y en donde también la probabilidad de cada resultado para un ensayo dado depende sólo del resultado del ensayo inmediatamente precedente y no de cualesquier resultado previo.

Por ejemplo, consideremos las condiciones de tiempo diarias en cierta localidad, y supongamos que sólo estamos interesados en el hecho de que cada día sea lluvioso o seco. Entonces, cada ensayo (esto es, cada observación diaria del tiempo) tiene los mismos dos resultados: lluvioso o seco. Si suponemos que las probabilidades de que mañana sea un día lluvioso o seco están determinadas por completo por el hecho de que hoy es un día lluvioso o seco, podríamos concluir que esta sucesión de ensayos formaría una cadena de Markov.

Al trabajar con cadenas de Markov, a menudo es útil pensar la sucesión de ensayos como experimentos efectuados en cierto sistema físico, y cada resultado deja a este sistema en cierto *estado*. Por ejemplo, consideremos una sucesión de elecciones políticas en cierto país: el sistema podría tomarse como el país mismo y cada elección lo dejaría en cierto estado, es decir, en el control del partido ganador. Si sólo hay dos partidos políticos fuertes, llamados A y B, los que por lo regular controlan el gobierno, entonces podemos decir que el país se encuentra en el estado A o B si el partido A o B ganará la elección.* Cada ensayo (esto es, cada elección) coloca al país en uno de los dos estados A o B. Una sucesión de 10 elecciones podría producir resultados como los siguientes:

A, B, A, A, B, B, B, A, B, B

La primera elección en la sucesión deja en el poder al partido A, la segunda fue ganada por el partido B, y así sucesivamente, hasta que la décima elección la ganó el partido B.

Supongamos que las probabilidades de que el partido A o B ganen la próxima elección están determinadas por completo por el partido que está en el poder ahora. Por ejemplo tendríamos las siguientes probabilidades:

1. Si el partido A está en el poder, existe una probabilidad de $\frac{1}{4}$ que el partido A ganará la próxima elección y una probabilidad de $\frac{3}{4}$ de que el partido B gane la elección siguiente.
2. Si el partido B está en el poder, hay una probabilidad de $\frac{1}{3}$ de que el partido A gane la elección siguiente y una probabilidad de $\frac{2}{3}$ que el partido B permanezca en el poder.

En tal caso, la sucesión de elecciones forman una cadena de Markov, dado que las probabilidades de los dos resultados de cada elección están determinados por el resultado de la elección precedente.

La información probabilística que se acaba de dar se puede representar de manera conveniente por la siguiente matriz:

Resultado de la próxima elección

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{array} \\ \begin{array}{l} \textit{Resultado de la} \\ \textit{última elección} \end{array} \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{array}$$

Ésta se denomina *matriz de transición.* Los elementos de la matriz de transición representan las probabilidades de que en el próximo ensayo el estado del sistema del partido indicado a la izquierda de la matriz cambie al estado del partido indicado arriba de la matriz.

DEFINICIÓN Consideremos un proceso de Markov en que el sistema posee n estados posibles, dados por los números 1, 2, 3, . . . , n. Denotemos con p_{ij} la probabilidad de que el sistema pase al estado j después de cualquier ensayo en donde su estado era i antes del ensayo. Los números p_{ij} se denominan las **probabilidades de transición** y la matriz $n \times n$ $P = [p_{ij}]$ se conoce por **matriz de transición** del sistema.

Observaciones: **1.** La suma $p_{i1} + p_{i2} + \cdots + p_{in}$ representa la probabilidad de que el sistema pase a uno de los estados 1, 2, . . . , n dado que empieza en el estado

* En Estados Unidos podríamos imaginar una secuencia de elecciones presidenciales, cuyos resultados determinan el control del ejecutivo.

i. Pero ya que el sistema tiene que estar en uno de estos n estados, la suma de probabilidades debe ser igual a 1. Esto significa que los elementos en cualquier renglón de la matriz de transición deben sumar 1.

2. Cada elemento debe ser no negativo: $p_{ij} \geq 0$

☛ **10.** ¿Las matrices siguientes son posibles matrices de transición? Si la respuesta es sí, proporcione las probabilidades de que el sistema cambie al estado 1 y de que permanezca en el estado 3, si se encuentra en el estado 3.

a) $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.7 & 0.7 & -0.4 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{bmatrix}$

Respuesta *a*) No. *b*) Sí, 0.5, 0. *c*) No.

EJEMPLO 1 Dada la matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}$$

¿cuál es la probabilidad de que en el próximo ensayo el sistema cambie: *a*) del estado 2 al 1; *b*) del estado 1 al 3?

Solución Por definición, en la matriz de transición P, p_{ij} denota la probabilidad de que el sistema cambie del estado i al j. Así, en la parte *a*) nos interesa p_{21}, la probabilidad de un cambio del estado 2 al 1. Ésta es igual a 0.4 (el elemento del segundo renglón y la primera columna).

En forma análoga para la parte *b*), requerimos $p_{13} = 0.2$. ☛ **10**

EJEMPLO 2 ***(Partidos políticos)*** En cierta nación hay tres partidos políticos principales: el liberal (L), el conservador (C) y el demócrata (D). La matriz de transición siguiente da las probabilidades de que la nación sea controlada por cada uno de los tres partidos políticos después de una elección, conocidas las diversas posibilidades del resultado de la elección anterior:

$$\begin{array}{c} \\ \text{L} \\ \text{C} \\ \text{D} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{L} & \text{C} & \text{D} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Suponiendo que el partido liberal tiene el control ahora, use un diagrama de árbol para determinar la probabilidad de que el partido conservador esté en el poder después de las dos próximas elecciones.

Solución Los resultados posibles de las dos próximas elecciones aparecen en la figura 1, cuando empezamos con el partido liberal en el poder. Puesto que buscamos la probabilidad de que el partido conservador asuma el mando después de dos elecciones, sólo nos interesan aquellas ramas del diagrama que terminan en C. Los números a lo largo de las ramas son las probabilidades apropiadas dadas en la matriz de transición. Por ejemplo, el número 0.1 en la rama de L a D es la probabilidad de que los liberales sean reemplazados por los demócratas en la elección siguiente. El número 0.4 en la rama de D a C es la probabilidad de que los conservadores asuman el poder en la segunda elección dado que los demócratas tomaron el mando en la primera elección. El producto (0.1)(0.4) da la probabilidad de que los liberales sean reemplazados por los demócratas y éstos a su vez por los conservadores.

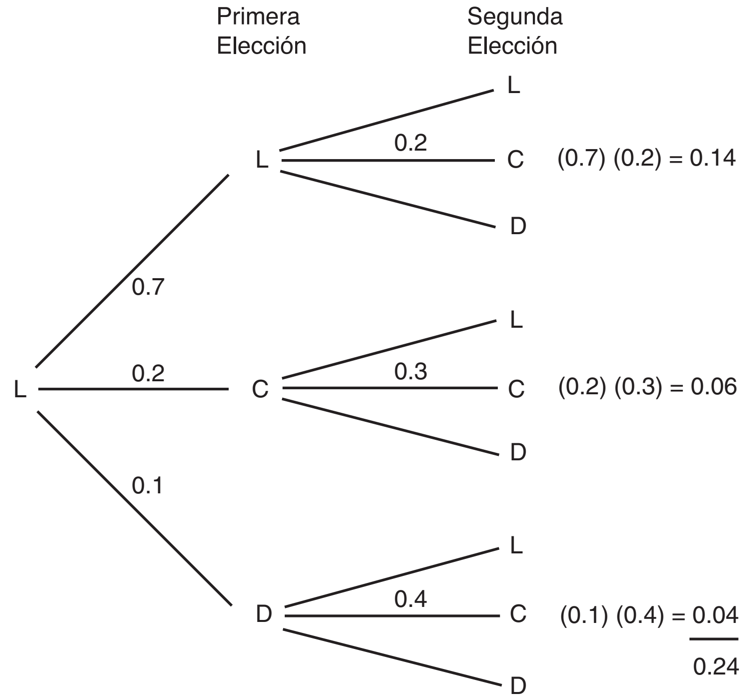


FIGURA 1

Las otras sucesiones (o ramas) que terminaban con los conservadores en el poder tienen las probabilidades (0.7)(0.2) y (0.2)(0.3), respectivamente. Así que la probabilidad de que los conservadores asuman el poder después de dos elecciones es la suma de las probabilidades de estas tres sucesiones:

$$(0.7)(0.2) + (0.2)(0.3) + (0.1)(0.4) = 0.24$$

EJEMPLO 3 ***(Fluctuaciones de la bolsa de valores)*** El valor de una acción fluctúa día con día. Cuando la bolsa de valores se encuentra estable, un incremento en un día tiende a anteceder una baja el día siguiente, y una baja por lo regular es seguida por una alza. Podemos modelar estos cambios en el valor mediante un proceso de Markov con dos estados, el primer estado consistente en que el valor se incrementa un día dado, el segundo estado definido por la baja. (La posibilidad de que el valor permanezca sin cambio se ignora). Suponga que la matriz de transición es la siguiente:

$$\begin{array}{lll} & & \textit{Cambio de mañana} \\ & & \quad\text{Alza} \quad \text{Baja} \\ \textit{Cambio} & \text{Alza} & \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \\ \textit{de hoy} & \text{Baja} & \end{array}$$

Si el valor de la acción bajó hoy, calcule la probabilidad de que se incremente 3 días después a partir de ahora.

Solución Los estados posibles de la acción (alza o baja) durante los próximos 3 días están dados en la figura 2, en que el estado inicial es la baja. Denotemos los es-

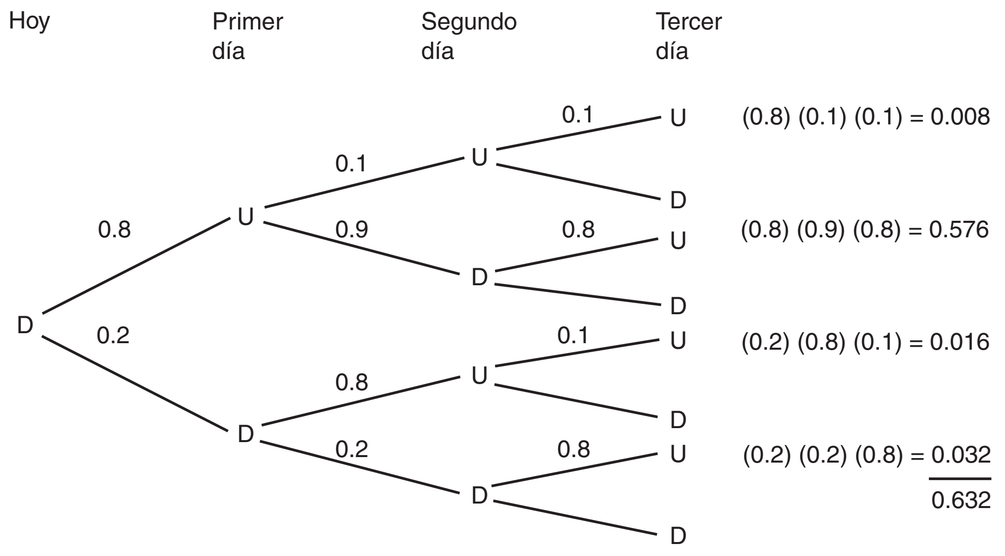


FIGURA 2

☛ **11.** Dada la matriz de transición

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

encuentre la probabilidad de que el sistema, iniciando en el estado 1, estará *a*) en el estado 1 después de 2 ensayos; *b*) en el estado 2 después de 3 ensayos.

tados de alza o baja (esto es, incremento o decremento) por las letras U y D, respectivamente. Sólo nos interesan las cuatro ramas que terminan en el estado U al cabo del tercer día. La probabilidad requerida de que la acción irá al alza en el tercer día, cuando fue a la baja el día de hoy, se obtiene sumando las probabilidades de las cuatro ramas antes mencionadas y es igual a 0.632. ☛ **11**

En el ejemplo 3 calculamos la probabilidad de que la acción vaya al alza al tercer día. Suponga que deseamos calcular la probabilidad de que la acción vaya al alza o la baja al décimo día. En este caso, el uso de un diagrama sería muy embarazoso. En una situación como ésta, el álgebra de matrices evita dibujar un diagrama de árbol grande.

Consideremos un sistema de n estados posibles, de modo que cada ensayo tiene n resultados posibles. En cualquier etapa en el futuro no podemos decir en qué estado se encontrará el sistema, pero podríamos estar en posición de dar las probabilidades de que se encuentre en cada uno de los estados $1, 2, \ldots, n$. (En el ejemplo 3, no podemos decir si la acción irá a la baja o al alza después de 3 días, pero sí podemos afirmar que la probabilidad de que irá al alza es 0.632 y en consecuencia la probabilidad de que vaya a la baja es de $1 - 0.632 = 0.368$). En general, si p_1, $p_2, \ldots, p_n$ son las probabilidades de que el sistema se encuentre en los estados $1, 2, \ldots, n$, respectivamente, entonces la matriz renglón $1 \times n$

$$[p_1 \quad p_2 \cdots p_n]$$

se conoce como **matriz de estado** o **vector de estado** del sistema. Obsérvese que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. Denotaremos a la matriz de estado inicial con $\mathbf{A}_0$ y a la matriz de estado después de k ensayos (o etapas) por $\mathbf{A}_k$.

Consideremos el ejemplo 3. Cada día el sistema (valores) está en uno de los dos estados: estado 1 (alza) y estado 2 (baja). En el ejemplo, al principio la acción

Respuesta *a*) 0.44 *b*) 0.588

estaba a la baja, de modo que inicialmente la probabilidad p_1 de que el sistema se encuentre en el estado 1 es 0 y la probabilidad p_2 de que el sistema se encuentre en el estado 2 es 1. Así, la matriz de estado inicial $\mathbf{A}_0$ del sistema es

$$\mathbf{A}_0 = [p_1 \quad p_2] = [0 \quad 1]$$

Como se advierte en la figura 2, después de 1 día, la acción está al alza (estado 1) con probabilidad $p_1 = 0.8$ y a la baja (estado 2) con probabilidad $p_2 = 0.2$. Así que la matriz de estado $\mathbf{A}_1$ después de 1 día está dada por

$$\mathbf{A}_1 = [p_1 \quad p_2] = [0.8 \quad 0.2]$$

A partir de la figura 2, la probabilidad de que la acción irá al alza después de 2 días es

$$p_1 = (0.8)(0.1) + (0.2)(0.8) = 0.08 + 0.16 = 0.24$$

De manera similar, la probabilidad de que la acción esté a la baja después de 2 días es

$$p_2 = (0.8)(0.9) + (0.2)(0.2) = 0.72 + 0.04 = 0.76$$

☛ **12.** Dada la matriz de transición

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

encuentre las matrices de estado después de uno y dos pasos, si la matriz de estado inicial es $A_0 = [0.2 \quad 0.8]$

Así que la matriz de estado $\mathbf{A}_2$ después de 2 días está dada por

$$\mathbf{A}_2 = [p_1 \quad p_2] = [0.24 \quad 0.76]$$

Al cabo de 3 días la matriz de estado es

$$\mathbf{A}_3 = [p_1 \quad p_2] = [0.632 \quad 0.368]$$

El teorema siguiente indica cómo calcular la matriz de estado del sistema en cualquier etapa si se conoce la matriz de estado del ensayo previo.

TEOREMA 1 Si $\mathbf{P}$ denota la matriz de transición de una cadena de Markov y $\mathbf{A}_k$ es la matriz de estado después de k ensayos, entonces la matriz de estado $\mathbf{A}_{k+1}$ después del ensayo siguiente está dada por

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k\mathbf{P}$$

Considere de nuevo el problema del ejemplo 3. La matriz de estado inicial es $\mathbf{A}_0 = [0 \quad 1]$ y la matriz de transición es

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

La matriz de estado después de una etapa (día) está dada por

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0\mathbf{P} = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} = [0.8 \quad 0.2]$$

La matriz de estado al cabo de 2 días es

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1\mathbf{P} = [0.8 \quad 0.2]\begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} = [0.24 \quad 0.76]$$

Respuesta $\mathbf{A}_1 = [0.46 \quad 0.54]$
$\mathbf{A}_2 = [0.408 \quad 0.592]$

Estos resultados concuerdan con los que obtuvimos antes directamente del diagrama de árbol. ☛ **12**

EJEMPLO 4 ***(Predicción del tiempo)*** La variación del tiempo de un día a otro se supone que forma una cadena de Markov con la matriz de transición siguiente:

$$\begin{array}{ll} & \qquad\qquad\quad \textit{Mañana} \\ & \begin{array}{ccc} \text{Soleado} & \text{Nublado} & \text{Lluvioso} \end{array} \\ \textit{Hoy} \begin{array}{l} \text{Soleado} \\ \text{Nublado} \\ \text{Lluvioso} \end{array} & \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} = \mathbf{P} \end{array}$$

Dado que hoy (domingo) está nublado, ¿cuál es la probabilidad de que el miércoles esté soleado?

Solución Definamos los estados 1, 2 y 3 como soleado, nublado y lluvioso, respectivamente. Puesto que hoy está nublado (domingo), tenemos que $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = 0$ y la matriz de estado inicial es

$$\mathbf{A}_0 = [p_1 \quad p_2 \quad p_3] = [0 \quad 1 \quad 0]$$

La matriz de estado al cabo de un día (el lunes) está dada por

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0\mathbf{P} = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} = [0.2 \quad 0.5 \quad 0.3]$$

La matriz de estado el martes (después de 2 días) es

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1\mathbf{P} = [0.2 \quad 0.5 \quad 0.3] \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$= [0.25 \quad 0.41 \quad 0.34]$$

La matriz de estado el miércoles (al cabo de 3 días) es

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_2\mathbf{P} = [0.25 \quad 0.41 \quad 0.34] \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$= [0.266 \quad 0.391 \quad 0.343]$$

Por consiguiente, la probabilidad de que el miércoles esté soleado es 0.266.

La gente que trabaja en el centro de la ciudad de México y no vive en los suburbios cercanos puede trasladarse a sus trabajos mediante transportación pública (autobuses) o usando automóviles privados. Actualmente, el 25% de tales personas usan los autobuses y el 75% utilizan sus automóviles. Debido a una reducción en el espacio de estacionamiento, la ciudad ha incrementado de forma considerable el número de autobuses hacia la ciudad y desde ésta, con la intención de que más personas cambien a autobuses y así aliviar el problema del estacionamiento. Con base en una encuesta de la población trabajadora, los funcionarios esperan que con los autobuses adicionales, cada año 60% de los que usan automóvil cambie a autobús;

mientras que el 20% de los que usan autobús regrese a automóvil. A los funcionarios les interesa el efecto a largo plazo de los autobuses adicionales; esto es, el porcentaje de los que a largo plazo cambien al uso de los autobuses o el automóvil.

Denotemos a la matriz de estado en cualquier año por $[p_1 \quad p_2]$, en donde p_1 es la proporción de los que usan los autobuses y p_2 es la proporción de los que usan el automóvil. La matriz de estado inicial es

$$\mathbf{A}_0 = [0.25 \quad 0.75]$$

La probabilidad de que un usuario del autobús continúe usándolo el año siguiente es 0.8, mientras que la probabilidad que cambie al automóvil es 0.2. Las probabilidades correspondientes para los que usan automóviles son 0.6 y 0.4, de modo que la matriz de transición **P** es la siguiente:

$$\begin{array}{ccc} & & \textit{La gente usará:} \\ & & \begin{array}{cc} \text{Autobuses el año próximo} & \text{Automóviles el año próximo} \end{array} \\ \textit{La gente usa:} & \begin{array}{l} \text{Autobuses este año} \\ \\ \text{Automóviles este año} \end{array} & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Por consiguiente, las matrices de estado después de 1, 2, 3, . . . , y 6 años son las que aparecen a continuación:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0\mathbf{P} = [0.25 \quad 0.75]\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} = [0.65 \quad 0.35]$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1\mathbf{P} = [0.65 \quad 0.35]\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} = [0.73 \quad 0.27]$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_2\mathbf{P} = [0.73 \quad 0.27]\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} = [0.746 \quad 0.254]$$

$$\mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_3\mathbf{P} = [0.746 \quad 0.254]\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} = [0.749 \quad 0.251]$$

$$\mathbf{A}_5 = \mathbf{A}_4\mathbf{P} = [0.749 \quad 0.251]\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} = [0.750 \quad 0.250]$$

$$\mathbf{A}_6 = \mathbf{A}_5\mathbf{P} = [0.75 \quad 0.25]\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} = [0.75 \quad 0.25]$$

en donde redondeamos el resultado a tres cifras decimales. Observemos que después de 5 años, el porcentaje de las personas que usan autobuses se estabiliza en 75% y el porcentaje de los que usan automóviles en 25%.

Supongamos ahora que la matriz de estado inicial es

$$\mathbf{A} = [0.2 \quad 0.8]$$

en lugar de [0.25 0.75]. En otras palabras, el 20% de las personas que requieren transporte usan autobuses y el 80% emplean el automóvil. En este caso, las matrices de estado después de 1, 2, 3, 4 y 5 años son las siguientes:

$$\mathbf{A}_1 = [0.2 \quad 0.8]\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} = [0.64 \quad 0.36]$$

$$\mathbf{A}_2 = [0.64 \quad 0.36]\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} = [0.728 \quad 0.272]$$

$$\mathbf{A}_3 = [0.728 \quad 0.272]\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} = [0.746 \quad 0.254]$$

$$\mathbf{A}_4 = [0.746 \quad 0.254]\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} = [0.749 \quad 0.251]$$

$$\mathbf{A}_5 = [0.749 \quad 0.251]\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} = [0.750 \quad 0.250]$$

☛ **13.** Repita los cálculos de $\mathbf{A}_1, \ldots \mathbf{A}_5$, si $\mathbf{A}_0 = [0.3 \quad 0.7]$

Así que de nuevo vemos que el porcentaje de la gente que usa autobuses se estabiliza en 75% y el porcentaje de los que usarán el automóvil en 25%. ☛ **13**

Observemos que la matriz de estado se estabiliza en [0.75 0.25], no importando si la matriz de estado inicial es [0.25 0.75] o [0.2 0.8]. Estos resultados no son accidentales; en muchas cadenas de Markov la matriz de estado se estabiliza después de un gran número de ensayos sin importar la matriz de estado inicial. Esto es consecuencia del siguiente teorema, que se establece sin demostración.

TEOREMA 2 Se dice que una matriz de transición **P** es **regular** si para algún entero positivo k la matriz $\mathbf{P}^k$ no tiene elementos iguales a cero. Si **P** es una matriz de transición regular, entonces sin importar la matriz de estado inicial, las matrices de estado sucesivas se aproximan a alguna matriz de estado fija **B** en donde $\mathbf{BP} = \mathbf{B}$. La matriz **B** se denomina **matriz estacionaria (o de estado estable)** del sistema.

En el estudio anterior de un problema de tránsito urbano, encontramos que la matriz estacionaria (con tres cifras decimales) es

$$\mathbf{B} = [0.750 \quad 0.250]$$

Demostraremos que esta misma matriz estacionaria puede obtenerse usando el teorema 2. La matriz de transición es

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Sea $\mathbf{B} = [p_1 \quad p_2]$ la matriz estacionaria requerida. Puesto que por definición, la suma de las probabilidades de una matriz de estado es 1, debemos tener que

$$p_1 + p_2 = 1 \tag{1}$$

Ahora la ecuación $\mathbf{BP} = \mathbf{B}$ implica que

$$[p_1 \quad p_2]\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} = [p_l \quad p_2]$$

Respuesta $A_1 = [0.66 \quad 0.34]$
$A_2 = [0.732 \quad 0.268]$
$A_3 = [0.7464 \quad 0.2536]$
$A_4 = [0.74928 \quad 0.25072]$
$A_5 = [0.749856 \quad 0.250144]$

☛ **14.** Dada la matriz de transición

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

encuentre la matriz de estado estable resolviendo la ecuación **BP** = **B**

Respuesta $[\frac{5}{12} \quad \frac{7}{12}] \approx$ $[0.4167 \quad 0.5833]$

esto es,

$$[0.8p_1 + 0.6p_2 \quad 0.2p_1 + 0.4p_2] = [p_1 \quad p_2]$$

lo cual da

$$0.8p_1 + 0.6p_2 = p_1$$
$$0.2p_1 + 0.4p_2 = p_2$$

Estas ecuaciones son idénticas una a la otra y la solución es $p_1 = 3p_2$. Sustituyendo esto en la ecuación (1), obtenemos

$$3p_2 + p_2 = 1 \quad \text{o} \quad p_2 = \tfrac{1}{4} = 0.25$$

Por consiguiente, de la ecuación (1),

$$p_1 = 1 - p_2 = 1 - 0.25 = 0.75$$

De ahí que

$$\mathbf{B} = [p_1 \quad p_2] = [0.75 \quad 0.25]$$

Esto concuerda con los resultados que se obtuvieron antes. ☛ **14**

EJERCICIOS 9-3

(1-6) Determine cuáles de las siguientes matrices son de transición. Si una matriz no es de transición explique por qué.

1. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{4}{15} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

(7-12) ¿Cuáles de las siguientes matrices de transición son regulares?

7. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

(13-16) ¿Cuáles de los siguientes vectores son matrices de estado?

13. $[\frac{1}{5} \quad 0 \quad \frac{4}{5}]$

14. $[1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3}]$

15. $[3 \quad 2 \quad 1 \quad 4]$

16. $[\frac{1}{2} \quad \frac{5}{6} \quad -\frac{1}{3} \quad 0]$

17. Suponga que la matriz de transición de cierta cadena de Markov está dada por

$$\mathbf{P} = \begin{array}{cc} \text{Estado 1} & \text{Estado 2} \\ \left[\begin{array}{cc} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \text{Estado 1} \\ \text{Estado 2} \end{array}$$

a) ¿Qué representa el elemento $\frac{1}{4}$ de la matriz?

b) Suponiendo que el sistema se encuentra en un principio en el estado 1, con un diagrama de árbol encuentre la matriz de estado después de dos ensayos.

c) Ahora mediante el teorema 1 encuentre la respuesta a la parte *b*).

d) ¿Cuál es la matriz estacionaria del sistema?

18. Considere un proceso de Markov con matriz de transición:

$$\begin{array}{c|cc} & \text{Estado 1} & \text{Estado 2} \\ \hline \text{Estado 1} & 0.6 & 0.4 \\ \text{Estado 2} & 0.3 & 0.7 \end{array}$$

a) ¿Qué representa el elemento 0.4 de la matriz?

b) Suponiendo que el sistema se encuentra al principio en el estado 2, mediante un diagrama de árbol determine la matriz de estado después de tres ensayos.

c) Ahora con el teorema 1 encuentre la matriz de estado de la parte *b*).

d) Determine la matriz estacionaria del sistema.

19. La matriz de transición de cierto proceso de Markov es

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

a) Si el sistema se encuentra en un principio en el estado 1, determine la matriz de estado después de dos etapas del proceso.

b) Si el sistema se encuentra inicialmente en el estado 2, encuentre la matriz de estado después de dos etapas.

c) Determine la matriz estacionaria.

20. Repita el ejercicio 19 con la siguiente matriz de transición.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

21. *(Partidos políticos)* Las probabilidades de que cierto país sea gobernado por uno de tres partidos políticos X, Y o Z, después de la próxima elección, están dadas por la matriz de transición

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ X \\ Y \\ Z \end{array}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el partido Z gane la próxima elección, si el partido X está ahora en el poder?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el partido X esté en el poder después de dos elecciones, si se supone que el partido Y se encuentra en el poder ahora?

c) Si el partido Z se encuentra en el poder, ¿cuál es la probabilidad de que estará ahí después de dos elecciones?

d) Determine la matriz estacionaria. ¿Cómo puede interpretarse esta matriz?

22. *(Fluctuaciones en la bolsa de valores)* El valor de cierta acción puede ir al alza, a la baja o permanecer sin cambio en cualquier día. La probabilidad de que la acción vaya al alza (estado 1), a la baja (estado 2) o permanezca estable (estado 3) al día siguiente están dadas en la matriz de transición:

$$\begin{array}{cl} & \begin{array}{ccc} & \textit{El cambio mañana} & \\ \text{Alza} & \text{Baja} & \text{Sin cambio} \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \textit{El cambio} \\ \textit{hoy} \end{array} \begin{array}{l} \text{Alza} \\ \text{Baja} \\ \text{Sin cambio} \end{array} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la acción esté a la baja después de dos días si hoy se encuentra al alza?

b) ¿Cuál es la matriz estacionaria de este proceso de Markov?

23. La probabilidad de que una persona de baja estatura tenga un hijo también de baja estatura es 0.75, mientras que la probabilidad de que un padre alto tenga un hijo espigado es 0.60. (Se ignora la posibilidad de concebir un hijo de mediana estatura).

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre alto tenga un nieto de baja estatura?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre de baja estatura tenga un nieto alto?

c) Encuentre la matriz estacionaria del proceso y dé su interpretación.

24. *(Participación en el mercado)* Hoy día, tres empresas procesadoras de productos X, Y y Z controlan el 50, 30 y 20% del mercado del café, respectivamente. Al mismo tiempo las tres empresas presentan marcas de café. Con la introducción de estas nuevas marcas en un año ocurre lo siguiente:

a) X retiene al 60% de sus consumidores y cede el 20% a Y y otro 20% a Z.

b) Y conserva el 50% de sus consumidores y pierde el 30% con X y un 20% con Z.

c) Z retiene al 70% de sus consumidores, cede al 10% a X y el 20% a Y.

Suponiendo que esta tendencia continúa, que proporción del mercado tendrá cada empresa al término de 2 años? ¿Qué porción del mercado tendrá cada empresa a largo plazo?

25. *(Agricultura)* Las granjas de cierta región pueden clasificarse en tres tipos: agrícolas, pecuarias o mixtas. Actualmente 30% son agrícolas, 40% pecuarias y 30% mixtas. La matriz de transición de un año al siguiente es

$$\begin{array}{c|ccc} & A & P & M \\ \hline A & 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ P & 0.2 & 0.8 & 0 \\ M & 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{array}$$

Encuentre los porcentajes de los tres tipos de granjas:

a) El año próximo.

b) El año subsiguiente.

c) A largo plazo.

***26.** *(Estudio de opinión)* En una encuesta de opinión acerca de un programa de TV, 60% de los entrevistados declaró que les gustaba el programa, mientras 40% afirmó lo contrario. El mismo grupo fue entrevistado 1 semana después, y entonces 65% dijo que les gustaba el programa; pero 35% que no. Nuevamente, una semana más tarde 68% informó que les gustaba el programa. Calcule la matriz de transición que representa el cambio de opinión. Si se entrevista repetidamente al grupo sobre el mismo programa, ¿cuál sería el porcentaje que exprese su preferencia por él?

***27.** *(Uso de energía)* En cierto país 90% de la energía era generada por petróleo, gas o carbón, y 10% provenía de la energía atómica. Cinco años después los porcentajes eran 80 y 20% respectivamente; mientras que 5 años más tarde fueron 75 y 25%. Suponiendo que el proceso es de Markov con

$$[0.8 \quad 0.2] = [0.9 \quad 0.1]\mathbf{P}$$

$$[0.75 \quad 0.25] = [0.8 \quad 0.2]\mathbf{P}$$

calcule la matriz de transición **P** de 2×2. Encuentre la matriz estacionaria e interprétela.

■ 9-4 DETERMINANTES

A cada matriz cuadrada se le puede asociar un número real denominado su *determinante.* El determinante se denota encerrando la matriz entre barras verticales. Por ejemplo, si **A** es una matriz 2×2 dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

entonces, su determinante se denota por $|\mathbf{A}|$, o, sin abreviar, por

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

El determinante de una matriz $n \times n$ se dice que es un *determinante de orden* n. Por ejemplo, el determinante $|\mathbf{A}|$ que se acaba de definir es un determinante de orden 2.

Se usa el símbolo Δ (delta) para denotar un determinante.

Empezaremos definiendo determinantes de orden 2, estudiando determinantes del orden superior después.

DEFINICIÓN Un **determinante de orden 2** está definido por la siguiente expresión:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

En otras palabras, el determinante está dado por el producto de a_1 y b_2 sobre la diagonal principal, menos el producto de los elementos a_2 y b_1 sobre la otra diagonal. Podemos indicar estas dos diagonales usando flechas.

$$\begin{vmatrix} \overset{(+)}{a_1} & \overset{(-)}{b_1} \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Los símbolos (+) y (−) indican los signos asociados con los productos.

EJEMPLO 1 Evalúe los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ *b*) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$

Solución

a)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overset{(+)}{2} & \overset{(-)}{-3} \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2(5) - 4(-3) = 10 + 12 = 22$$

b)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overset{(+)}{3} & \overset{(-)}{2} \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 3(4) - 0(2) = 12 - 0 = 12$$ ☛ **15**

☛ **15.** Evalúe los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$ *b*) $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}$

Respuesta *a*) 14; *b*) −8; *c*) 26

DEFINICIÓN Un **determinante de orden 3** se define con la siguiente expresión:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3$$

La expresión de la derecha se denomina el **desarrollo completo** del determinante Δ de tercer orden. Observe que contiene seis términos, tres positivos y tres negativos. Cada término consta de un producto de tres elementos del determinante.

Al evaluar un determinante de tercer orden, por lo regular no usamos el desarrollo completo; en vez de ello, utilizamos los denominados *cofactores*. Cada elemento del determinante tienen asociado un cofactor, que se denota con la letra mayúscula correspondiente. Por ejemplo, A_2 indica al cofactor de a_2, B_3 denota al cofactor de b_3, etc. Estos cofactores están definidos de la siguiente manera.

DEFINICIÓN El **menor** de un elemento de un determinante Δ es igual al determinante obtenido suprimiendo el renglón y la columna de Δ que contienen al elemento considerado. Si este elemento pertenece al *i*-ésimo renglón y a la *j*-ésima columna de Δ, entonces su **cofactor** es igual a $(-1)^{i+j}$ veces su menor.

EJEMPLO 2

a) En el determinante Δ de la última definición, a_2 aparece en el segundo renglón y la primera columna ($i = 2$ y $j = 1$), de modo que su cofactor es

☛ **16.** En el determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

evalúe el cofactor de
a) el elemento 1, 2;
b) el elemento 2, 2;
c) el elemento 3, 2

$$A_2 = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

b) Puesto que c_3 es común al tercer renglón y a la tercera columna ($i = j = 3$), su cofactor es

$$C_3 = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$ ☛ **16**

La relación entre un determinante y sus cofactores se establece en el teorema 1.

TEOREMA 1 El valor de un determinante puede encontrarse multiplicando los elementos en cualquier renglón (o columna) por sus cofactores, y sumando los productos correspondientes a todos los elementos en el renglón (o columna) considerado.

Verifiquemos que este teorema se cumple en el caso del desarrollo del primer renglón. El teorema establece que

$$\Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 \tag{1}$$

Los tres cofactores requeridos son los siguientes:

$$A_1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (b_2c_3 - b_3c_2)$$

$$B_1 = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -(a_2c_3 - a_3c_2)$$

$$C_1 = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)$$

Sustituyendo esto en la ecuación (1),

$$\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

Es fácil verificar que esta expresión concuerda con el desarrollo completo dado en la definición de un determinante de tercer orden.

Respuesta

a) $(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -5$

b) $(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

c) $(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -14$

EJEMPLO 3 Calcule el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Solución Desarrollando por el primer renglón, tenemos

$$\begin{aligned}
\Delta &= a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 \\
&= 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ & \end{vmatrix} \\
&= 2(4 \cdot 4 - 1 \cdot 2) - 3[1 \cdot 4 - (-3)2] + (-1)[1 \cdot 1 - (-3)4] \\
&= 2(16 - 2) - 3(4 + 6) - 1(1 + 12) = \underline{-15}
\end{aligned}$$

Volvamos ahora al teorema 1 y verifiquemos que da el determinante cuando lo desarrollamos por la segunda columna. En este caso, el teorema afirma que

$$\Delta = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 \tag{2}$$

Aquí, los cofactores son

$$B_1 = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -(a_2c_3 - a_3c_2)$$

$$B_2 = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1c_3 - a_3c_1)$$

$$B_3 = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = -(a_1c_2 - a_2c_1)$$

☛ **17.** Evalúe el determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

desarrollando
a) por medio de la primera columna;
b) por medio del segundo renglón.

Por consiguiente, de la ecuación (2),

$$\Delta = -b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + b_2(a_1c_3 - a_3c_1) - b_3(a_1c_2 - a_2c_1)$$

De nuevo, podemos comprobar que los términos que aparecen aquí son los mismos seis términos dados por el desarrollo completo.

En forma análoga, podemos verificar que un determinante puede evaluarse desarrollándolo por cualquier renglón o columna. ☛ **17**

EJEMPLO 4 Calcule el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ -5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

a) Desarrollando por la segunda columna; *b*) desarrollando por la tercera columna.

Respuesta
a) $2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -17$

b) $-4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -17$

Solución

a) Desarrollando por la segunda columna, obtenemos

$$\begin{aligned}
\Delta &= b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 \\
&= -(-3)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 3[1(0)-3(-5)] + 4[2(0) - (-5)(0)] - 6[2(3) - 1(0)] \\
&= 3(15) + 4(0) - 6(6) = 9
\end{aligned}$$

☛ **18.** Evalúe el determinante

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & 11 & 13 \end{vmatrix}$$

b) Desarrollando por la tercera columna, tenemos que

$$\Delta = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3$$
$$= (0)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

En este desarrollo, dos de los términos son cero, por lo que $\Delta = -3\,[2(6) - (-3)(-5)] = 9$

En el ejemplo 4, se obtiene la misma respuesta usando ambos desarrollos, pero los cálculos requeridos por el segundo desarrollo son un poco más sencillos, porque la tercera columna tiene dos ceros y dos de los tres términos de este desarrollo podrían de inmediato eliminarse. *Por lo general es más fácil el desarrollo de un determinante si decidimos hacerlo eligiendo el renglón o columna con el máximo número de ceros.* ☛ **18**

A partir de la exposición anterior, es claro que podemos desarrollar un determinante de orden 3 por cualquier renglón o columna. En tal desarrollo, los términos alternan su signo y cada elemento en un renglón o columna dados multiplica al determinante 2×2 (el menor), obtenido suprimiendo de Δ el renglón y la columna que contiene tal elemento.

Observemos que algunas veces el signo del primer término del desarrollo es positivo (como en el ejemplo 3 y la parte *b*) del ejemplo 4) y en otras ocasiones es negativo (como en la parte *a*) del ejemplo 4). De hecho, *el primer término en un desarrollo es positivo cuando realizamos el desarrollo por el primero o tercer renglón* (*o columna*) *y es negativo cuando desarrollamos por el segundo renglón* (*o columna*).

Estas reglas se extienden en forma natural a determinantes de orden mayor que 3. Cualquier determinante puede evaluarse desarrollándolo por renglones o columnas. El determinante se obtiene multiplicando cada elemento en el renglón (o columna) por su cofactor y sumando todos los productos obtenidos. La regla que permite evaluar los cofactores es la misma que en el caso de determinantes 3×3: el cofactor del elemento común al i-ésimo renglón y a la j-ésima columna es igual a $(-1)^{i+j}$ multiplicado por el determinante obtenido suprimiendo el i-ésimo renglón y la j-ésima columna.

Por el ejemplo, consideremos el siguiente determinante de orden 4:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Su desarrollo por el primer renglón está dado por

$$\Delta = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$
$$= a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 + d_1D_1$$

en donde A_1, B_1, C_1 y D_1 denotan los cofactores de a_1, b_1, c_1 y d_1, respectivamente, en Δ.

Respuesta Desarrollando por medio de la segunda columna. El único término distinto de cero es

$$-11 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -22$$

Una aplicación importante de los determinantes es a la solución de sistemas de ecuaciones lineales, en las cuales el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas. De hecho, el concepto de determinante se originó en el estudio de tales sistemas de ecuaciones. El resultado principal, conocido como *regla de Cramer,* se establece en el teorema 2 para sistemas de tres ecuaciones. El teorema se generaliza en una forma natural a sistemas de n ecuaciones con n incógnitas.

TEOREMA 2 (REGLA DE CRAMER) Considere el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas x, y y z.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= k_3 \end{aligned}$$

Sea

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

el determinante de los coeficientes, y sean Δ_1, Δ_2 y Δ_3 obtenidos reemplazando la primera, segunda y tercera columna de Δ, respectivamente, por los términos constantes. En otras palabras,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}$$

Entonces si $\Delta \neq 0$, *el sistema dado tiene la solución única dada por*

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Si $\Delta = 0$ *y* $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, entonces el sistema tiene un número infinito de soluciones. *Si* $\Delta = 0$ *y* $\Delta_1 \neq 0$ *o* $\Delta_2 \neq 0$ *o* $\Delta_3 \neq 0$, *entonces el sistema no tiene ninguna solución.*

EJEMPLO 5 Use determinantes para resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 5 \\ x + 2y - z &= 7 \\ 6x - 9y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

Solución El determinante de coeficientes es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

como puede comprobarse desarrollándolo por el primer renglón. Reemplazando los elementos de la primera columna de Δ por los términos constantes, tenemos

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \\ 4 & -9 & 3 \end{vmatrix} = -11$$

Puesto que $\Delta = 0$ y $\Delta_1 \neq 0$, el sistema dado no tiene *ninguna* solución.

☛ **19.** Utilice la regla de Cramer para resolver los sistemas

a) $q + 3r = 1,\ 2p - 5r = 1,$

$2p + 2q + 3r = 1$

b) $x - 4y + 3z = 4,$

$-x + 2y - z = -2,$

$y - z = -1$

EJEMPLO 6 Mediante determinantes resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x - \ \ y + 2z &= -1 \\ 2x + \ \ y - \ \ z &= 5 \\ x + 2y + \ \ z &= 4 \end{aligned}$$

Solución El determinante de coeficientes es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por el primer renglón, obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta &= 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3(1 + 2) + 1(2 + 1) + 2(4 - 1) = 18 \end{aligned}$$

Dado que $\Delta \neq 0$, el sistema tiene una solución única dada por

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Reemplazando la primera, segunda y tercera columnas de Δ, respectivamente, por los términos constantes, tenemos los valores dados a continuación:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 18$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 36$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -18$$

Por consiguiente, tenemos los valores siguientes para *x, y* y *z*:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{18}{18} = 1, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{36}{18} = 2, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{18}{18} = -1$$

En consecuencia, la solución requerida es $x = 1$, $y = 2$ y $z = -1$ ☛ **19**

Respuesta *a*) $\Delta = -4$ y $\Delta_1 = 8$, $\Delta_2 = -16$, $\Delta_3 = 4$, de modo que $p = -2$, $q = 4$, $r = -1$
b) $\Delta = 0$ y $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ por lo que el sistema es consistente con un número infinito de soluciones.

Debe señalarse que la regla de Cramer por lo regular no es el método más eficiente de resolver un sistema de ecuaciones. Casi siempre, el método de reducción de renglones descrito en el capítulo 8 requiere menos cálculos. La importancia de la regla de Cramer es más bien teórica. Uno de los resultados más significativos deducidos de ella es que *un sistema de* n *ecuaciones lineales con* n *incógnitas tiene una única solución, si y sólo si el determinante de los coeficientes es distinto de cero.*

EJERCICIOS 9-4

(1-4) Escriba lo siguiente, dado que

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ l & m & n \end{vmatrix}$$

1. El menor de q.

2. El menor de n.

3. El cofactor de r.

4. El cofactor de m.

(5-28) Calcule los siguientes determinantes.

5. $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ -8 & -3 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 2 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} a & -2 \\ b & 3 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 5 & a \\ -a & 4 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 32 & 2 \\ 64 & 5 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 274 & 3 \\ 558 & 7 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 59 & 3 \\ 64 & 0 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} a+1 & 2-a \\ 2a+3 & 5-2a \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} a & b \\ a+b & b+c \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} x+2 & x-1 \\ 3 & x \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 5 & 10 & 1 \\ 8 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} 7 & 9 & 3 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ a & y & 0 & 0 \\ b & c & z & 0 \\ d & e & f & w \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

(29-32) Determine x en cada caso.

29. $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 9$

30. $\begin{vmatrix} x+3 & 2 \\ x & x+1 \end{vmatrix} = 3$

31. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x-2 & 3 \\ x & x+1 & x \end{vmatrix} = 3$

32. $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & x \\ x & x^2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

(33-50) Por medio de la regla de Cramer resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

33. $3x + 2y = 1$
$2x - y = 3$

34. $2x - 5y = 8$
$3y + 7x = -13$

35. $4x + 5y - 14 = 0$
$3y = 7 - x$

36. $2(x - y) = 5$
$4(1 - y) = 3x$

37. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 7$
$\frac{1}{2}x - \frac{1}{5}y = 1$

38. $\frac{2}{3}u + \frac{3}{4}v = 13$
$\frac{5}{2}u + \frac{1}{3}v = 19$

39. $2x + 3y = 13$
$6x + 9y = 40$

40. $3x = 2(2 + y)$
$4y = 7 + 6x$

41. $x + y + z = -1$
$2x + 3y - z = 0$
$3x - 2y + z = 4$

42. $2x - y + z = 2$
$3x + y - 2z = 9$
$-x + 2y + 5z = -5$

43. $\begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= -6 \\ x + 5y + 2z &= 0 \end{aligned}$

44. $\begin{aligned} x + 3y - z &= 0 \\ 3x - y + 2z &= 0 \\ 2x - 5y + z &= 5 \end{aligned}$

45. $\begin{aligned} x + 2y \quad &= 5 \\ 3y - z &= 1 \\ 2x - y + 3z &= 11 \end{aligned}$

46. $\begin{aligned} 2v + 5w &= 3 \\ 4u \quad - 3w &= 5 \\ 3u - 4v + 2w &= 12 \end{aligned}$

47. $\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 4 \\ x + 3y - z &= 5 \\ 6x - 3y + 9z &= 10 \end{aligned}$

48. $\begin{aligned} 4x + 2y - 6z &= 7 \\ 3x - y + 2z &= 12 \\ 6x + 3y - 9z &= 10 \end{aligned}$

49. $\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - 3y + 4z &= -4 \\ 3x + y + z &= 0 \end{aligned}$

50. $\begin{aligned} 2p \quad - \boldsymbol{r} &= 5 \\ p + 3q \quad &= 9 \\ 3p - q + 5r &= 12 \end{aligned}$

■ 9-5 INVERSAS POR DETERMINANTES

En la sección 9-1 encontramos, mediante operaciones entre renglones la inversa de una matriz no singular. También es posible calcular inversas usando determinantes y, de hecho, en el caso de matrices pequeñas (2×2 o 3×3) este método es más conveniente que la utilización de operaciones entre renglones.

DEFINICIÓN Sea $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ una matriz de cualquier tamaño. La matriz obtenida intercambiando los renglones y las columnas de **A** se denomina la **transpuesta** de **A** y se denota por $\mathbf{A}^T$. El primero, segundo, tercer renglones de **A** se convierten en la primera, segunda, tercera, . . . , columnas de $\mathbf{A}^T$.

EJEMPLO 1

a) Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, entonces $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

b) Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ p & q \\ u & v \end{bmatrix}$, entonces $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a & p & u \\ b & q & v \end{bmatrix}$ ☛ **20**

☛ **20.** Proporcione las transpuestas de

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ y de $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Respuesta $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ y

$\mathbf{B}^T = [2 \quad 0 \quad 1]$

DEFINICIÓN $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada y denotemos con A_{ij} el cofactor del elemento a_{ij} del determinante de **A**. (Esto es, A_{11} indica el cofactor de a_{11}, el primer elemento del primer renglón de **A**; A_{32} denota al cofactor de a_{32}, el segundo elemento del tercer renglón de **A**; etc.). La matriz $[A_{ij}]$ cuyo elemento ***ij*** es el cofactor A_{ij} se conoce como la **matriz de cofactores** de **A**. La transpuesta de la matriz de cofactores se denomina la **adjunta** de **A** y se denota por adj **A**.

EJEMPLO 2 Determine la adjunta de la matriz **A**.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución Calculemos en primer término los cofactores A_{ij} de los diversos elementos a_{ij} de $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 6 = 4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(8 - 18) = 10$$

De manera similar,

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 15 = -11$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 3) = -1$$

y así sucesivamente; los otros cofactores son $A_{22} = -7$, $A_{23} = 5$, $A_{31} = -3$, $A_{32} = 6$ y $A_{33} = -3$.

Así, la matriz de cofactores es

☛ **21.** Dé las adjuntas de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ y de $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & -11 \\ -1 & -7 & 5 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, adj **A** es la transpuesta de $[A_{ij}]$ y, por tanto, está dada por

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ -11 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$ ☛ **21**

La importancia de la matriz adjunta se aprecia en el teorema 1, que se establece sin demostración.

TEOREMA 1 La inversa de una matriz cuadrada **A** existe si y sólo si $|\mathbf{A}|$ es distinto de cero; en tal caso, está dado por la fórmula

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \text{adj } \mathbf{A}}$$

En el caso de una matriz 2×2, este resultado adopta la siguiente forma explícita:

$$\boxed{\text{Si} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{se sigue que} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}}$$

Respuesta adj $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$

adj $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

EJEMPLO 3 Calcule $\mathbf{A}^{-1}$ si $\mathbf{A}$ es la matriz del ejemplo 2,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución Encontramos por medio del desarrollo del primer renglón que $|\mathbf{A}| = -9$. Puesto que $|\mathbf{A}| \neq 0$, $\mathbf{A}^{-1}$ existe y está dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \text{adj } \mathbf{A}$$

Tomando la matriz adj $\mathbf{A}$ del ejemplo 2, obtenemos

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-9} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ -11 & 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{10}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{2}{3} \\ \frac{11}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

De nuevo, es fácil verificar que $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ y que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ usando multiplicación de matrices.

EJEMPLO 4 Demuestre que la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

no es invertible. (Véase el ejemplo 4 de la sección 9-1).

Solución La manera más simple de probar esto es verificar que el determinante de $\mathbf{A}$ es cero. Desarrollándolo, es fácil comprobar que

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

como se requería. ☛ **22**

☛ **22.** Utilice determinantes para calcular las inversas de las siguientes matrices, si es que existen:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$; *b*) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; *d*) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Respuesta *a*) $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) y *c*) no son invertibles ($\Delta = 0$)

EJEMPLO 5 ***(Modelo insumo-producto)*** La tabla 9 da la interacción entre varios sectores de una economía hipotética.

TABLA 9

	Industria I	**Industria II**	**Industria III**	**Demandas finales**	**Producción total**
Industria I	20	48	18	14	100
Industria II	30	12	54	24	120
Industria III	30	36	36	72	180
Insumos por mano de obra	20	24	72		

a) Determine la matriz insumo-producto **A**.

b) Suponga que en 3 años, se anticipa que las demandas finales cambiarán a 24, 33 y 75 para las industrias I, II y III, respectivamente. ¿Cuánto debería producir cada industria con el objetivo de satisfacer la demanda proyectada?

Solución *a*) Dividiendo cada columna en el rectángulo interior entre la producción total de la industria correspondiente, obtenemos la matriz insumo-producto:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{20}{100} & \frac{48}{120} & \frac{18}{180} \\ \frac{30}{100} & \frac{12}{120} & \frac{54}{180} \\ \frac{30}{100} & \frac{36}{120} & \frac{36}{180} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

b) Si **I** denota la matriz identidad 3×3, entonces

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 & -0.1 \\ -0.3 & 0.9 & -0.3 \\ -0.3 & -0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Sea $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$. Entonces, con la finalidad de calcular las producciones futuras, necesitamos encontrar la inversa de **B**. (Véase la sección 9-2). Podemos usar el método de determinantes:

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 0.8 & -0.4 & -0.1 \\ -0.3 & 0.9 & -0.3 \\ -0.3 & -0.3 & 0.81 \end{vmatrix} = 0.336$$

Puesto que $|\mathbf{B}| = 0.336 \neq 0$, $\mathbf{B}^{-1}$ existe. Los cofactores B_{ij} del determinante $|\mathbf{B}|$ son los siguientes:

$$\mathbf{B}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0.9 & -0.3 \\ -0.3 & 0.8 \end{vmatrix} = 0.72 - 0.09 = 0.63$$

$$\mathbf{B}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -0.3 & -0.3 \\ -0.3 & 0.8 \end{vmatrix} = -(-0.24 - 0.09) = 0.33$$

Continuando en la misma forma, tenemos que $B_{13} = 0.36$, $B_{21} = 0.35$, $B_{22} = 0.61$, $B_{23} = 0.36$, $B_{31} = 0.21$, $B_{32} = 0.27$ y $B_{33} = 0.60$

Tomando la transpuesta de la matriz de cofactores,

$$\text{adj } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.63 & 0.35 & 0.21 \\ 0.33 & 0.61 & 0.27 \\ 0.36 & 0.36 & 0.60 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, la inversa de **B** (o **I** − **A**) está dada por

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{B}|}\operatorname{adj}\mathbf{B}=\left(\frac{1}{0.336}\right)\begin{bmatrix}0.63 & 0.35 & 0.21\\ 0.33 & 0.61 & 0.27\\ 0.36 & 0.36 & 0.60\end{bmatrix}$$

Si **D** indica el nuevo vector de demanda, esto es,

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}24\\ 33\\ 75\end{bmatrix}$$

y **X** es la nueva matriz de producción, entonces demostramos en la sección 9-2 que $\mathbf{X}=(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{D}$.

Por consiguiente,

$$\mathbf{X}=\left(\frac{1}{0.336}\right)\begin{bmatrix}0.63 & 0.35 & 0.21\\ 0.33 & 0.61 & 0.27\\ 0.36 & 0.36 & 0.60\end{bmatrix}\begin{bmatrix}24\\ 33\\ 75\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}126.25\\ 143.75\\ 195\end{bmatrix}$$

Así que la industria I produciría 126.25 unidades, la industria II debería producir 143.75 unidades y la industria III debería producir 195 unidades con el propósito de satisfacer las demandas finales proyectadas en 3 años.

EJERCICIOS 9-5

(1-6) Escriba las transpuestas de las siguientes matrices.

1. $\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & -7\end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ -5 & 7 & 6\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 5 & 4 & 6\\ 6 & 5 & 4\end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

6. $[2]$

(7-16) Con el método de determinantes calcule la inversa de cada una de las siguientes matrices (cuando existan).

7. $\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 1 & -3\end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix}-\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix}0.3 & -0.1\\ -0.2 & 0.4\end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & 3 & 7\\ 7 & 4 & 10\end{bmatrix}$

17. *(Modelo insumo-producto)* La tabla 10 describe la interacción entre los diversos sectores de una economía hipotética:

a) Determine la matriz insumo-producto **A**.

TABLA 10

	Industria I	Industria II	Industria III	Demandas finales	Producción total
Industria					
I	20	40	30	10	100
II	30	20	90	60	200
III	40	100	60	100	300
Insumos primarios	10	40	120		

TABLA 12

	A	B	C	Demandas finales	Producción total
A	60	16	80	44	200
B	60	48	20	32	160
C	40	32	60	68	200
Insumos primarios	40	64	40		

b) Suponga que en 5 años, las demandas finales cambian a 150, 280 y 420 para las industrias I, II y III, respectivamente. ¿Cuánto debería producir cada industria para de satisfacer las demandas proyectadas?

c) ¿Cuáles serán los nuevos requerimientos de insumos primarios para las tres industrias en 5 años?

18. *(Modelo insumo-producto)* La interacción entre los diversos sectores de una economía hipotética están dados en la tabla 11.

a) ¿Cuál es la matriz insumo-producto **A**?

b) Suponga que en 3 años el consumidor demanda un cambio a 20 unidades en el caso de la industria I, a 50 para la industria II y a 70 en el caso de la industria III. ¿Cuánto debería producir cada industria dentro de 3 años con el objetivo de satisfacer esta demanda proyectada?

c) ¿Cuáles serían los nuevos requerimientos de insumos en mano de obra para las tres industrias en el lapso de 3 años?

19. (*Modelo insumo-producto*) Una economía consta de tres sectores, A, B y C, cuyas interacciones están dadas por la tabla 12.

a) Determine la matriz insumo-producto.

b) Si las demandas finales cambian a 50, 60 y 80 unidades para los productos A, B y C, respectivamente, ¿cuáles serán los niveles de producción requeridos con el objetivo de satisfacer estas nuevas demandas?

20. *(Modelo insumo-producto)* La interacción entre los tres sectores de una economía aparecen en la tabla 13.

a) Determine la matriz insumo-producto.

b) Si las demandas finales con respecto a los productos industriales secundarios se incrementan a 10 unidades, determine los nuevos niveles de producción para los tres sectores.

c) Si la demanda final en el caso de los productos industriales primarios cae a cero, calcule los nuevos niveles de producción de los tres sectores.

TABLA 11

	Industria I	Industria II	Industria III	Demandas del consumidor	Producción total
Industria					
I	16	30	20	14	80
II	32	15	80	23	150
III	24	75	40	61	200
Insumos en mano de obra	8	30	60		

TABLA 13

	Industria primaria	Industria secundaria	Agricultura	Demandas finales	Producción total
Industria primaria	4	12	3	1	20
Industria secundaria	8	9	6	7	30
Agricultura	2	3	3	7	15
Insumos primarios	6	6	3		

REPASO DEL CAPÍTULO 9

Términos, símbolos y conceptos importantes

9.1 La inversa de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{-1}$.
Matriz invertible (o no singular), matriz singular.
Cálculo de $\mathbf{A}^{-1}$ por medio de la reducción de renglón.

9.2 Modelo de insumo-producto. Insumos primarios, demandas finales.
Matriz de producción, matriz de demanda, matriz de insumo-producto y de coeficientes.

9.3 Proceso (o cadena) de Markov.
Probabilidades de transición, matriz de transición.
Matriz (o vector) de estado. Matriz de estado estable.

9.4 Determinante de orden 2, de orden 3, de orden superior.
Desarrollo completo de un determinante de orden 3.
El menor *ij* y el cofactor *ij* en un determinante.
Desarrollos de un determinante por medio del renglón *i* o la columna *i*.
Regla de Cramer, condiciones para la unicidad de la solución.

9.5 Transpuesta de una matriz.
Matriz de cofactores, matriz adjunta.

Fórmulas

$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

Solución de sistema lineal: Si $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ y $\mathbf{A}$ es cuadrada e invertible, entonces $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$

Modelo de insumo-producto: $\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{D}$, $\mathbf{X} = (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{D}$

Cadena de Markov: $\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k\mathbf{P}$
Para la matriz de estado estable $\mathbf{B}$: $\mathbf{BP} = \mathbf{B}$

Determinante de orden 2: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

Desarrollo de un determinante por cualquier renglón (o columna): multiplicar cada elemento en el renglón (o columna) por el correspondiente cofactor y formar la suma de los productos.

Regla de Cramer para un sistema de ecuaciones 3×3:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$\mathbf{A}^{-1}$ existe si y sólo si $|\mathbf{A}| \neq 0$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \operatorname{adj} \mathbf{A}$$

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ entonces $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 9

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) Si **A** tiene es invertible, entonces $\mathbf{A}^{-1}$ es invertible.

b) El determinante de una matriz identidad es igual a 1

c) Si **A**, **B** y **C** son matrices tales que $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ entonces $\mathbf{B} = \mathbf{C}$

d) Si **A**, **B** y **C** son matrices tales que $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{C}$ entonces $\mathbf{B} = \mathbf{C}$

e) Una matriz de $n \times n$ es invertible si, y sólo si $|A| \neq 0$

f) Si **A** es una matriz de $n \times m$ entonces $\mathbf{A}^T$ también es de $n \times m$

g) Si **A** es una matriz de 2×2 y sabe que $|\mathbf{A}| = 4$, entonces $|3\mathbf{A}| = 12$

h) Si **A** y **B** son matrices de $n \times n$ entonces $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

i) Si **A** y **B** son matrices de $n \times n$ entonces $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$

j) El menor y el cofactor de un elemento de una matriz son iguales en valor absoluto, pero difieren en el signo.

k) Una matriz cuadrada, **A**, es invertible si, y sólo si su determinante es positivo.

l) Si **A** y **B** son matrices de $n \times n$ invertibles, entonces $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$

m) Si $\mathbf{X}_0$ representa el vector de estado inicial, $\mathbf{X}_k$ el vector de estado después de *k* ensayos (o periodos), y **T** es la matriz de transición, entonces $\mathbf{X}_k = \mathrm{X}_0\mathbf{T}^k$

n) Si **P** y **Q** son matrices de transición de una cadena de Markov, ambas de $n \times n$, entonces **PQ** también es una matriz de transición.

o) La matriz identidad de $n \times n$ es una matriz de transición para una cadena de Markov.

p) La matriz identidad de $n \times n$ es una matriz regular, para una cadena de Markov.

2. Demuestre que $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}$ es invertible si, y sólo si $ay - bx \neq 0$

(3-16) Determine las inversas de las matrices dadas a continuación, cuando existan.

3. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} a & a \\ a & -a \end{pmatrix}$, con $a \neq 0$ **6.** $\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, con $x \neq y$

7. $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 6 \\ -3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 10 & 11 & -1 & 5 \\ 12 & -5 & 6 & 0 \\ 20 & 15 & -3 & -7 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -9 & 12 & 4 \\ -4 & 5 & 8 & -2 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 8 \end{bmatrix}$

(17-20) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones empleando la inversa de la matriz de coeficientes.

17. $3x + 2y = 9$
$5x - 3y = -4$

18. $12u - 5w = 9$
$15u + 4w = 2$

***19.** $x - y + z = 6$
$-3x + 2y + 5z = 11$
$4x + y + z = -10$

***20.** $2u + 6v - 8w = 3$
$5u - 3v + 6w = 0$
$u - 9v + 2w = 5$

(21-28) Por medio de determinantes resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

21. $x - 7y = 8$
$9x + 8y = 1$

22. $2u + 2v = 2$
$5u + 8v = 17$

23. $4x + 7y = 17$
$2x + 3y = 3$

24. $4p - 3q = 0$
$8p + 6q = 8$

25. $4a + 5b - c = 9$
$2a - b + 3c = -13$
$6a + 7b - 5c = 23$

26. $4u + 3v - 9w = 2$
$u + 2v + 4w = -2$
$2u - v - w = 2$

27. $x + y + z = 3$
$5x + 6y - 3z = -6$
$4x + 3y - 2z = 5$

28. $u + 6v + 3w = -1$
$3u - v - 2w = -1$
$4u + 7v + 3w = 2$

(29-34) Desarrolle los determinantes siguientes y escriba el resultado en forma factorizada.

29. $\begin{vmatrix} x & 12 \\ 3 & x \end{vmatrix}$ **30.** $\begin{vmatrix} x+13 & 6 \\ x-2 & x \end{vmatrix}$

***31.** $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$ **32.** $\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} x-1 & 1+x & 1 \\ 1 & x & 1 \\ x+2 & x & 2 \end{vmatrix}$ **34.** $\begin{vmatrix} x+3 & x-1 & x \\ 1 & x & x+1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

(35-38) Determine el valor de la incógnita.

35. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ x & 1 & x \end{vmatrix} = x^2$ **36.** $\begin{vmatrix} x+3 & x-1 & x \\ 1 & x & x+1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

37. $\begin{vmatrix} x & x & x \\ 1 & x & x \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = x$

38. $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & 3x \\ 0 & x & x+2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = x$

39. *(Fluctuaciones en la bolsa de valores)* En cualquier día el valor de cierta acción puede ir al alza, a la baja, o bien, permanecer sin cambio. La probabilidad de que la acción vaya al alza, a la baja o permanezca sin cambio al día siguiente están dada en la tabla que se muestra a continuación.

Cambio mañana

		Alza	Baja	Sin cambio
Cambio	Alza	0.7	0.2	0.1
hoy	Baja	0.3	0.6	0.1
	Sin cambio	0.2	0.3	0.5

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la acción esté a la baja después de dos días, dado que hoy está a la baja?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la acción esté a la baja después de dos días, dado que hoy está a la alza?

c) ¿Cuál es el vector de estado estacionario de este proceso de Markov?

40. *(Modelo insumo-producto)* La interacción ente los dos sectores de una economía hipotética se dan en la siguiente tabla.

	Agricultura	**Bienes manufacturados**	**Demandas finales**	**Producción total**
Agricultura	200	180	120	500
Bienes manufacturados	250	100	50	400
Mano de obra	50	120		

a) Determine la matriz de insumo-producto, **A**.

b) Suponga que dentro de 2 años la demanda de productos agrícolas disminuye a 100 y la de bienes manufacturados se incrementa a 70. Determine el nuevo vector de producción que satisfaga estas nuevas demandas.

c) ¿Cuáles serían los nuevos requerimientos de mano de obra para cada sector?

41. *(Modelo insumo-producto)* La interacción ente los dos sectores de una economía hipotética aparecen en la siguiente tabla.

	Industria I	**Industria II**	**Demandas finales**	**Producción total**
Industria I	100	260	150	510
Industria II	350	125	225	700
Insumos primarios	60	315		

a) Determine la matriz de insumo-producto, **A**.

b) Suponga que dentro de 5 años las demandas finales cambian a 200 para la industria I y 200 para la industria II. Determine el nuevo vector de producción que satisfaga estas nuevas demandas.

c) ¿Cuáles serían los nuevos requerimientos de insumos primarios para cada una de las dos industrias en 5 años?

(42-45) *(Ruina de un jugador)* Suponga que un jugador apuesta \$1 en cada partida de un juego. En cada partida gana o pierde \$1. Si llega a tener una riqueza de \$4 se retira; por otro lado, si su riqueza llega a \$0 se retira. Escriba la matriz de transición para cada uno de los siguientes tipos de juegos.

42. Lanza una moneda legal. Gana si sale cara y pierde si sale cruz.

43. Tira un dado no cargado. Gana si sale 1, 2 o 3, empata si sale 4 y pierde si sale 5 o 6.

44. Tira un par de dados no cargados. Gana si sale un número par o 7 y pierde en caso contrario.

45. Tira un par de dados no cargados gana si sale un número par, y pierde si sale un número impar distinto de 7 y empata si sale 7.

46. *(Demografía)* La población de un estado está dividido en población rural y urbana. Estudios recientes indican que cada año 40% de la población rural se mueve a las ciudades (se vuelve población urbana); mientras que de la población urbana 25% se convierte en población rural.

i. Determine la matriz de transición.

ii. Determine la probabilidad de que un residente urbano este año sea residente urbano dentro de dos años.

iii. Si actualmente se tiene 70% de población rural y 30% de población urbana, a largo plazo, ¿qué porcentaje de la población será de cada uno de los dos tipos?

iv. Si actualmente se tiene 10% de población rural y 90% de población urbana, a largo plazo, ¿qué porcentaje de la población será de cada uno de los dos tipos?

47. *(Renta de automóviles)* Una compañía que renta automóviles tiene tres locales en una ciudad. Un automóvil puede ser rentado en cualquiera de los tres locales y devuelto en cualquiera de ellos. Se hizo un estudio para conocer cómo se distribuían los automóviles después de una semana y se obtuvo la matriz de probabilidades dada a continuación:

Rentado en	**Dentro de una semana está en 1**	**2**	**3**
1	0.6	0.2	0.2
2	0.2	0.7	0.1
3	0.05	0.15	0.8

Si la matriz anterior se conserva de semana a semana, determine la probabilidad de que un automóvil rentado en el local 1

a) Después de dos semanas se encuentre en el local 3.

b) Después de dos semanas se encuentre en el local 1.

c) A largo plazo, ¿cuál es la probabilidad de que se encuentre en cada uno de los locales?

48. *(Participación en el mercado)* En un estado dos compañías, A y B, producen toda la leche que se consume. Actualmente la compañía A tiene el 40% del mercado; mientras que la empresa B; el 60%. Un estudio reciente indica que de un año a otro, el 25% de los consumidores de la empresa A cambian a la empresa B, mientras que 15% de los consumidores de la empresa B cambian a A. Si supone que esta tendencia continúa año con año.

a) Determine la matriz de transición de este proceso de Markov.

b) ¿Qué porcentaje del mercado tendrá la empresa A al cabo de tres años?

c) A largo plazo, ¿cómo estará distribuida la participación en el mercado?

CASO DE ESTUDIO

CODIFICACIÓN DE MENSAJES

Las aplicaciones del álgebra lineal no tienen límite. Van desde la resolución de sistemas de ecuaciones, resolución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales, pronóstico de tiempo vistos como procesos markovianos, hasta una aplicación que a diario la usan millones de personas, y seguramente también usted. ¿Ha utilizado Google™ para buscar información? Pues resulta que la forma tan eficiente para recuperar información tiene como base el uso de operaciones con matrices. Como ya mucha gente sabe, Google™ es una creación de Sergei Brin y Lawrence Page. (Se recomienda visitar la página www_db.stanford.edu/~sergey/, para aprender más acerca del fundamento matemático de este popular motor de búsqueda).

Ahora bien, al inicio del capítulo se utilizó una matriz, **C**, para codificar un mensaje que se encontraba en una matriz, **M**. Luego por medio de una multiplicación de matrices, este mensaje se encriptó por medio del producto **CM** = **S**. ¿Cómo se puede recuperar el mensaje original?

Puesto que **S** = **CM**, en donde **C** es una matriz conocida de 3×3, lo que se debe hacer es "despejar" la matriz M en la ecuación anterior. Si la matriz **C** es invertible, entonces basta con obtener la matriz inversa de **C**, es decir, se debe obtener $\mathbf{C}^{-1}$ y multiplicar ambos lados por la inversa. Como se hace a continuación.

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^{-1}S &= \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{CM}) \\ &= (\mathbf{C}^{-1}C)\mathbf{M} \\ &= \mathbf{M}\end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos la matriz del mensaje original, lo único que restaría es leer esta matriz según la tabla de código dada al inicio del capítulo.

Así que la parte medular de este método de codificación es la inversa de la matriz C. Esta inversa se puede calcular con alguno de los métodos analizados en este capítulo, con lo que obtenemos:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -13 & -2 \\ -3 & 7 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Cuál es el mensaje codificado en cada una de las matrices siguientes?

i. $$\begin{pmatrix} 104 & 161 & 172 & 154 & 109 & 149 & 52 & 173 \\ 29 & 59 & 61 & 56 & 32 & 59 & 18 & 66 \\ 12 & 91 & 105 & 89 & 108 & 63 & 33 & 83 \end{pmatrix}$$

ii. $$\begin{pmatrix} 55 & 51 & 96 & 140 \\ 16 & 15 & 31 & 43 \\ 58 & 51 & 72 & 138 \end{pmatrix}$$

b) Obtenga una matriz de codificación de tamaño 3×3. *Sugerencia:* Seleccione una matriz en la que todos sus componentes sean enteros y su determinante sea 1 o -1. ¿Por qué?

CAPÍTULO 10

Programación lineal

Costos mínimos

Cada día nos enfrentamos con la decisión de cómo distribuir un bien, con la finalidad de sacarle mayor provecho. Por ejemplo, cuánto tiempo destinar al estudio para obtener las calificaciones más altas, cómo invertir en diferentes proyectos para obtener un rendimiento máximo, o bien, cuál es la política de producción que minimiza los gastos. Muchas veces, un modelo que implica el uso de relaciones lineales es una buena aproximación al problema estudiado.

Considere el problema al que se enfrenta una empresa que se dedica a la fabricación de muebles, la cual planea producir dos productos: sillas y mesas. Esto con base en sus recursos disponibles, los cuales consisten en 800 pies de madera de caoba y 900 horas de mano de obra (HM). El administrador sabe que, para la fabricación de una silla, se requiere de 5 pies de madera y 10 HM, con lo que se obtiene una ganancia de $45. Mientras que en la fabricación de cada mesa se utilizan 20 pies de madera y 15 HM, con una ganancia de $80. El departamento de mercadotecnia informa que se pueden vender todas las mesas y sillas que sea posible producir.

Con base en la información anterior, responda las preguntas siguientes:

i. ¿Cuál es el plan de producción que maximiza las ganancias?

ii. ¿Cuál es la ganancia máxima?

iii. Debido a una escasez de sillas en el mercado, el departamento de mercadotecnia informa que éstas se pueden vender a un precio más elevado, lo que dejaría una ganancia de $55 por cada silla vendida. ¿Cuál es el plan de producción óptimo?

En este capítulo se dará una introducción a la programación lineal y al empleo del método símplex.

Este último fue desarrollado por George Dantzig (1914–2005) a quien se le considera el padre de la programación lineal.

TEMARIO

■ 10-1 DESIGUALDADES LINEALES

La desigualdad $y > 2x - 4$, que relaciona las variables x y y, es un ejemplo de lo que llamamos *desigualdades lineales.* Empecemos examinando este ejemplo particular en términos de una gráfica.

La ecuación $y = 2x - 4$ tiene como gráfica una línea recta cuya pendiente es 2 y ordenada al origen -4. Aparece como una línea a trazos en la figura 1. Como un ejemplo, cuando $x = 4$, $y = 2(4) - 4 = 4$, de modo que el punto (4, 4) está sobre la línea, como se advierte en la figura 1.

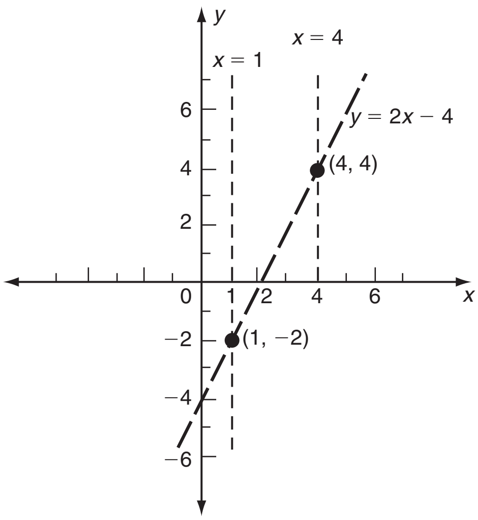


FIGURA 1

Consideremos ahora la desigualdad

$$y > 2x - 4$$

Cuando $x = 4$, adopta la forma $y > 2(4) - 4$, o $y > 4$. Así, todos los puntos de la forma $(4, y)$ en donde $y > 4$ satisfacen la desigualdad. En forma gráfica, esto significa que sobre la línea vertical $x = 4$, la desigualdad $y > 2x - 4$ se satisface para todos los puntos situados *arriba* del punto (4, 4).

De manera similar podemos considerar la línea vertical $x = 1$. Sobre esta línea, la desigualdad $y > 2x - 4$ se reduce a $y > -2$. Que es satisfecha por los puntos $(1, y)$ que están sobre esta línea vertical arriba del punto $(1, -2)$. (Véase la figura 1).

Puede advertirse en forma análoga que la desigualdad $y > 2x - 4$ es satisfecha por todos los puntos (x, y) situados por *arriba* de la línea recta $y = 2x - 4$. Esta región del plano xy se dice que es la **gráfica** de la desigualdad dada.

Una desigualdad lineal entre dos variables x y y es cualquier relación de la forma $Ax + By + C > 0$ (o < 0) o $Ax + By + C \geq 0$ (o ≤ 0). La gráfica de una desigualdad lineal consta de todos aquellos puntos (x, y) que satisfacen la desigualdad. Consiste de una región del plano xy, no sólo de una línea o curva.

La gráfica de la desigualdad $Ax + By + C > 0$ es un semiplano acotado por la línea recta cuya ecuación es $Ax + By + C = 0$. La figura 2 ilustra algunas desigualdades lineales. En cada caso, el semiplano que satisface la desigualdad se encuentra sombreado.

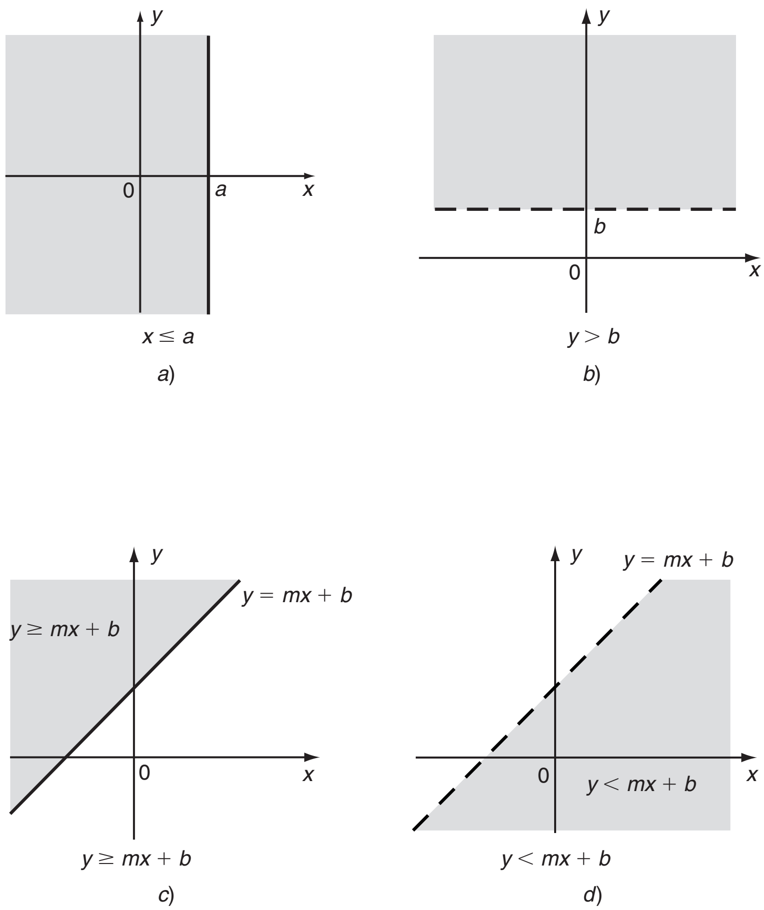


FIGURA 2

La gráfica de $y > mx + b$ es el semiplano por encima de la línea $y = mx + b$ y la gráfica de $y < mx + b$ es el semiplano debajo de la línea $y = mx + b$. Si la gráfica incluye a la línea, la indicamos con una línea continua; de otra forma usamos una línea a trazos. Este tipo de líneas siempre corresponde a una desigualdad estricta ($>$ o $<$) y una línea continua está asociada a una desigualdad débil ($\geq$ o $\leq$).

EJEMPLO 1 Bosqueje la gráfica de la desigualdad lineal $2x - 3y < 6$

Solución En primer término resolvemos en la desigualdad dada para y en términos de x (esto es, la expresamos en una de las formas $y > mx + b$ o $y < mx + b$).

$$2x - 3y < 6$$

$$-3y < -2x + 6$$

Dividimos ahora ambos lados entre -3. Recuerde que cuando dividimos los términos de una desigualdad entre un número negativo, el signo de la desigualdad se cambia. (Véase la sección 3-2).

$$y > \tfrac{2}{3}x - 2$$

Enseguida graficamos la línea $y = \frac{2}{3}x - 2$. Para $x = 0$, tenemos que $y = -2$. Así, $(0, -2)$ es un punto sobre la línea. De nuevo, cuando $y = 0$, tenemos que $\frac{2}{3}x - 2 = 0$ o $x = 3$. En consecuencia, $(3, 0)$ es otro punto sobre la línea. Graficamos estos puntos y los unimos mediante una línea a trazos (porque tenemos una desigualdad estricta). Puesto que la desigualdad dada, cuando la resolvemos para y, contiene el signo *mayor que,* la gráfica es el semiplano situado por *arriba* de la línea a trazos. (Véase la figura 3). ☛ **1**

☛ **1.** Grafique la desigualdad $x \geq 2y - 12$

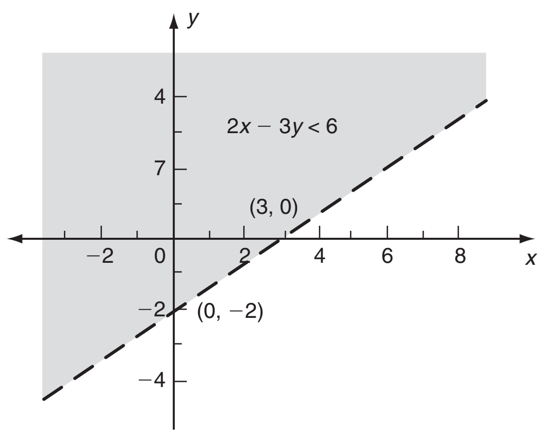


FIGURA 3

Las desigualdades lineales aparecen en muchos problemas de interés práctico. Esto se hará evidente en las secciones subsecuentes de este capítulo, en el cual estudiaremos una área de las matemáticas denominada *programación lineal.* Los ejemplos siguientes ilustrarán algunas situaciones comunes en que aparecen desigualdades lineales.

EJEMPLO 2 (***Inversiones***) Un accionista planea invertir \$30,000 en dos inversiones A y B. La acción A está valuada actualmente en \$165 y la acción B en \$90 por acción. Si el accionista compra x acciones de A y y acciones de B, grafique la región del plano xy que corresponda a las posibles estrategias de inversión.

Solución Las x acciones de la inversión A a \$165 por acción tienen un costo de $165x$ dólares. De manera similar, y acciones de la inversión B a \$90 tienen un costo de $90y$ dólares. La suma total invertida es, por tanto,

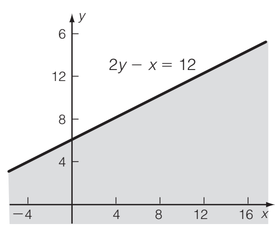
$$(165x + 90y) \text{ dólares}$$

y ésta no puede exceder \$30,000. En consecuencia,

$$165x + 90y \leq 30{,}000$$

Resolvemos para y.

Respuesta



$$90y \leq 30{,}000 - 165x$$

$$y \leq -\frac{165}{90}x + \frac{30{,}000}{90}$$

$$y \leq -\frac{11}{6}x + \frac{1000}{3}$$

La gráfica de esta desigualdad aparece en la figura 4. En este ejemplo, sólo tiene importancia la región para la cual $x \geq 0$ y $y \geq 0$, de modo que la región sombreada tiene forma triangular en lugar de semiplano.

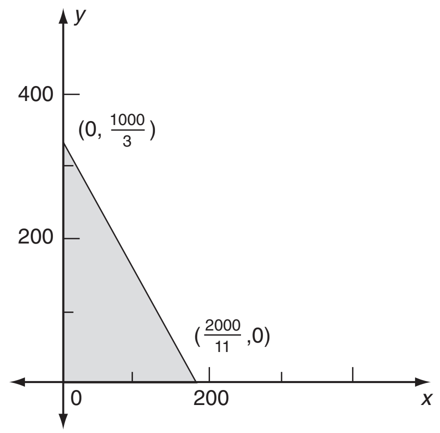


FIGURA 4

En muchas situaciones prácticas, surgen problemas que requieren más de una desigualdad lineal. El ejemplo 3 ilustra un caso en que ocurren dos de tales desigualdades.

EJEMPLO 3 (***Inversiones***) En el ejemplo anterior, la acción A actualmente paga un dividendo de \$6 por acción y la inversión B paga \$5 por acción. Si el accionista requiere que la inversión le pague más de \$1400 en dividendos, bosqueje la gráfica de la región permitida.

Solución Otra vez denotemos con x y y los números de acciones de las inversiones A y B, respectivamente. La desigualdad previa, $165x + 90y \leq 30{,}000$, aún se aplica. Además, los dividendos son de $6x$ dólares por la acción A y $5y$ dólares por la acción B, lo que da un total de $(6x + 5x)$ dólares. Puesto que esto debe exceder a \$1400, tenemos la segunda condición:

$$6x + 5y > 1400$$

Esto puede reescribirse como

$$y > -\tfrac{6}{5}x + 280$$

Esta desigualdad se satisface para los puntos por encima de la línea $6x + 5y = 1400$. Dado que ésta es una desigualdad estricta, la línea no está incluida y se dibuja como una línea a trazos en la figura 5.

☛ **2.** Grafique el siguiente conjunto de desigualdades:
$0 \le x \le 4$, $y \ge 0$, $x + 2y < 6$

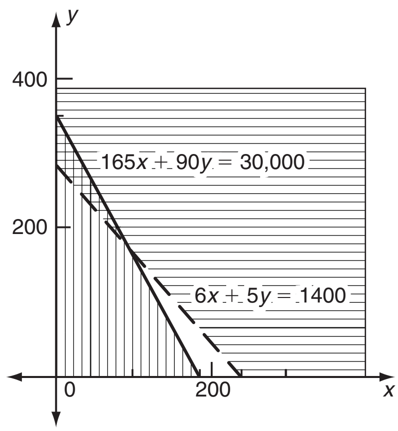
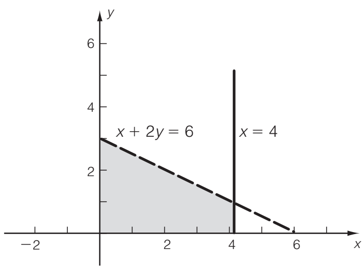


FIGURA 5

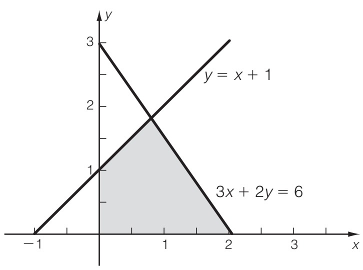
Respuesta



Los valores permitidos de x y y deben satisfacer ambas desigualdades $165x + 90y \le 30{,}000$ y $6x + 5y > 1400$. Así pues, cualquier punto permitido debe estar *sobre o por debajo* de la línea $165x + 90y = 30{,}000$ y al mismo tiempo por *arriba de* la línea $6x + 5y = 1400$. Estas dos regiones están sombreadas de manera distinta en la figura 5. La región permitida está sombreada de las dos formas. Otra vez, los valores negativos de x o de y no nos interesan. ☛ **2, 3**

☛ **3.** Grafique el siguiente conjunto de desigualdades:
$x \ge 0$, $y \ge 0$, $3x + 2y \le 6$,
$x - y \ge -1$

Respuesta



El procedimiento general para graficar varias desigualdades lineales es el siguiente. En primer término, graficamos cada desigualdad por separado y sombreamos cada región permitida de manera diferente. En la región permitida para todas las desigualdades se traslapan las regiones sombreadas.

Cuando en un sistema de desigualdades intervienen más de dos variables, las técnicas gráficas son de mucho menor utilidad. Con tres variables, aún podemos dibujar las gráficas, pero a menudo tiene inconvenientes; con cuatro o más variables, llega a ser imposible el uso de gráficas. El ejemplo 4 ilustra un problema simple que requiere tres variables.

EJEMPLO 4 ***(Distribución de televisores)*** Una compañía electrónica produce televisores en dos fábricas, F_1 y F_2. La fábrica F_1 puede producir 100 televisores a la semana y la fábrica F_2, 200. La compañía tiene tres centros de distribución, X, Y y Z. El centro X requiere 50 televisores a la semana, Y demanda 75 y Z requiere de 125 televisores por semana, con el propósito de satisfacer las demandas de sus áreas respectivas. Si la fábrica F_1 suministra x televisores a la semana a su centro de distribución X, y televisores a Y y z televisores a Z, escriba las desigualdades que deben satisfacer x, y y z.

☛ **4.** ¿Cómo se modifican las desigualdades del ejemplo 4 si *a*) la capacidad de la fábrica F_2 repentinamente se reduce a 150 televisores por semana; o *b*) las demandas de X, Y y Z aumentan a 100, 150 y 200 televisores por semana, respectivamente, y las capacidades de la planta se aumentan a 250 en F_1 y 200 en F_2?

Solución La situación se ilustra en la figura 6. Si la fábrica F_1 suministra x televisores al centro X, F_2 debe proveer $(50 - x)$ televisores dado que este centro de distribución requiere 50 televisores. De manera similar, F_2 debe suministrar $(75 - y)$ al centro Y y $(125 - z)$ televisores al centro Z.

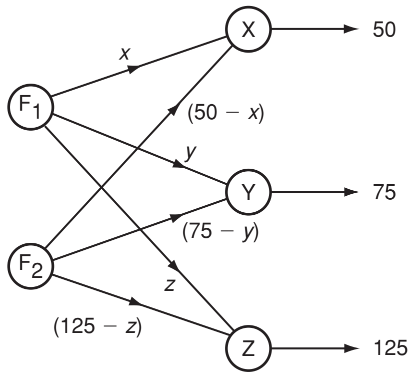


FIGURA 6

El número total de televisores que la fábrica F_1 provee a los tres centros de distribución es $x + y + z$; éste no puede exceder la capacidad productiva de esta fábrica, la cual es de 100 televisores a la semana. Así, llegamos a la condición

$$x + y + z \leq 100$$

En forma análoga, el número total de televisores suministrados por la fábrica F_2 es igual a

$$(50 - x) + (75 - y) + (125 - z) = 250 - x - y - z$$

Este número no puede exceder 200, que es lo más que produce esta fábrica.

$$250 - x - y - z \leq 200$$

esto es,

$$x + y + z \geq 50$$

Dado que el número de televisores suministrados por cualquier fábrica a cualquier centro de distribución no puede ser negativo, cada una de las seis cantidades $x, y, z, (50 - x), (75 - y)$ y $(125 - z)$ debe ser mayor o igual que cero. Por ello, x, y y z deben satisfacer el siguiente sistema de desigualdades:

$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad z \geq 0 \quad x \leq 50 \quad y \leq 75 \quad z \leq 125$$
$$x + y + z \geq 50 \quad x + y + z \leq 100$$

Para representar estas cantidades geométricamente, debemos usar coordenadas en tres dimensiones (x, y, z). Es posible bosquejar una figura apropiada, pero se requiere cierto grado de destreza para obtener una representación precisa. ☛ **4**

Respuesta *a*) $x + y + z = 100$, de modo que z puede eliminarse del problema y nos quedamos con $0 \leq x \leq 50$, $0 \leq y \leq 75$ y $x + y \leq 100$
b) Otra vez, puede eliminarse z ya que $x + y + z = 250$, y nos quedamos con $0 \leq x \leq 100$, $0 \leq y \leq 150$ y $50 \leq x + y \leq 250$

EJERCICIOS 10-1

(1-6) Bosqueje las gráficas de las desigualdades siguientes en el plano *xy*.

1. $x + y > 1$ **2.** $2x + 3y < 6$

3. $2x - y \leq 4$ **4.** $3x \geq y - 6$

5. $2x + 3 > 0$ **6.** $4 - 3y < 0$

(7-18) Bosqueje las gráficas de los siguientes conjuntos de desigualdad.

7. $x + y > 2, \quad 3x + y < 3$

8. $2x + y > 4, \quad x + 2y < 4, \quad 2x - 3y < 3$

9. $0 \leq x \leq 10, \quad 0 \leq y \leq 15, \quad 5 \leq x + y \leq 12$

10. $2 \leq x \leq 5, \quad 1 \leq y \leq 5, \quad x + y > 4, \quad 2x + y < 10$

11. $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + 3y \leq 4, \quad 2x + y \leq 6$

12. $1 \leq x + y \leq 4, \quad y - x \geq 0, \quad y - 2x \leq 1$

13. $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 1, \quad 2x + 3y \leq 3$

14. $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \geq 1, \quad 2x + 3y \leq 3$

15. $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 4x + y \leq 4, \quad 2x + 3y \leq 3,$
$x + y \geq 3$

16. $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x - y \leq 2, \quad 2x + y \leq 2$

17. $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + 3y \leq 3, \quad 3x + y \leq 3,$
$x + 2y \leq 3$

18. $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad y \geq 2x + 1, \quad y + 2x \leq 3,$
$3y + 2x \leq 3$

19. *(Distribución de materiales)* Una compañía tiene 100 toneladas de lámina de aluminio en cierta localidad y 120 toneladas en una segunda localidad. Parte de este material debe enviarse a dos obras en construcción. La primera requiere 70 toneladas y la segunda 90. Denotemos con *x* y *y* las cantidades enviadas por la primera bodega a las dos obras, respectivamente. Determine las desigualdades que *x* y *y* deben satisfacer y represéntelas gráficamente.

20. *(Costos de distribución)* En el ejercicio 19, suponga que los costos de enviar cada tonelada de aluminio de la primera bodega a la primera y segunda obras son, \$10 y \$15, respectivamente, y que \$15 y \$25 son los costos de enviar cada tonelada de la segunda bodega a cada una de las obras respectivas. Si la compañía requiere que el costo de envío no exceda \$2700, determine la condición adicional sobre *x* y *y* y represente en forma gráfica la región permitida.

21. *(Costos de distribución)* Repita el ejercicio 20 si los cuatro costos de envío son \$15 y \$ 10, respectivamente, desde la primera bodega y \$10 y \$20, respectivamente, desde la bodega situada en la segunda localidad.

22. *(Almacenamiento en bodega)* Una compañía desea almacenar 120 televisores en su bodega. Mantiene dos modelos almacenados, un modelo de mesa y otro con patas. El número de modelo de mesa no debe ser menor que 40 y el número de modelos con patas no debe ser menor que 30. Represente en forma gráfica los número posibles de modelos que pueden almacenarse.

23. *(Almacenamiento en bodega)* En el ejercicio 22, suponga que el modelo con patas requiere 12 pies cúbicos de espacio de almacenamiento y el modelo de mesa 8 pies cúbicos. Si la compañía dispone de 1200 pies cúbicos de espacio, represente los nuevos números permitidos de modelos en una gráfica.

24. *(Asignación a máquinas)* Una compañía elabora dos productos, A y B. Cada uno de estos productos requiere cierta cantidad de tiempo, en dos máquinas en su elaboración. Cada unidad del producto A requiere 1 hora en la máquina I y 2 horas en la máquina II; cada unidad del producto B demanda 3 horas en la máquina I y 2 horas en la máquina II. La compañía dispone de 100 horas a la semana en cada máquina. Si *x* unidades del producto A y *y* unidades del producto B se producen a la semana, dé las desigualdades que satisfacen *x* y *y* y represéntelas en forma gráfica.

25. *(Asignación y utilidades)* En el ejercicio 24, suponga que la compañía obtiene utilidades de \$20 por cada artículo A y \$30 por cada artículo B. Si se requiere que la utilidad semanal sea al menos de \$1100, represente los valores permitidos de *x* y *y* gráficamente.

26. *(Asignación y utilidades)* En el ejercicio 25, represente la región permitida en forma gráfica si al menos 15 unidades de cada tipo deben producirse, con la finalidad de cumplir con los contratos convenidos.

27. *(Planeación dietética)* El filete de lomo tiene un costo de 0.15 dólares por onza y cada onza contiene 110 calorías y 7 gramos de proteínas. El pollo rostizado tiene un costo de 0.08 dólares por onza, y cada onza contiene 83 calorías y 7 gramos de proteínas. Represente algebraicamente las combinaciones de *x* onzas de filete y *y* onzas de pollo que tienen un costo no mayor de \$1.00 y que contiene al menos 900 calorías y al menos 60 gramos de proteínas.

28. *(Planeación dietética)* El médico señaló a la señorita X que ella se sentiría menos deprimida si consumía al menos el requerimiento mínimo de tiamina para un adulto, esto es, 1 miligramo diario. Le sugirió, pues, que podía obtener la mitad de esta cantidad con el cereal del desayuno. El cereal A contiene 0.12 miligramos de tiamina por onza, y el cereal B 0.08 miligramos por onza. Determine las cantidades posibles de estos cereales para proveerla por lo menos con la mitad del requerimiento diario de tiamina para un adulto.

29. *(Espacio de almacenamiento)* La bodega de un departamento de química almacena, al menos, 300 vasos de un tamaño y 400 de un segundo tamaño. Se ha decidido que el número total de vasos almacenados no debe exceder de 1200. Determine las cantidades posibles de estos dos tipos de vasos que pueden almacenarse y muéstrelo con una gráfica.

30. *(Espacio de almacenamiento)* En el ejercicio 29, supongamos que los vasos del primer tamaño ocupan 9 pulgadas cuadradas del anaquel y los del segundo tamaño 6 pulgadas cuadradas. El área total de anaqueles disponible para almacenar es a lo sumo de 62.5 pies cuadrados. Determine las cantidades posibles de los dos vasos y muéstrelo con una gráfica.

31. *(Planeación dietética)* Una persona está considerando reemplazar en su dieta parte de la carne por frijoles de soya. Una onza de carne contiene en promedio casi 7 gramos de proteína; mientras que 1 onza de frijoles de soya (verde) contiene casi 3 gramos de proteína. Si requiere que su consumo de proteína diaria que obtiene de la carne y de los frijoles de soya combinados debe ser al menos 50 gramos, ¿qué combinación de estos dos nutrientes formarán una dieta aceptable?

32. *(Ecología)* Un estanque de peces lo abastecen cada primavera con dos especies de peces S y T. El peso promedio de los peces es de 3 libras para S y 2 para T. Hay dos tipos de comida F_1 y F_2 disponibles en el estanque. El requerimiento promedio diario para un pez de la especie S es 2 unidades de F_1 y 3 de F_2; mientras que para la especie T es 3 unidades de F_1 y 1 de F_2. Si a lo más hay 600 unidades de F_1 y 300 de F_2 disponibles diariamente, ¿cómo debe abastecerse el estanque, para que el peso total de los peces sea cuando menos de 400 libras?

■ 10-2 OPTIMIZACIÓN LINEAL (ENFOQUE GEOMÉTRICO)

En un problema de programación lineal se requiere encontrar el valor máximo o mínimo de alguna expresión algebraica, cuando las variables de esta expresión están sujetas a varias desigualdades lineales. El ejemplo sencillo siguiente es típico de tales problemas.

EJEMPLO 1 ***(Utilidad máxima)*** Una compañía fabrica dos productos, X y Y. Cada uno de estos productos requiere cierto tiempo en la línea de ensamblado y otro tiempo más en el departamento de acabado. Cada artículo del tipo X necesita 5 horas de ensamblado y 2 horas de acabado; mientras que cada artículo del tipo Y requiere 3 horas en ensamblado y 4 de acabado. En cualquier semana, la empresa dispone de 105 horas en la línea de ensamblado y 70 horas en el departamento de acabado. La empresa puede vender todos los artículos que produce y obtener una utilidad de \$200 por cada artículo de X y \$160 por cada artículo de Y. Calcule el número de artículo de cada tipo que deberían fabricarse a la semana con el objetivo de maximizar la utilidad total.

Solución Por lo regular, es conveniente al manejar problemas de este tipo resumir la información en una tabla. En la tabla 1 aparece la información del ejemplo 1.

TABLA 1

	Ensamblado	Acabado	Utilidad
X	5	2	200
Y	3	4	160
Disponibilidad	105	70	

☛ **5.** En el ejemplo 1, escriba las desigualdades, si cada artículo del tipo X requiere de 3 horas de ensamblado y 2 para acabados y cada artículo de tipo Y requiere 4 y 3 horas de ensamblado y acabados, respectivamente.

Suponga que la empresa produce x artículos de tipo X y y artículos del tipo Y a la semana. Entonces, el tiempo necesario en la línea de ensamblado será de $5x$ horas en el caso del producto X y $3y$ horas para el producto Y, o $(5x + 3y)$ horas en total. Dado que sólo se puede disponer de 105 horas, debemos tener que $5x + 3y \leq 105$.

De manera similar, se requieren de $2x$ horas en el departamento de acabado por cada x artículos del producto X y $4y$ por cada y artículos del producto Y. El número total de horas, $2x + 4y$, no pueden exceder las 70 de que se dispone, de modo que tenemos la segunda condición, $2x + 4y \leq 70$. ☛ **5**

Cada artículo del tipo X genera una utilidad de \$200, de modo que x artículos producen $200x$ dólares de utilidad. En forma análoga, y artículos de tipo Y producen $160y$ dólares de utilidad. Así, la utilidad semanal total P (en dólares) está dada por

$$P = 200x + 160y$$

Por consiguiente, podemos reestablecer el problema en los términos siguientes: encuentre los valores de x y y que maximicen la cantidad $P = 200x + 160y$ cuando x y y están sujetas a las condiciones

$$5x + 3y \leq 105, \quad 2x + 4y \leq 70, \quad x \geq 0 \quad \text{y} \quad y \geq 0 \tag{1}$$

(Observe las condiciones de que x y y no deben ser negativas. Éstas se agregan por razones de completez).

Este ejemplo es un problema característico de programación lineal. Tenemos una expresión $P = 200x + 160y$, que es lineal en las variables x y y, y deseamos encontrar el valor máximo de P cuando x y y satisfacen las desigualdades (1). Un problema más general podría incluir más de dos variables y un número mayor de desigualdades que las cuatro de este ejemplo; pero de cualquier manera este ejemplo es bastante representativo de los problemas del área de programación lineal.

Al analizar cualquier problema de programación lineal, en especial cuando sólo intervienen dos variables, con frecuencia es útil un enfoque geométrico. Consideremos las desigualdades (1). El conjunto de puntos (x, y) que satisfacen todas las desigualdades aparece sombreado en la figura 7. Esta región sombreada representa el conjunto de *soluciones factibles,* esto es, el conjunto de valores de x y y que la empresa puede adoptar. No se puede tomar cualquier punto (x, y) situado afuera de esta región sombreada.

Por ejemplo, consideremos el punto $x = 12$, $y = 14$, el cual está fuera de la región factible. Con la finalidad de producir 12 artículos del tipo X y 14 artículos del Y se requerirían $12(5) + 14(3) = 102$ horas en la línea de ensamblado y $12(2) + 14(4) = 80$ horas en el departamento de acabado. Si bien esto no excedería las horas disponibles en la línea de ensamblado, sí sobrepasa aquellas disponibles en el departamento de acabado; de modo que no está dentro del programa de producción posible.

Respuesta $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + 4y \leq 105$, $2x + 3y \leq 70$

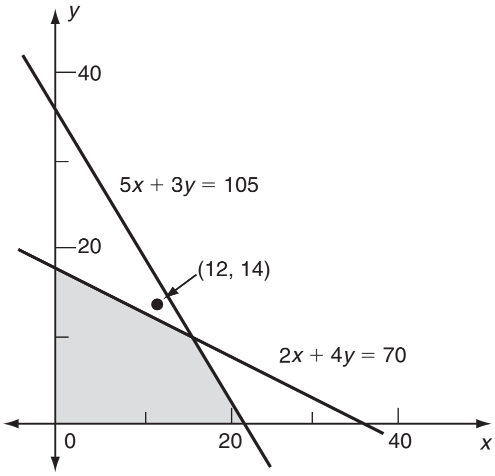


FIGURA 7

Consideremos ahora el conjunto de valores de x y y que conducen a alguna utilidad fija. Por ejemplo, dando a P el valor 4000, advertimos que x y y deben satisfacer la ecuación

$$200x + 160y = 4000 \tag{2}$$

Todos los valores de x y y que satisfacen esta ecuación producen una utilidad de \$4000 a la semana. Ésta es la ecuación de una línea recta que corta el eje x en el punto (20, 0) y el eje y en el punto (0, 25), como se aprecia en la figura 8. Parte de esta línea pasa por la región de soluciones factibles. Debido a esto, concluimos que le es posible a la empresa lograr una utilidad de 4000 dólares a la semana. Puede realizar esto eligiendo cualquier valor de (x, y) situado sobre el segmento AB que aparece en la figura 8.

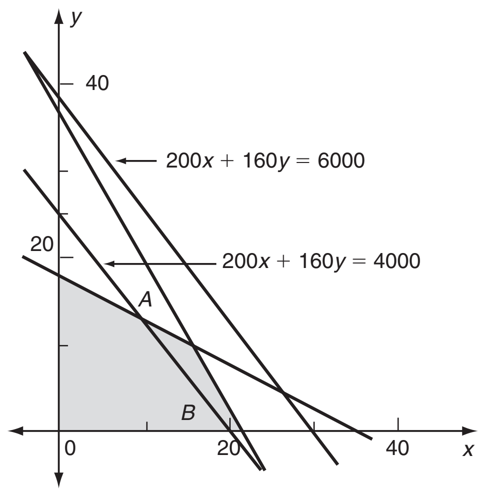


FIGURA 8

Por otra parte, consideremos $P = 6000$. Los valores correspondientes de x y y deben satisfacer $200x + 160y = 6000$, que otra vez es la ecuación de una línea recta, esta vez corta los ejes de coordenadas en los puntos (30, 0) y (0, 37.5). Esta línea recta no pasa por la región sombreada de soluciones factibles (véase la figura 8) y, por ello, no le es posible a la empresa obtener una utilidad tan grande como \$6000 a la semana. La utilidad máxima posible debe estar en algún lugar entre \$4000 y \$6000 a la semana.

☛ **6.** En las figuras 7 u 8, dibuje las rectas de indiferencia que correspondan a una utilidad de \$3000 y \$5000 semanales. ¿Estos niveles de utilidad son factibles?

El conjunto de puntos (x, y) que conducen a una utilidad dada P satisfacen la ecuación $200x + 160y = P$. Esta ecuación, para P fija, tiene como gráfica una línea recta en el plano xy llamada **línea de utilidad constante** o **recta de indiferencia**. Las dos líneas que aparecen en la figura 8 son líneas de utilidad constante que corresponden a los valores $P = 4000$ y $P = 6000$. ☛ **6**

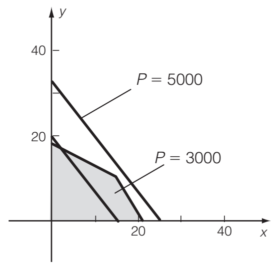
La ecuación de una línea de utilidad constante puede escribirse en la forma

$$160y = P - 200x \quad \text{o bien} \quad y = -\frac{5}{4}x + \frac{P}{160}$$

Por tanto, la línea tiene pendiente $-\frac{5}{4}$ y ordenada al origen $P/160$. Es una propiedad importante que la pendiente de cualquier línea de utilidad constante sea la misma sin importar el valor de P. Esto significa que todas las líneas de utilidad constante son paralelas entre sí. A medida que el valor de P se incrementa, la línea de utilidad máxima correspondiente se aparta del origen (la ordenada al origen aumenta), siempre con la misma pendiente.

Para obtener la utilidad máxima, debemos alejar la línea de utilidad constante, del origen hasta que sólo toque el extremo de la región de soluciones factibles. Es claro por la figura 9 que la línea de utilidad máxima es la que pasa por la esquina C situada en la frontera de la solución factible. Los valores de x y y en C dan los volúmenes de producción de los dos productos X y Y que conducen a la utilidad máxima.

Respuesta \$3000 es factible, pero la recta de \$5000 no interseca la región factible.



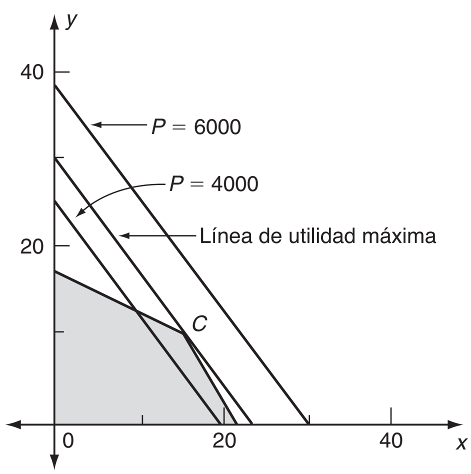


FIGURA 9

☛ **7.** Utilice el método gráfico para determinar el valor máximo de $Z = x + y$ cuando x y y están restringidas por las desigualdades $0 \le x \le 4$, $y \ge 0$, $x - 2y \le 6$

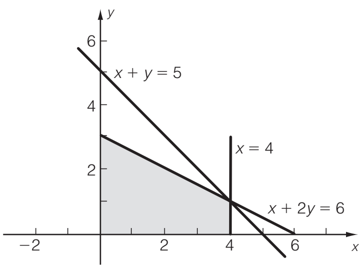
El punto C es la intersección de las dos líneas rectas que acotan la región factible. Sus coordenadas se obtienen resolviendo las ecuaciones de estas dos líneas, $5x + 3y = 105$ y $2x + 4y = 70$. Resolviendo estas ecuaciones, encontramos que $x = 15$ y $y = 10$. Por consiguiente, la utilidad es máxima cuando la empresa produce 15 artículos del tipo X y 10 del tipo Y a la semana. La utilidad semanal máxima está dada por

$$P_{\text{máx}} = 200x + 160y = 200(15) + 160(10) = 4600$$

La utilidad máxima es por tanto \$4600.

El procedimiento usado en la resolución de este problema también puede emplearse cuando ocurre un número mayor de desigualdades. ☛ **7, 8**

Respuesta $Z_{\text{máx}} = 5$ en el vértice $x = 4$ y $y = 1$



☛ **8.** Determine los valores máximo y mínimo de $Z = 2y - x$, cuando x y y están restringidas por las condiciones $x \ge 0$, $y \ge 0$, $3x + 2y \le 6$, $x - y \ge -1$

EJEMPLO 2 Una empresa de productos químicos produce dos tipos de fertilizantes. Su marca regular contiene nitratos, fostatos y potasio en la razón 3 : 6 : 1 (en peso) y su marca super contiene estos tres ingredientes en la razón 4 : 3 : 3. Cada mes la empresa puede confiar en un suministro de 9 toneladas de nitratos, 13.5 toneladas de fosfatos y 6 toneladas de potasio. Su planta productora puede elaborar a lo más 25 toneladas de fertilizantes al mes. Si la empresa obtiene una utilidad de \$300 por cada tonelada de fertilizante regular y \$480 por cada tonelada del super, ¿qué cantidades de cada tipo deberá producir para obtener la máxima utilidad?

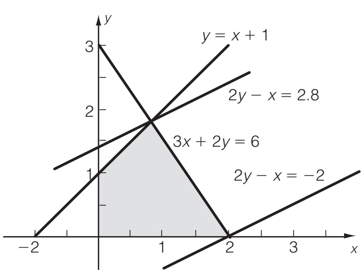
Solución La información dada se resume en la tabla 2.

TABLA 2

	Nitratos	Fosfatos	Potasio	Utilidad
Marca regular	0.3	0.6	0.1	300
Supermarca	0.4	0.3	0.3	480
Suministros disponibles	9	13.5	6	

Denotemos con x la producción de la empresa del tipo regular y con y las toneladas del fertilizante de tipo super al mes. Entonces, como cada tonelada del tipo regular contiene 0.3 toneladas de nitratos y cada tonelada del tipo super contiene 0.4 toneladas de nitratos, la cantidad total de nitratos usada es $0.3x + 0.4y$. Ésta no puede exceder el suministro disponible de 9 toneladas, de modo que tenemos la condición $0.3x + 0.4y \le 9$.

Respuesta $Z_{\text{máx}} = 2.8$ en $x = 0.8$, $y = 1.8$; $Z_{\text{mín}} = -2$ en $x = 2$, $y = 0$



Procediendo de manera similar con los fosfatos y el potasio, obtenemos las otras dos condiciones, $0.6x + 0.3y \le 13.5$ y $0.1x + 0.3y \le 6$.

Además de estas condiciones, existe también la condición de que la producción total del fertilizante, $x + y$, no puede exceder la capacidad de la planta de 25 toneladas, de modo que $x + y \le 25$. Después de eliminar los decimales, obtenemos el siguiente sistema de desigualdades que x y y deben satisfacer.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &\le 90 & 6x + 3y &\le 135 \\ x + 3y &\le 60 & x + y &\le 25 \\ x &\ge 0 & y &\ge 0 \end{aligned}$$

La región factible satisface todas estas desigualdades como se aprecia en la figura 10. Es el interior del polígono *ABCDEO* que está sombreado.

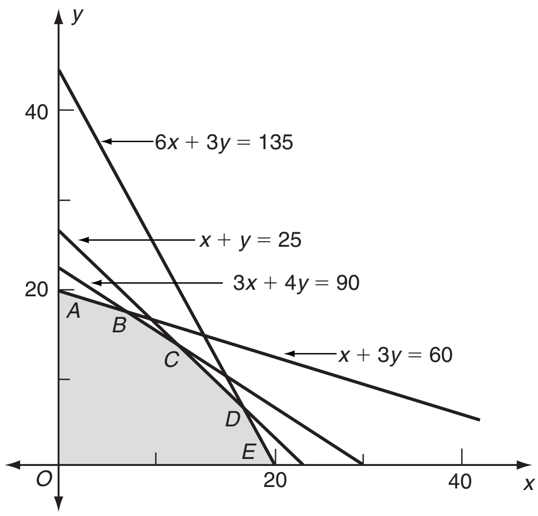


FIGURA 10

Cada tonelada de fertilizante produce una utilidad de \$300 por lo que se refiere al tipo regular y \$480 para el tipo super. Cuando los volúmenes de producción son de x y y toneladas al mes, respectivamente, la utilidad mensual total P es

$$P = 300x + 480y$$

Haciendo P igual a algún valor fijo, esta ecuación determina otra vez una línea recta en el plano xy, una línea de utilidad constante. Varias de estas líneas aparecen en la figura 11. Todos las líneas correspondientes a diferentes valores de P son paralelas entre sí y se alejan del origen a medida que el valor de P aumenta. Por ejemplo, observamos que la línea correspondiente a $P = 7200$ pasa a través de la región factible; mientras que la línea que corresponde a $P = 12{,}000$ no. Es geométricamen-

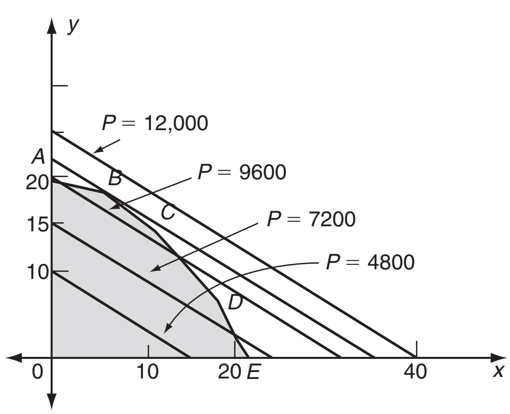


FIGURA 11

te evidente que la línea de utilidad constante con el valor más grande de P que intersecta la región factible es la que pasa por la esquina del punto B. Este punto es la intersección de las dos líneas rectas

$$x + 3y = 60 \quad \text{y} \quad 3x + 4y = 90$$

Sus coordenadas son $x = 6$ y $y = 18$.

Por tanto, concluimos que la utilidad máxima se obtiene fabricando 6 toneladas del tipo regular y 18 toneladas del tipo super de fertilizante al mes. La utilidad máxima está dada por

$$P_{\text{máx}} = 300x + 480y = 300(6) + 480(18) = 10{,}440 \text{ dólares}$$

Vale la pena notar que la producción que maximiza la utilidad usa todos los nitratos disponibles, así como el potasio; pero no emplea todos los fosfatos disponibles y además no utiliza toda la capacidad de la planta. ☛ **9**

☛ **9.** En el ejemplo 2, ¿cómo debe modificar la compañía su estrategia de producción si
a) tiene disponible más fosfato;
b) hay más potasio disponible?
(*Nota:* Responder a este tipo de preguntas (denominado análisis de sensibilidad) es útil para saber cómo cambian las fronteras de la región factible).

DEFINICIÓN Las desigualdades que deben satisfacer las variables de un problema de programación lineal se denominan **restricciones**. La función lineal que debe ser maximizada o minimizada se conoce como **función objetivo**.

En las aplicaciones a análisis de negocios, la función objetivo a menudo es una función de utilidad (que debe ser maximizada) o una función de costo (que debe minimizarse). Por lo regular, denotamos a la función objetivo con la letra Z, y lo haremos así de ahora en adelante.

El ejemplo siguiente ilustra un problema de programación lineal que requiere la minimización del costo.

EJEMPLO 3 ***(Decisiones sobre producción)*** Una compañía de productos químicos está diseñando una planta que producirá dos tipos de polímeros, P_1 y P_2. La planta debe tener la capacidad de producir al menos 100 unidades de P_1 y 420 unidades de P_2 al día. Hay dos diseños posibles para la cámara de reacción básica que tiene que incluirse en la planta: cada cámara del tipo A tiene un costo de $600,000 con una capacidad de producción de 10 unidades de P_1 al día y 20 unidades de P_2 al día; el tipo B es un diseño más barato, pues tiene un costo de $300,000 y una capacidad de producción de 4 unidades de P_1 y 30 unidades de P_2 al día. Debido a los costos de operación es necesario tener al menos 4 cámaras de cada tipo en la planta. ¿Cuántas cámaras de cada tipo deberían incluirse para minimizar el costo de construcción y aún cumplir con el programa de producción requerida?

Solución La información dada se resume en la tabla 3.

Respuesta *a*) La recta DE se mueve hacia la derecha. Esto no afecta el vértice B, de modo que la solución óptima permanece sin cambio.
b) La recta AB se mueve hacia arriba. El vértice B se mueve hacia arriba y hacia la izquierda, de modo que el valor óptimo de x disminuirá y el de y aumentará. La utilidad aumentará.

TABLA 3

	P_1	P_2	Costo
Cámara A	10	20	6
Cámara B	4	30	3
Requerimientos	100	420	

(Los costos están dados en cientos de miles de dólares). Supongamos que el diseño incluye x cámaras del tipo A y y cámaras del tipo B. Entonces deben satisfacerse las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} &x \geq 4, \qquad y \geq 4 \\ &10x + \ \ 4y \geq 100 \quad \text{(producción de } P_1) \\ &20x + 30y \geq 420 \quad \text{(producción de } P_2) \end{aligned}$$

El costo total de las cámaras está dado por

$$Z = 6x + 3y$$

y Z debe minimizarse sujeta a las restricciones anteriores. La región factible (esto es, la región que satisface las restricciones) aparece sombreada en la figura 12. Observe que en este ejemplo dicha región no está acotada.

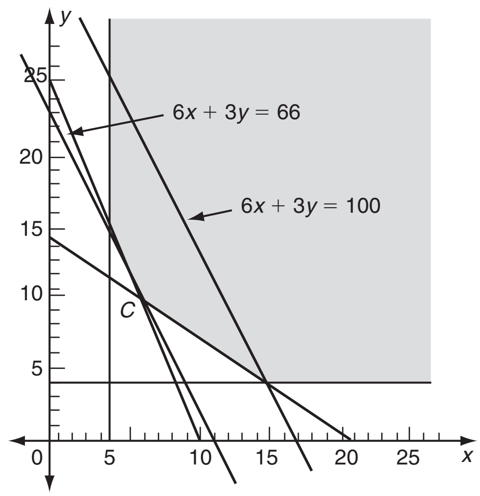


FIGURA 12

Las líneas de costo constante se obtienen haciendo Z igual a diferentes constantes. Dos de estas líneas se muestran en la figura. A medida que Z decrece, la línea correspondiente se acerca al origen, siempre manteniendo la misma pendiente; la línea de costo mínimo es la que pasa por el vértice C de la región factible.

En C tenemos las dos ecuaciones simultáneas

$$10x + 4y = 100 \quad \text{y} \quad 20x + 30y = 420$$

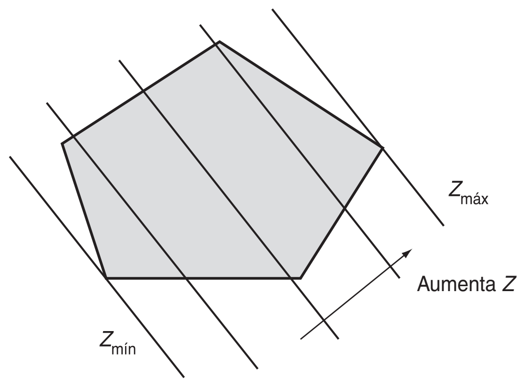
Su solución es $x = 6$ y $y = 10$. Por consiguiente, el diseño óptimo de la planta incluye 6 cámaras de reacción del tipo A y 10 del tipo B. El costo mínimo es

$$Z = 6x + 3y = 6(6) + 3(10) = 66$$

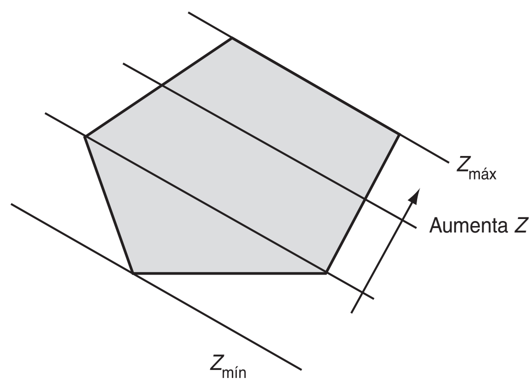
esto es \$6.6 millones.

Consideremos un problema de programación lineal general con dos variables x y y. La región factible, esto es, los puntos (x, y) que satisfacen el conjunto de desigualdades lineales dadas tendrá la forma de un polígono en el plano xy. La ecuación obtenida haciendo la función objetivo igual a una constante siempre representará una línea recta en el plano xy (por ejemplo, la línea de utilidad constante). Es intuitivamente evidente que el valor extremo (máximo o mínimo) de la función objetivo dentro de la región factible se obtendrá cuando esta línea recta pase por un vértice del polígono de factibilidad, puesto que al mover la línea recta en forma paralela a sí misma, en la dirección de crecimiento (o decrecimiento) de los valores de la función objetivo, el último punto de contacto con la región factible debe ocurrir en uno de los vértices.

Esto se ilustra en las partes *a*) y *b*) de la figura 13, en donde se advierte una serie de líneas con Z constante (Z denota a la función objetivo). A medida que Z crece, la línea se mueve a través de la región factible. Los valores más grandes y más pequeños de Z ocurren cuando las líneas hacen su primero y último contacto con la región factible.*



a)



b)

FIGURA 13

* Cuando la región factible no es acotada, Z podría no tener un valor máximo o mínimo finito.

En la parte *b*), las líneas con Z constante son paralelas a uno de los lados de la región factible. En este caso el valor más grande de Z ocurre cuando la línea con Z constante coincide con tal lado. Sin embargo, observe que aún es cierto que el valor máximo de Z ocurre cuando la línea pasa por un vértice del polígono de factibilidad. En realidad pasa por dos vértices.

Esto sugiere que en vez de usar una técnica gráfica de resolución de un problema de programación lineal, todo lo que necesitamos hacer es calcular el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible. El más grande de estos valores en los extremos dará el valor máximo de la función objetivo, y el más pequeño de ellos dará su valor mínimo. Este método de resolución de tales problemas es muy fácil de aplicar cuando sólo hay dos variables, si bien no tiene una ventaja computacional real sobre el método gráfico. Para más de dos variables, ninguno de estos métodos representa una herramienta práctica en optimización. Por fortuna, existe un método alterno denominado método símplex; dedicaremos el resto de este capítulo a su exposición.

EJERCICIOS 10-2

(1-8) Calcule el valor máximo de la función objetivo Z sujeta a las restricciones dadas.

1. $Z = 3x + 2y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 5$

2. $Z = 3x + 4y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + y \leq 3$

3. $Z = 3x + 2y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + y \leq 4$, $x + 2y \leq 5$

4. $Z = 2(x + y)$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $6x + 5y \leq 17$, $4x + 9y \leq 17$

5. $Z = 5x + y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + y \leq 7$, $x + y \leq 3$, $x + 2y \leq 5$

6. $Z = x + 3y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + 3y \leq 6$, $2x + y \leq 5$, $x + 4y \leq 6$

7. $Z = 2x - y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 4$, $y - x \geq 3$, $3x + y \geq 6$

8. $Z = x + 3y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq x + 1$ $x + y \geq 2$, $2y \geq x - 1$

(9-16) Determine los valores mínimos de la función objetivo Z sujeta a las restricciones dadas.

9. $Z = x + y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 3y \geq 6$, $2x + y \geq 7$

10. $Z = x + 2y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 5$, $x + 4y \geq 8$

11. $Z = x - 2y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq y + 1$, $x + y \geq 2$

12. $Z = x - 3y$; $0 \leq x \leq 3$, $y \geq 0$, $x + 2y \leq 6$, $x + y \geq 5$

13. $Z = x + 4y$; $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$, $5 \leq x + y \leq 7$

14. $Z = x - y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 4$, $x + 2y \leq 10$

15. $Z = x + 2y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + y \geq 7$, $2y - x \geq -1$, $2x - y \geq -3$

16. $Z = x + y$; $-\frac{1}{2} \leq y - x \leq 2$, $y + 2x \leq 8$, $y + 4x \geq 7$

17. *(Mezcla de whisky)* Una compañía destiladora tiene dos grados de whisky en bruto (sin mezclar), I y II, de los cuales produce dos marcas diferentes. La marca regular contiene 50% de cada uno de los grados I y II; mientras que la marca super consta de dos terceras partes del grado I y una tercera parte del grado II. La compañía dispone de 3000 galones del grado I y 2000 del grado II para mezcla. Cada galón de la marca regular produce una utilidad de \$5; mientras que cada galón del super produce una utilidad de \$6. ¿Cuántos galones de cada marca debería producir la compañía a fin de maximizar sus utilidades?

18. *(Mezclas)* Una compañía vende dos mezclas diferentes de nueces. La mezcla más barata contiene 80% de cacahuates y 20% de nueces; mientras que la más cara contiene 50% de cada tipo. Cada semana la compañía puede obtener hasta 1800 kilos de cacahuates y 1200 kilos de nueces de sus fuentes de suministros. ¿Cuántos kilos de cada mezcla deberían producir para maximizar las utilidades si las ganancias son de $10 por cada kilo de la mezcla más barata y de $15 por cada kilo de la mezcla más cara?

19. *(Decisiones sobre producción)* Una compañía produce dos productos, A y B. Cada unidad de A requiere 2 horas en una máquina y 5 en una segunda máquina. Cada unidad de B demanda 4 horas en la primera máquina y 3 en la segunda máquina. Se dispone de 100 a la semana en la primera máquina y de 110 en la segunda. Si la compañía obtiene una utilidad de $70 por cada unidad de A y $50 por cada unidad de B, ¿cuánto deberá de producirse de cada unidad con objeto de maximizar la utilidad total?

20. *(Decisiones sobre producción)* En el ejercicio 19, suponga que se recibe una orden por 16 unidades de A a la semana. Si la orden debe cumplirse, determine el nuevo valor de la utilidad máxima.

21. *(Decisiones sobre producción)* Un fabricante produce dos productos, A y B, cada uno de los cuales requiere tiempo en tres máquinas. Cada unidad de A demanda 2 horas en la primera máquina, 4 en la segunda y tres horas en la tercera. Los números correspondientes a cada unidad de B son 5, 1 y 2, respectivamente. La compañía obtiene utilidades de $250 y $300 por cada unidad de A y B, en ese orden. Si los números de horas disponibles en las máquinas al mes son 200, 240 y 190 en el caso de la primera, segunda y tercera máquinas, respectivamente, determine cuántas unidades de cada producto deben producirse para maximizar la utilidad total.

22. *(Decisiones sobre producción)* En el ejercicio 21, suponga que una repentina baja en la demanda del mercado del producto A obliga a la compañía a incrementar su precio. Si la utilidad por cada unidad de A se incrementa a $600, determine el nuevo programa de producción que maximice la utilidad total.

***23.** *(Decisiones sobre producción)* En el ejercicio 21, suponga que el fabricante se ve forzado por la competencia a reducir el margen de utilidad del producto B. ¿Cuánto puede bajar la utilidad por unidad de B antes de que el fabricante deba cambiar el programa de producción? (El programa de producción siempre debe elegirse de modo que maximice la utilidad total).

24. *(Decisiones sobre inversión)* Un gerente de finanzas tiene $1 millón de un fondo de pensiones, todo o parte del cual debe invertirse. El gerente tiene dos inversiones en mente, unos bonos conservadores que producen 6% anual y unos bonos hipotecarios más riesgoso que producen 10% anual. De acuerdo con las regulaciones del gobierno, no más del 25% de la cantidad invertida puede estar en bonos hipotecarios. Mas aún, lo mínimo que puede ponerse en bonos hipotecarios es de $100,000. Determine las cantidades de las dos inversiones que maximizarían la inversión total.

25. *(Decisiones sobre plantación de cultivos)* Un granjero tiene 100 acres en los cuales sembrar dos cultivos. El costo de plantar el primer cultivo es de $20 por acre y el del segundo es de $40 por acre y dispone de a lo más $3000 para cubrir el costo del sembrado. La recolección de cada acre del primer cultivo demanda de 5 horas-hombre y cada acre del segundo cultivo 20 horas-hombre. El granjero puede confiar en un total de 1350 horas-hombre destinadas a la recolección de los dos cultivos. Si la utilidad es de $100 por acre en el caso del primer cultivo y de $300 por acre para el segundo, determine la porción del terreno que deberá plantarse con cada cultivo para maximizar la utilidad total.

26. *(Decisiones sobre plantación de cultivos)* En el ejercicio 25, determine la porción del terreno que deberá plantarse con cada cultivo, si la utilidad por concepto del segundo cultivo sube a $450 por acre.

27. *(Planeación dietética)* La dietista de un hospital debe encontrar la combinación más barata de dos productos, A y B, que contienen al menos 0.5 miligramos de tiamina y al menos 600 calorías. Cada onza de A contiene 0.12 miligramos de tiamina y 100 calorías; mientras que cada onza de B contiene 0.08 miligramos de tiamina y 150 calorías. Si el costo de cada alimento es de $10 por onza, ¿cuántas onzas de cada uno deberán combinarse?

28. *(Purificación del mineral)* Una compañía posee dos minas, P y Q. Cada tonelada de mineral de la primera mina produce 50 libras de cobre, 4 de cinc y 1 de molibdeno. Cada tonelada de mineral procedente de Q produce 25 libras de cobre, 8 de cinc y 3 de molibdeno. La compañía debe producir al menos 87,500, 16,000 y 5000 libras a la semana de estos tres metales, respectivamente. Si tiene un costo de $50 por tonelada obtener mineral de P y $60 por tonelada extraerlo de la mina Q, ¿cuánto mineral deberá obtenerse de cada mina con objeto de cumplir los requerimientos de producción a un costo mínimo?

29. *(Costos de distribución)* Un fabricante de automóviles posee dos plantas localizadas en D y C con capacidades de 5000 y 4000 automóviles por día. Estas dos plantas surten a tres centros de distribución, O, E y N, que requieren de 3000, 4000 y 2000 automóviles por día, respectivamente. Los costos de enviar cada automóvil desde cada planta a cada centro de distribución están dados en la tabla 4. Denotemos con x y y los números de automóviles enviados al día desde la planta D a O y E, respectivamente; determine los valores de x y y que minimizan el costo total de fletes.

TABLA 4

	O	E	N
D	45	15	25
C	60	10	50

■ 10-3 TABLA SÍMPLEX

El método geométrico y el método de inspección de vértices llegan a ser imprácticos como métodos de solución de problemas de programación lineal, cuando el número de variables es mayor de dos, y en especial cuando el número de desigualdades es grande. En el caso de estos problemas más complejos, existe una alternativa, denominado el **método símplex**, que representa una manera natural y económica de calcular los extremos. Describiremos el método símplex en la sección 10-4; en esta sección, esbozaremos ciertas construcciones y operaciones que son básicas en el método.

Suponga que tenemos la desigualdad $x + 3y \leq 2$ que las dos variables x y y deben satisfacer. Podemos escribir la desigualdad en la forma

$$2 - x - 3y \geq 0$$

Si definimos una nueva variable t mediante la ecuación

$$t = 2 - x - 3y$$

entonces la desigualdad adopta la forma $t \geq 0$. De esta manera, la desigualdad original $x + 3y \leq 2$ es reemplazada por la ecuación y desigualdad siguientes:

$$x + 3y + t = 2, \quad t \geq 0$$

La variable t introducida en esta forma se denomina **variable de holgura**. La razón de este nombre es que t es igual a la cantidad por la cual $x + 3y$ es menor que 2, esto es, t mide el *grado de laxitud* de la desigualdad dada $x + 3y \leq 2$. Las variables originales en un problema de programación lineal, tal como x, y se denominan **variables estructurales** o **variables de decisión**.

La primera etapa al usar el método símplex es introducir variables de holgura, de modo que cada desigualdad en el problema se cambie a una igualdad de tal manera que todas las variables de holgura sean no negativas.

EJEMPLO 1 Suponga que un problema de programación lineal conduce al sistema de desigualdades

$$x \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 1.5, \quad 2x + 3y \leq 6, \quad x + y \leq 2.5$$

Introducimos las variables de holgura

$$t = 1.5 - y, \quad u = 6 - 2x - 3y, \quad v = 2.5 - x - y$$

Se sigue que las cinco variables (x, y, t, u y v) satisfacen las desigualdades

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad t \geq 0, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0$$

y las ecuaciones lineales

$$y + t = 1.5, \quad 2x + 3y + u = 6, \quad x + y + \upsilon = 2.5$$

☛ **10.** Introduzca variables de holgura para los siguientes conjuntos de desigualdades
a) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 3y \geq 3$, $2x + y \leq 2$
b) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y + z \leq 30$, $2x + 3y + 2z \leq 12$

Observe que en este ejemplo, el conjunto de desigualdades originales se reemplazó por tres ecuaciones lineales junto con la condición de que las cinco variables que aparecen en estas ecuaciones no sean negativas. Decimos que el problema de programación lineal se ha reducido a la **forma estándar**. En general un problema de programación lineal se dice que está en *forma estándar si consiste en encontrar el valor máximo de una función objetivo Z que es una función lineal en un número de variables tales como* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *en donde* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *no son negativas y satisfacen cierto número de desigualdades lineales.* ☛ **10**

Cuando un problema de programación lineal se cambia a su forma estándar, la solución permanece sin cambio. Esto es, los valores de las variables que optimizan la función objetivo para el nuevo problema son los mismos que optimizan la función objetivo en el problema original. (Por supuesto, el nuevo problema también tiene variables extra).

EJEMPLO 2 Reduzca el problema dado en el ejemplo 2 de la sección 10-2 a su forma estándar.

Solución El problema dado se refiere a un productor de fertilizantes que elabora x toneladas de fertilizante del tipo regular y y toneladas del tipo super. La función de utilidad $Z = 300x + 480y$ debe maximizarse sujeta a las siguientes condiciones:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 0.3x + 0.4y \leq 9$$
$$0.6x + 0.3y \leq 13.5, \quad 0.1x + 0.3y \leq 6, \quad x + y \leq 25$$

Definimos variables de holgura t, u, υ y w de tal manera que las últimas cuatro desigualdades se conviertan en igualdades:

$$\begin{aligned} 0.3x + 0.4y + t &= 9 \quad & 0.6x + 0.3y + u &= 13.5 \\ 0.1x + 0.3y + \upsilon &= 6 \quad & x + y + w &= 25 \end{aligned} \tag{1}$$

Así, el problema de programación lineal puede establecerse en la forma estándar de la siguiente manera: maximizar la función lineal

$$Z = 300x + 480y$$

en donde x, y, t, u, υ y w son las variables no negativas que satisfacen las ecuaciones (1).

Consideremos el significado de las variables de holgura en el contexto de este ejemplo. La elaboración de x toneladas de fertilizantes del tipo regular y de y toneladas del tipo super emplean $0.3x + 0.4y$ toneladas de nitratos. La condición $0.3x + 0.4y \leq 9$ establece que esta cantidad no puede exceder el suministro disponible de 9 toneladas. La variable de holgura $t = 9 - (0.3x + 0.4y)$ es igual a la cantidad de nitratos que sobran o están sin usar. La condición $t \geq 0$ tiene la interpretación simple de que la cantidad de nitratos sobrantes puede ser cero o positiva pero nunca negativa.

Respuesta *a*) $x + 3y + t = 3$, $2x + y + u = 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $t \geq 0$, $u \geq 0$
b) $x + y + z + t = 30$, $2x + 3y + 2z + u = 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $t \geq 0$, $u \geq 0$

De manera similar, las variables de holgura u y v representan, respectivamente, las cantidades de fosfatos y potasio sobrantes cuando se producen x toneladas de fertilizante del tipo regular y y toneladas del tipo super. La variable w representa la capacidad no utilizada de la planta, esto es, el número de toneladas de fertilizante adicionales que podrían producirse si la planta trabajara a toda su capacidad. Como mencionamos antes, las variables de holgura miden el grado de laxitud en las desigualdades correspondientes.

En los ejemplos estudiados hasta ahora, todas las desigualdades contenían el símbolo $\le$ (con excepción de aquellas que establecían que las variables x y y mismas no son negativas). La introducción de las variables de holgura también puede realizarse cuando ocurre el tipo de desigualdades $\ge$.

EJEMPLO 3 Defina variables de holgura en el sistema de desigualdades

$$x \ge 0, \qquad y \ge 0, \qquad 3 \le x + y \le 9, \qquad 2y - x \ge -6, \qquad y - x \le 6$$

Solución Definamos $t = x + y - 3$ y $u = 9 - x - y$. Así, la condición $3 \le x + y \le 9$ implica que $t \ge 0$ y $u \ge 0$.

En forma análoga, si definimos $v = 2y - x + 6$, la condición $2y - x \ge -6$ implica que $v \ge 0$. Por último, haciendo $w = 6 + x - y$, también tenemos que $w \ge 0$.

Se sigue que las seis variables x, y, t, u, v y w son no negativas y satisfacen las cuatro ecuaciones lineales siguientes.

$$x + y - t = 3 \qquad x + y + u = 9$$

$$x - 2y + v = 6 \qquad -x + y + w = 6$$

Obsérvese que las variables de holgura siempre se introducen en las desigualdades de modo tal que no sean negativas. *Esto se realiza definiendo cada variable de holgura como el lado de mayor valor de la desigualdad asociada menos el lado de menor valor.*

El número de variables de holgura que deben introducirse es igual al número de desigualdades en el problema original (sin contar las condiciones de que las variables de decisión deben ser no negativas). Por ejemplo, considere el sistema de desigualdades en el ejemplo 1 anterior. Existen dos variables de decisión x y y y tres desigualdades, además de las condiciones $x \ge 0$ y $y \ge 0$. Por consiguiente, es necesario introducir tres variables de holgura t, u y v, aumentando el número total de variables en el problema a $n + m = 2 + 3 = 5$. Todas estas cinco variables no pueden ser negativas y satisfacen las $m = 3$ ecuaciones lineales:

$$y + t = 1.5, \qquad 2x + 3y + u = 6, \qquad x + y + v = 2.5$$

La región factible de este problema aparece en la figura 14 en términos de las variables originales x y y. Sabemos que el valor óptimo de cualquier función objetivo lineal debe alcanzarse en uno (o más de uno) de los vértices de esta región. Pero en cada vértice, dos de las cinco variables del problema estándar siempre son cero: en O, $x = y = 0$; en A, $x = 0$ y $y = 1.5$ y así $t = 0$; en C, $x + y = 2.5$ y $2x + 3y = 6$ de modo que tanto u como v son cero; en D, $v = y = 0$ y en B, $t = u = 0$.

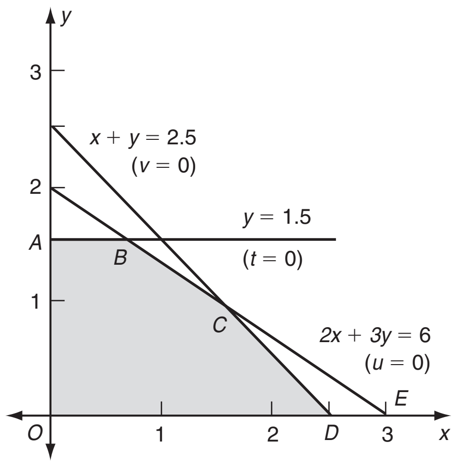


FIGURA 14

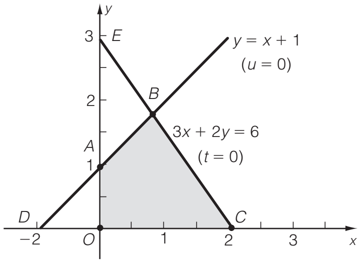
☛ **11.** Introduzca variables de holgura para el conjunto de desigualdades $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + 2y \leq 6$, $x - y \geq -1$. Dibuje la región factible y proporcione las parejas de variables que sean cero en cada vértice.

Concluimos que el valor óptimo de cualquier función objetivo para este ejemplo ocurre cuando dos de las cinco variables x, y, t, u y v son iguales a cero. ☛ **11**

Este resultado se generaliza. Suponga que tenemos un problema de programación lineal con n variables de decisión y m variables de holgura. El valor óptimo de cualquier función lineal objetivo se encuentra cuando n del conjunto total de $(n + m)$ variables son cero. Un punto en el que n variables son cero de llama **solución básica** y si este punto también es factible se denomina **solución básica factible** (SBF). Cada SBF corresponde a un vértice de la región factible, y la solución de cualquier problema de programación lineal se produce en uno (o más) de las SBF.

No podemos seleccionar de manera arbitraria las n variables para hacerlas iguales a cero, ya que algunas de estas elecciones no corresponderían a vértices de la región factible. Por ejemplo, en la figura 14, el punto E corresponde a $y = 0$, $u = 0$, pero éste no es una SBF ya que E se encuentra fuera de la región factible. (Es fácil ver que v es negativa en E: E tiene coordenadas (3, 0) y así $v = 2.5 - x - y = -0.5$). De manera análoga, el punto F, que corresponde a $t = v = 0$, no es una SBF ya que allí $u < 0$.

Respuesta $3x + 2y + t = 6$, $y - x + u = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $t \geq 0$, $u \geq 0$
O: $x = y = 0$; A: $x = u = 0$; B: $t = u = 0$; C: $t = y = 0$
Los puntos D: $u = y = 0$ y E: $t = x = 0$ no son vértices de la región factible.



La esencia del método símplex consiste en seleccionar primero una SBF particular como punto de inicio y entonces a partir de ahí transformar ésta a otra SBF, de tal manera que la función objetivo esté más cercana a ser óptima. Este proceso de transformación se denomina **pivoteo** y se continua hasta que la solución básica óptima se determina. El criterio utilizado para seleccionar el pivote particular será de hecho el tema de la siguiente sección. En esta sección, sólo analizaremos las transformaciones.

Consideremos un ejemplo elemental. Supongamos que hay dos variables, x y y, que satisfacen las restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + 3y \leq 12$ y $4x + y \leq 14$. Definiremos las variables de holgura t y u de modo que $t \geq 0$ y $u \geq 0$ y las desigualdades se transforman en

$$2x + 3y + t = 12$$

$$4x + y + u = 14$$

Estas ecuaciones pueden resumirse por medio de la siguiente matriz aumentada de coeficientes:

$$\begin{array}{c} \\ t \\ u \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & t & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 12 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 14 \end{array}\right] \end{array}$$

Esta matriz se denomina la **tabla símplex**.

Observe que las variables están listadas en la tabla arriba de la columna de coeficientes que corresponden a tal variable. Ciertas variables se listan en el lado izquierdo de la tabla, en este caso t y u. Supongamos que todas las variables excepto t y u se hacen iguales a cero (esto es, $x = 0$ y $y = 0$). Así, las dos ecuaciones se reducen a

$$2(0) + 3(0) + t = 12 \quad \text{y} \quad 4(0) + 0 + u = 14$$

o bien $t = 12$ y $u = 14$. Por tanto, los valores de t y u están dados por los elementos de la matriz aumentada situados en la última columna. Ésta es la razón de que t y u se coloquen próximos a los renglones correspondientes de la tabla.

Observando las columnas encabezadas por t y u en el cuadro anterior, advertimos que forman una matriz unitaria 2×2. Ésta es la razón de que los valores de t y u puedan extraerse directamente de la última columna cuando $x = y = 0$. Se dice que las variables t y u forman la **base** de esta solución factible. ☛ **12**

Al emplear el método símplex, nos movemos de una SBF a otra (esto es, de un vértice a otro) reemplazando las variables de la base, una a la vez por variables fuera a la base. La variable que se remueve de la base se denomina **variable de salida** y la variable que la reemplaza se denomina **variable de entrada**. Por ejemplo, podríamos cambiar de la base (t, u) de la tabla anterior a la base (y, u). Entonces, la variable de salida sería t y la variable de entrada sería y.

La figura 15 ilustra este ejemplo. La SBF con base (t, u) corresponde al vértice O y la SBF con base (y, u) corresponde al vértice A. Un pivote de una SFB a otra corresponde a movernos de O a A.

☛ **12.** Construya la tabla símplex para las restricciones
$x + y + z + t = 30$
$2x + 3y + 2z + u = 12$
$5y + 2z + v = 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
$z \geq 0$, $t \geq 0$, $u \geq 0$, $v \geq 0$

Respuesta

$$\begin{array}{c} \\ t \\ u \\ v \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & y & z & t & u & v \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 30 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \end{array}.$$

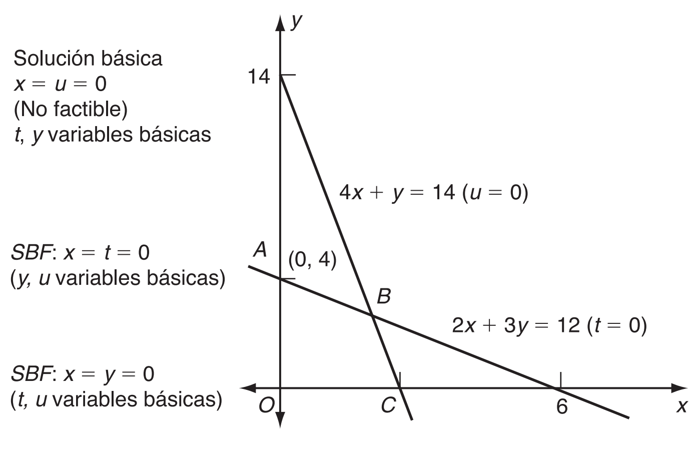


FIGURA 15

Cuando la base es (y, u), requerimos que los valores de y y u puedan obtenerse de la última columna de la tabla si $x = t = 0$. Esto significa que la tabla debe transformarse a la forma

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc|c} x & y & t & u & \end{array} \\ \begin{array}{c} y \\ u \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} — & 1 & — & 0 & — \\ — & 0 & — & 1 & — \end{array}\right] \end{array}$$

en donde los guiones indican elementos desconocidos. Esta transformación se logra por medio de operaciones elementales entre renglones. Por ejemplo, la operación $R_2 - \frac{1}{3}R_1$ (restar un tercio del primer renglón al segundo) cambia la tabla a

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 12 \\ \frac{10}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 10 \end{array}\right]$$

Esto coloca un cero en la columna y, como se requería. Dividiendo el primer renglón entre tres la tabla se reduce a la forma deseada.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc|c} x & y & t & u & \end{array} \\ \begin{array}{c} y \\ u \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 4 \\ \frac{10}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 10 \end{array}\right] \end{array}$$

A partir de esta tabla, concluimos que para la SBF en que $x = t = 0$, los valores de y y u son 4 y 10, respectivamente. Esta segunda tabla corresponde a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{3}x + y + \tfrac{1}{3}t &= 4 \\ \tfrac{10}{3}x - \tfrac{1}{3}t + u &= 10 \end{aligned}$$

de la que es fácil advertir que haciendo $x = t = 0$ obtenemos $y = 4$ y $u = 10$. Estos valores son positivos, demostrando que esta solución es factible. En general, *una tabla puede representar una solución factible sólo si todas las entradas en la columna final son no negativas.*

Continuemos este ejemplo y transformemos otra vez de la base (y, u) a la base (x, u). Entonces, la variable que sale es y y la variable que entra es x. Debemos transformar la columna de x a la forma que tiene actualmente la columna y, es decir, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Las operaciones de renglón apropiadas son $R_2 - 5R_1$ seguida por $\frac{3}{2}R_1$ y el resultado es la tabla siguiente

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc|c} x & y & t & u & \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ u \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 0 & -5 & -2 & 1 & -10 \end{array}\right] \end{array}$$

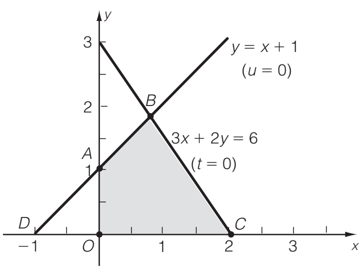
Esta tabla corresponde a los valores $y = t = 0$, $x = 6$, $u = -10$ y en la figura 15 corresponde al punto D. Este punto es una solución básica pero no es factible. Podemos decir esto de inmediato con base en la entrada negativa en la columna final de la tabla. ☛ **13**

☛ **13.** Construya la tabla símplex para las restricciones
$3x + 2y + t = 6$, $y - x + u = 1$,
$x \geq 0$, $y \geq 0$, $t \geq 0$, $u \geq 0$
Utilice operaciones por renglón para transformar de la base (t, u) a la base (x, u) y luego a la base (x, y). Dibuje la región factible e indique los vértices implicados.

Respuesta

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc|c} x & y & t & u & \end{array} \\ \begin{array}{c} t \\ u \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Éste corresponde al vértice O en la figura.



Primero t sale y x entra. Después de las operaciones $\frac{1}{3}R_1$, $R_2 + R_1$ obtenemos la tabla correspondiente al vértice C:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc|c} x & y & t & u & \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ u \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 3 \end{array}\right] \end{array}$$

Después u sale y entra y. Después de las operaciones $\frac{3}{5}R_2$, $R_1 - \frac{2}{3}R_2$ obtenemos la tabla correspondiente al vértice B:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc|c} x & y & t & u & \phantom{\frac{4}{5}} \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ u \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{9}{5} \end{array}\right] \end{array}$$

EJEMPLO 4 Un problema de programación lineal demanda encontrar el valor máximo de $Z = x + 4y + 2z$ cuando x, y y z son variables no negativas que satisfacen las restricciones

$$3x + y + 2z \leq 6 \quad \text{y} \quad 2x + 3y + z \leq 6$$

Definimos las variables de holgura no negativas t y u de modo que

$$\begin{aligned} 3x + y + 2z + t \phantom{{}+u} &= 6 \\ 2x + 3y + z \phantom{{}+t} + u &= 6 \end{aligned}$$

La tabla símplex tiene entonces la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} \\ t \\ u \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \end{array}$$

Transformemos esta tabla a una en la cual t y y formen la base. Esto significa que u será la variable de salida y y la variable de entrada, de modo que debemos realizar operaciones entre renglones de tal manera que cambiemos la segunda columna a

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La operación $R_1 - \frac{1}{3}R_2$ (restar un tercio del segundo renglón al primero) da

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \frac{7}{3} & 0 & \frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

y así la operación $\frac{1}{3}R_2$ (dividir el segundo renglón entre 3) da la forma requerida.

$$\begin{array}{c} \\ t \\ y \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} \frac{7}{3} & 0 & \frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 4 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 2 \end{array}\right] \end{array}$$

De esto, concluimos que la solución factible básica tal que $x = z = u = 0$ tiene los valores $t = 4$ y $y = 2$ para estas variables.

Los ejemplos anteriores contienen tablas con dos renglones. El número de renglones en una tabla es igual al número de variables de holgura, las cuales a su vez son iguales al número de desigualdades en el problema original (no contando aquéllas del tipo $x \geq 0$).

EJEMPLO 5 En el ejemplo 2 de esta sección, consideramos el problema de maximizar la función $Z = 300x + 480y$, en donde las variables no negativas x, y, t, u, v y w satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl}
0.3x + 0.4y + t & & = 9 \\
0.6x + 0.3y \quad + u & & = 13.5 \\
0.1x + 0.3y \qquad + v & & = 6 \\
x + \quad y \qquad\qquad + w & & = 25
\end{array}$$

Escriba la tabla símplex de este problema. Transfórmelo a la base (*t, u, y, w*) y luego a la base (*x, u, y, w*).

Solución La tabla es la siguiente:

$$\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{cccccccc} x & y & t & u & v & w & & \end{array} \\
\begin{array}{r} t \\ \to u \\ v \\ w \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc|c} 0.3 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0.6 & 0.3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 13.5 \\ 0.1 & 0.3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 25 \end{array}\right]
\end{array}$$

En la primera transformación, v es la variable de salida y y es la variable de entrada, como se indica por las dos flechas. Esto quiere decir que la segunda columna de la tabla debe transformarse a la forma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por medio de operaciones elementales entre renglones. Esto se logra por la sucesión de operaciones $R_1 - \frac{4}{3}R_3$, $R_2 - R_3$, $R_4 - \frac{10}{3}R_3$ y $\frac{10}{3}R_3$. El resultado es la siguiente tabla:

$$\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{cccccccc} x & y & t & u & v & w & & \end{array} \\
\begin{array}{r} \to t \\ u \\ y \\ w \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc|c} \frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{15}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & \frac{10}{3} & 0 & 20 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} & 1 & 5 \end{array}\right] \\
 & \begin{array}{l} \uparrow \end{array}
\end{array}$$

De la última columna, advertimos que en la SBF para la cual $x = v = 0$, las otras variables son $t = 1$, $u = \frac{15}{2}$, $y = 20$ y $w = 5$.

En la figura 10 se aprecia la región factible de este ejemplo. La primera tabla corresponde al vértice O ($x = y = 0$); mientras que la segunda tabla corresponde a A ($x = v = 0$).

En la etapa siguiente, nos movemos a la base (*x, u, y, w*), que corresponde a $B(t = v = 0)$. En esta etapa, x es la variable de entrada y t la variable de salida. La sucesión de operaciones $R_2 - 3R_1$, $R_3 - 2R_1$, $R_4 - 4R_1$ y $6R_1$ da por resultado la siguiente tabla:

$$\begin{array}{c} \\ t \\ u \\ y \\ w \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc|c} x & y & t & u & v & w & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 6 & 0 & -8 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 3 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 6 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

De nuevo advertimos que para la solución básica factible $t = v = 0$, $x = 6$, $u = \frac{9}{2}$, $y = 18$ y $w = 1$. (Esta solución básica factible es, en realidad, la óptima de este problema).

EJERCICIOS 10-3

(1-12) Defina las variables de holgura y determine la tabla símplex en los ejercicios 1-6, 17-21 y 25 de la sección 10-2.

(13-14) Defina las variables de holgura y determine la tabla símplex en cada uno de los siguientes problemas.

13. Maximice $Z = x + 3y + 2z$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $2x + y + z \leq 5$, $x + 2y + z \leq 4$

14. Maximice $Z = x + y + z$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $4x + 2y + z \leq 11$, $2x + 2y + 3z \leq 15$, $x + 2y + 2z \leq 11$

(15-22) Para cada una de las tablas símplex dadas abajo, efectúe las operaciones entre renglones apropiadas para realizar el cambio de base indicado. En cada caso decida si la nueva base da una solución factible. En los ejercicios 15, 16 y 19-22, ilustre el cambio de base con un diagrama en que aparezca el cambio de vértice correspondiente de la región factible.

15.
$$\begin{array}{c} \\ t \\ u \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x & y & t & u & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 8 \\ 7 & 6 & 0 & 1 & 19 \end{array}\right] \end{array} \quad (t, u) \to (y, u) \to (y, x)$$

16.
$$\begin{array}{c} \\ s \\ t \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x & y & s & t & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 10 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right] \end{array} \quad (s, t) \to (s, x) \to (y, x)$$

17.
$$\begin{array}{c} \\ t \\ u \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} x & y & z & t & u & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 16 \end{array}\right] \end{array} \quad (t, u) \to (y, u) \to (y, x)$$

18.
$$\begin{array}{c} \\ t \\ u \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} x & y & z & t & u & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right] \end{array} \quad (t, u) \to (y, u) \to (y, z)$$

19.
$$\begin{array}{c} \\ s \\ t \\ u \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} x & y & s & t & u & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 & 17 \\ 4 & 9 & 0 & 1 & 0 & 17 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \end{array}$$

$(s, t, u) \to (s, x, u) \to (s, y, x) \to (u, x, y)$

20.
$$\begin{array}{c} \\ s \\ t \\ u \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} x & y & s & t & u & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 17 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right] \end{array}$$

$(s, t, u) \to (y, t, u) \to (y, x, u)$

21.
$$\begin{array}{c} \\ p \\ q \\ r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} x & y & p & q & r & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \end{array}$$

$(p, q, r) \to (x, q, r) \to (x, y, r) \to (x, y, q)$

22.
$$\begin{array}{c} \\ p \\ q \\ r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} x & y & p & q & r & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right] \end{array}$$

$(p, q, r) \to (p, y, r) \to (p, y, x) \to (q, y, x)$

■ 10-4 MÉTODO SÍMPLEX

El procedimiento usado en el método símplex consiste en continuar efectuando cambios en las variables básicas del tipo analizado en la última sección, hasta que se obtenga el conjunto de variables que optimizan la función objetivo. Cada cambio de variables se realiza de tal manera que mejore el valor de la función objetivo.

Consideremos el método con respecto a un ejemplo particular. Supongamos que deseamos maximizar $Z = 2x + 3y$ sujeta a las restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 4y \leq 9$ y $2x + y \leq 4$. Como de costumbre, definimos las variables de holgura t y u por

$$x + 4y + t = 9, \qquad 2x + y + u = 4 \tag{1}$$

en donde las cuatro variables x, y, t y u son no negativas. La tabla símplex es

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x & y & t & u \end{array} \\ \begin{array}{c} t \\ u \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & Z \end{array}\right] \end{array}.$$

Observe que ahora agregamos otro renglón a la tabla que contiene los coeficientes de la función objetivo

$$2x + 3y + 0 \cdot t + 0 \cdot u = Z$$

Empezamos con la SBF en la cual $x = y = 0$. En el caso de esta solución, $t = 9$ y $u = 4$. La función objetivo tiene el valor cero para esta SBF. Nuestro propósito es reemplazar una de las variables t o u con x o y en tal forma que Z se incremente. Observando en el último renglón de la tabla, advertimos que si x se incrementa en 1, Z se incrementa en 2; mientras que si y se incrementa en 1, Z se incrementa en 3. Esto es, cualquier incremento en y tiene un efecto mayor en Z que el mismo incremento en x. Por tanto, parece razonable considerar y como la variable de entrada al formar la nueva base.

Los elementos del renglón inferior de la tabla se denominan los **indicadores**. En cada etapa del proceso símplex, la *variable de entrada es la que tiene el indicador positivo más grande.* (Si el indicador más grande ocurre dos veces, lo elegimos arbitrariamente entre las dos variables).

Enseguida debemos decidir si consideramos a t o a u como la variable de salida. Consideremos estas dos posibilidades una por una.

Variable de salida *t*: En este caso, la base constará de (y, u), ya que y entra y t sale. La SFB para esta base se obtiene haciendo $x = t = 0$. De las ecuaciones (1), tenemos que $0 + 4y + 0 = 9$ y $2(0) + y + u = 4$. Así, $y = \frac{9}{4}$ y $u = 4 - y = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$. Esta solución es aceptable puesto que tanto y como u son positivas.

Variable de salida *u*: Ahora, la base consta de (t, y) y las SBF corresponde a hacer $x = u = 0$. De las ecuaciones (1), tenemos que $0 + 4y + t = 9$ y $2(0) + y + 0 = 4$. Por consiguiente, $y = 4$ y $t = 9 - 4y = 9 - (4)4 = -7$.

La segunda solución no es aceptable porque t es negativa. Se sigue, por tanto, que t debe ser la variable de salida.

Este método de decidir la variable de salida puede abreviarse de manera sustancial. Supongamos que la tabla tiene la forma general

$$\begin{array}{c} \\ t \\ u \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & t & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} p_1 & q_1 & 1 & 0 & b_1 \\ p_2 & q_2 & 0 & 1 & b_2 \end{array}\right] \end{array}$$

en donde p_i, q_i y b_i denotan los elementos indicados en la tabla. Las ecuaciones correspondientes serían

$$\begin{aligned} p_1x + q_1y + t \quad\quad &= b_1 \\ p_2x + q_2y \quad\quad + u &= b_2 \end{aligned} \tag{2}$$

Supongamos que ya hemos decidido que y es la variable de entrada y consideremos las posibilidades de que t o u sean la variable de salida.

Variable de salida t: En este caso, la base consta de (y, u). La SBF se obtiene haciendo $x = t = 0$, en cuyo caso las ecuaciones (2) dan

$$q_1y = b_1 \quad \text{y} \quad q_2y + u = b_2$$

Por consiguiente,

$$y = \frac{b_1}{q_1} \quad \text{y} \quad u = b_2 - q_2y = b_2 - q_2\frac{b_1}{q_1}$$

Puesto que y y u no deben ser negativas si ésta ha de ser una solución factible, requerimos que

$$\frac{b_1}{q_1} \geq 0 \quad \text{y} \quad b_2 - q_2\frac{b_1}{q_1} \geq 0$$

Dado que b_1 no es negativa (los elementos de la última columna nunca deben ser negativos), la primera condición se cumple siempre que $q_1 > 0$. Ahora q_1 es el elemento de la tabla que está situado en el renglón de la variable de salida t y la columna de la variable de entrada y. Se conoce como el **elemento pivote** de este cambio de base. Concluimos que en cualquier cambio de base en las variables el *elemento pivote debe ser positivo.*

La segunda de las condiciones automáticamente se satisfará si $q_2 \leq 0$, dado que entonces el término $q_2(b_1/q_1)$ será negativo o cero. (Nótese que $b_2 \geq 0$). Si $q_2 > 0$, esta segunda condición puede escribir como $b_2 \geq q_2(b_1/q_1)$ o

$$\frac{b_2}{q_2} \geq \frac{b_1}{q_1}$$

Variable de salida *u*: Mediante un análisis similar, concluimos que una SBF válida se obtendrá con la base (t, y) con tal de que el elemento pivote $q_2 > 0$ y a condición de que $q_1 \leq 0$ o si $q_1 > 0$, entonces $(b_1/q_1) \geq (b_2/q_2)$.

Observe que las razones b_1/q_1 y b_2/q_2 se obtienen dividiendo el elemento de la última columna de la tabla entre el elemento correspondiente de la columna de la variable de entrada. (Véase la figura 16). Así, podemos resumir:*

Si $q_1 > 0$ y $q_2 \leq 0$, t es la variable de salida.
Si $q_2 > 0$ y $q_1 \leq 0$, u es la variable de salida.

Si tanto $q_1 > 0$ como $q_2 > 0$,
t es la variable de salida si $b_1/q_1 \leq b_2/q_2$, y
u es la variable de salida si $b_2/q_2 \leq b_1/q_1$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
& \begin{array}{cccc} x & y & t & u \end{array} \\
\begin{array}{c} t \\ u \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} p_1 & q_1 & 1 & 0 & b_1 \\ p_2 & q_2 & 0 & 1 & b_2 \end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} b_1/q_1 \\ b_2/q_2 \end{array} \\
\uparrow \\
\text{Variable de entrada}
\end{array}
$$

FIGURA 16

Así que *la variable de salida es aquella cuyo renglón en la tabla corresponde a la razón no negativa más pequeña* b_i/q_i.

Volvamos al ejemplo anterior. Los primeros dos renglones de la tabla aparecen en la figura 17. Puesto que y ha de ser la variable de entrada, dividimos cada elemento de la última columna entre el elemento correspondiente de la columna encabezada por y. Las razones están dadas a la derecha de la tabla. Ambas razones son positivas y la más pequeña es $9 \div 4 = 2.25$, que pertenece al renglón t de la tabla. Así, debemos tener que t es la variable de salida y el elemento pivote es 4.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
& \begin{array}{cccc} x & y & t & u \end{array} \\
\begin{array}{c} t \\ u \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} 9 \div 4 = 2.25 \\ 4 \div 1 = 4 \end{array} \\
\uparrow \\
\text{Variable de entrada}
\end{array}
$$

FIGURA 17

---

*Si tanto $q_1 \leq 0$ como $q_2 \leq 0$, entonces el problema no está acotado (esto es, Z no tiene un valor máximo finito).

Entonces, las dos operaciones por renglón $R_2 - \frac{1}{4}R_1$ y $\frac{1}{4}R_1$ reducen la tabla a la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} \\ y \\ u \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x & y & t & u & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{9}{4} \\ \frac{7}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{7}{4} \\ 2 & 3 & 0 & 0 & Z \end{array}\right] \end{array}$$

☛ **14.** Para el siguiente problema de programación lineal, escriba la tabla inicial y realice el primer pivoteo.
Maximizar $Z = x + 2y$, sujeta a $x + y \leq 2$, $2x + y \leq 3$, $x, y \geq 0$

En esta forma, los valores de las variables básicas y y u pueden localizarse directamente en la última columna para la SBF en que $x = t = 0$. ☛ **14**

Observemos que Z aún está expresada en términos de x y y. Nos gustaría expresarla en términos de x y t de modo que cuando x y t se hagan iguales a cero, el valor de Z pueda leerse de inmediato en la tabla. Podemos hacer esto mediante la operación $R_3 - 3R_1$.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & x & y & t & u & \\ \hline y & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{9}{4} \\ u & \frac{7}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{7}{4} \\ & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & Z - \frac{27}{4} \end{array}$$

El último renglón de esta nueva tabla es equivalente a la ecuación

$$Z - \frac{27}{4} = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}t \tag{3}$$

Cuando $x = t = 0$, ésta se convierte en $Z - \frac{27}{4} = 0$ o $Z = \frac{27}{4}$. En consecuencia, para la solución factible básica en que $x = t = 0$, la función objetivo tiene el valor $\frac{27}{4}$. Es evidente que esto representa una mejora con respecto al valor previo de cero.

En la ecuación (3), observamos que si t se hace positiva, Z en realidad decrecería. El indicador correspondiente (es decir $-\frac{3}{4}$) es negativo. Por tanto, no debemos permitir que t entre a la base. El indicador positivo más grande (de hecho, el único indicador positivo) es $\frac{5}{4}$, que pertenece a x, de modo que x será la variable de entrada en la etapa siguiente del proceso símplex.

Con objeto de determinar la variable de salida, de nuevo dividimos la última columna entre los elementos correspondientes de la columna encabezada por la variable de entrada. Los resultados están dados en la figura 18. El más pequeño de estos cocientes es 1, que proviene del renglón u, de modo que u será la variable de salida.

Respuesta

$$\begin{array}{c|cccc|c} & x & y & t & u & \\ \hline t & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ u & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ & 1 & 2 & 0 & 0 & Z \end{array}$$

y entra (mayor indicador) y t sale (cociente 2/1, más pequeño que 3/1). Después de las operaciones por renglón $R_2 - R_1$, $R_3 - 2R_1$, obtenemos

$$\begin{array}{c|cccc|c} & x & y & t & u & \\ \hline t & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ u & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ & -1 & 0 & -2 & 0 & Z - 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc|c|l} & x & y & t & u & & \\ \hline y & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{9}{4} & (\frac{9}{4}) \div (\frac{9}{4}) = 9 \\ u & \frac{7}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{7}{4} & (\frac{7}{4}) \div (\frac{7}{4}) = 1 \end{array}$$

Variable de salida → u

↑ Variable de entrada (x)

FIGURA 18

La sucesión de operaciones entre renglones $R_1 - \frac{1}{7}R_2$, $R_3 - \frac{5}{7}R_2$ y $\frac{4}{7}R_2$ reducen la tabla a

$$\begin{array}{c} \\ y \\ x \\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x & y & t & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 2 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{7} & -\frac{5}{7} & Z-8 \end{array}\right]\end{array}$$

La SBF para esta tabla corresponde a $t = u = 0$. Observe que el último renglón de la tabla corresponde a la ecuación

$$Z - 8 = -\tfrac{4}{7}t - \tfrac{5}{7}u$$

de modo que cuando t y u son cero, el valor de Z puede determinarse de inmediato: $Z - 8 = 0$ o $Z = 8$. Los valores correspondientes de x y y pueden localizarse en la última columna $y = 2$ y $x = 1$.

Todos los indicadores son ahora negativos. Esto significa que si alguna de las variables t o u hubiera dado un valor positivo, Z decrecería. Así que el valor máximo de Z se obtiene haciendo $t = u = 0$, esto es, tomando la SBF en que $x = 1$ y $y = 2$. En general, el *procedimiento símplex debe detenerse cuando no quedan indicadores positivos.*

EJEMPLO 1 ***(Decisiones sobre producción)*** Una compañía produce dos tipos de calculadoras electrónicas, un modelo estándar, cuya utilidad es de \$5 y un modelo de lujo, cuya utilidad es de \$8. La compañía estima que su red de distribuidores a lo más puede manejar 1000 calculadoras a la semana. Debido al rápido crecimiento de la industria de las calculadoras, existe una disminución tanto en las partes como en la mano de obra calificada necesaria para ensamblar las calculadoras. La compañía puede obtener un suministro semanal regular de sólo 5000 circuitos electrónicos (chips) necesarios para las calculadoras; cada calculadora regular necesita 3 de estos chips y cada calculadora de lujo requiere 6. Mas aún, la compañía sólo dispone de 2500 horas-hombre de mano de obra calificada a la semana; cada calculadora regular demanda 3 horas-hombre y cada calculadora de lujo necesita 2. ¿Cuántas calculadoras de cada tipo deberían producirse a la semana con la finalidad de maximizar la utilidad total?

Solución Denotemos con x el número de calculadoras regulares y con y el número de calculadoras de lujo producidas cada semana. Esto requiere de $3x + 6y$ chips y de $3x + 2y$ horas-hombre de mano de obra. Así que, x y y deben satisfacer las restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1000$, $3x + 6y \leq 5000$ y $3x + 2y \leq 2500$. La utilidad semanal es

$$Z = 5x + 8y$$

Definiendo las variables de holgura t, u y v, las restricciones pueden escribirse en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x + y + t \phantom{{}+u+v} &= 1000 \\ 3x + 6y \phantom{{}+t} + u \phantom{{}+v} &= 5000 \\ 3x + 2y \phantom{{}+t+u} + v &= 2500 \end{aligned}$$

en donde x, y, t, u y v son mayores o iguales que cero. Así, tenemos la tabla símplex que aparece enseguida.

☛ **15.** Resuelva el siguiente problema de programación lineal: Maximizar $Z = x + 2y$ sujeta a $x + y \leq 4$, $x + 5y \leq 8$, $x, y \geq 0$

$$\begin{array}{rl} & \begin{array}{ccccc} x & y & t & u & v \end{array} \\ \begin{array}{r} t \\ \rightarrow u \\ v \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1000 \\ 3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 5000 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2500 \\ 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & Z \end{array}\right] \begin{array}{l} 1000 \div 1 = 1000 \\ 5000 \div 6 = 833.3 \\ 2500 \div 2 = 1250 \\ \end{array} \\ & \begin{array}{ccccc} & \uparrow & & & \end{array} \end{array}$$

El más grande de los indicadores es 8, en la columna y, de modo que y se convierte en la variable de entrada. Con el propósito de decidir sobre la variable de salida, consideramos las razones de los elementos de la última columna a los que aparecen en la columna y: la más pequeña de estas razones, $5000 \div 6$, ocurre en el renglón u, por lo que u es la variable de salida.

Debemos en consecuencia transformar la columna y a la forma

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

dejando intactas las columnas t y v. La sucesión de operaciones entre renglones $R_1 - \frac{1}{6} R_2$, $R_3 - \frac{1}{3} R_2$, $R_4 - \frac{4}{3} R_2$ y $\frac{1}{6} R_2$ logra esto:

$$\begin{array}{rl} & \begin{array}{ccccc} x & y & t & u & v \end{array} \\ \begin{array}{r} \rightarrow t \\ y \\ v \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc|c} \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{500}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2500}{3} \\ 2 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{2500}{3} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & Z - \frac{20{,}000}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{500}{3} \div \frac{1}{2} \approx 333 \\ \frac{2500}{3} \div \frac{1}{2} \approx 1667 \\ \frac{2500}{3} \div 2 \approx 417 \\ \end{array} \\ & \begin{array}{ccccc} \uparrow & & & & \end{array} \end{array}$$

El indicador positivo más grande ahora es 1, en la columna x, de modo que x es la variable de entrada en la siguiente etapa. Calculando las razones que involucran la última columna y la columna x, encontramos que la razón más pequeña ocurre en el renglón t, de modo que t es la variable de salida. Por consiguiente, efectuamos las operaciones entre renglones $R_2 - R_1$, $R_3 - 4R_1$, $R_4 - 2R_1$ y $2R_1$.

$$\begin{array}{rl} & \begin{array}{ccccc} x & y & t & u & v \end{array} \\ \begin{array}{r} x \\ y \\ v \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1000}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2000}{3} \\ 0 & 0 & -4 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{500}{3} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & Z - 7000 \end{array}\right] \end{array}$$

En esta etapa, todos los indicadores son negativos o cero, de modo que no podemos mejorar el valor de Z por algún otro cambio de base. El valor óptimo de Z es 7000, que se alcanza tomando $x = \frac{1000}{3}$ y $y = \frac{2000}{3}$. Así que la compañía deberá producir 333 calculadoras regulares y 667 de lujo a la semana. ☛ **15**

Respuesta

$$\begin{array}{rl} & \begin{array}{cccc} x & y & t & u \end{array} \\ \begin{array}{r} t \\ u \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & Z \end{array}\right] \begin{array}{l} 4/1 \\ 8/5 \leftarrow \\ \end{array} \\ & \begin{array}{cccc} & \uparrow & & \end{array} \end{array}$$

y entra y sale u:

$$\begin{array}{rl} & \begin{array}{cccc} x & y & t & u \end{array} \\ \begin{array}{r} t \\ y \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{4}{5} & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{12}{5} \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & Z - \frac{16}{5} \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{12}{5}\Big/\frac{4}{5} = 3 \leftarrow \\ \frac{8}{5}\Big/\frac{1}{5} = 8 \\ \end{array} \\ & \begin{array}{cccc} \uparrow & & & \end{array} \end{array}$$

Ahora x entra y sale t:

$$\begin{array}{rl} & \begin{array}{cccc} x & y & t & u \end{array} \\ \begin{array}{r} x \\ u \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & Z - 5 \end{array}\right] \end{array}$$

Entonces, la solución óptima es $x = 3$, $y = 1$, $Z_{\text{máx}} = 5$

El método símplex puede resumirse por la sucesión de los siguientes pasos:

Paso 1 Definimos las variables de holgura no negativas que transformen las desigualdades en ecuaciones.

Paso 2 Construimos la tabla símplex.

Paso 3 Seleccionamos la variable de entrada con base en el indicador positivo más grande.

Paso 4 Calculamos las razones de los elementos de la última columna de la tabla a los elementos de la columna de la variable de entrada. El cociente no negativo más pequeño determina la variable de salida.

Paso 5 Efectuamos operaciones entre renglones de la tabla para transformar la columna encabezada por la variable de entrada a la forma que la columna de la variable de salida tenía antes. Esto debe realizarse sin alterar las columnas encabezadas por las otras variables básicas.

Paso 6 Repetimos los pasos 3, 4 y 5 hasta que ninguno de los indicadores sea positivo. El valor máximo de la función objetivo estará dado entonces por el elemento inferior izquierdo de la tabla.

El método símplex puede aplicarse a problemas que incluyan más de dos variables y cualquier número de desigualdades. Cuando estos números son grandes, es necesario utilizar una computadora con el objetivo de realizar los cálculos; pero las operaciones correspondientes a problemas con tres variables pueden por lo general realizarse a mano sin demasiada dificultad.

EJEMPLO 2 Utilice el método símplex con el propósito de determinar el valor máximo de la función objetivo $Z = 4x + y + 3z$, en donde x, y y z son variables no negativas que satisfacen las restricciones $x + y + z \leq 4$, $3x + y + 2z \leq 7$ y $x + 2y + 4z \leq 9$.

Solución Definimos t, u y v como las variables de holgura no negativas tales que

$$\begin{aligned}
x + y + z + t \qquad\qquad &= 4 \\
3x + y + 2z \quad + u \qquad &= 7 \\
x + 2y + 4z \qquad\quad + v &= 9
\end{aligned}$$

La tabla símplex aparece abajo. El indicador más grande es 4, que pertenece a la columna x, de modo que x se convierte en la variable de entrada. Los cocientes de los elementos de la última columna entre los correspondientes elementos de la columna x están calculados a la derecha. El cociente más pequeño pertenece al renglón u, por lo que u debe ser la variable de salida.

$$\begin{array}{rcl}
 & \begin{array}{cccccccc} x & y & t & u & v & & & \end{array} & \\
\begin{array}{r} t \\ \text{Variable de salida} \rightarrow u \\ v \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc|c} 1&1&1&1&0&0&4\\ 3&1&2&0&1&0&7\\ 1&2&4&0&0&1&9\\ 4&1&3&0&0&0&Z \end{array}\right] & \begin{array}{l} 4 \div 1 = 4 \\ 7 \div 3 = 2.33 \\ 9 \div 1 = 9 \\ \end{array} \\
 & \uparrow & \\
 & \text{Variable} &
\end{array}$$

De esta manera, las operaciones entre renglones $R_1 - \frac{1}{3}R_2$, $R_3 - \frac{1}{3}R_2$, $R_4 - \frac{4}{3}R_2$ y $\frac{1}{3}R_2$ reducen la tabla a la siguiente forma:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} x & y & z & t & u & v \end{array} \\
\begin{array}{r} t \\ x \\ \textit{Variable de salida} \rightarrow v \\ \\ \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccc|c}
0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\
1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\
0 & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{20}{3} \\
0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & Z - \frac{28}{3}
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\frac{5}{3} \div \frac{1}{2} = 5 \\
\frac{7}{3} \div \frac{1}{2} = 3.5 \\
\frac{20}{3} \div \frac{20}{3} = 2 \\
\\
\end{array}
\end{array}
$$

$$\uparrow \text{ Variable de entrada (columna } z\text{)}$$

El único indicador positivo pertenece ahora a z, de modo que esta variable entra a la base. De acuerdo con los cocientes calculados a la derecha, v es la variable de salida. Efectuamos la sucesión de operaciones $R_1 - \frac{1}{10}R_3$, $R_2 - \frac{1}{5}R_3$, $R_4 - \frac{1}{10}R_3$ y $\frac{3}{10}R_3$. El resultado es el siguiente:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} x & y & z & t & u & v \end{array} \\
\begin{array}{c} t \\ x \\ z \\ \\ \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccc|c}
0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\
0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 2 \\
0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{13}{10} & -\frac{1}{10} & Z - 10
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Todos los indicadores son ahora negativos, lo cual indica que el valor máximo de Z se alcanzó en la correspondiente SBF. Ésta está dada por $y = u = v = 0$ y los valores de t, x y z pueden leerse en la última columna. Éstos son $t = 1$, $x = 1$ y $z = 2$. Por consiguiente, el valor máximo de Z es 10 y se alcanza cuando $x = 1$, $y = 0$ y $z = 2$.

Hemos descrito el método símplex en el caso de un problema de maximización. La manera más fácil de usarlo al resolver un problema de *minimización* es convertir el problema dado en uno que requiera maximización. Por ejemplo, supongamos que deseamos encontrar los valores de x y y sujetos a ciertas restricciones que minimizan un costo C dado por $C = 2x + 6y + 3$. Definamos entonces $Z = -2x - 6y$, de modo que $C = 3 - Z$. Se sigue que cuando C alcanza su valor mínimo, Z debe tener un máximo. Podemos de esta manera reemplazar el objetivo en el problema dado por el nuevo objetivo: maximizar $Z = -2x - 6y$. Las restricciones permanecen sin cambio y podemos aplicar el método símplex tal como se describió antes, porque tenemos ahora un problema de maximización.

En nuestros ejemplos del método símplex, empezamos con una SBF en la cual las variables de holgura forman la base y todas las variables originales son cero. Sin embargo, algunas veces tal solución no es factible y el procedimiento debe modificarse. No entraremos en los detalles en cuanto a la resolución de esta dificultad, pero el siguiente ejemplo indicará las ideas principales implicadas.

EJEMPLO 3 Minimice $C = 10 + x - 2y$ sujeta a las restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 5$ y $2x + y \geq 6$.

Solución Primero defina $Z = -x + 2y$. Entonces, $C = 10 - Z$, y debemos maximizar Z, que será equivalente a minimizar C.

Introduciendo variables de holgura en la manera usual, el problema de programación lineal se transforma, en la forma estándar,

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & Z = -x + 2y \\ \text{Sujeta a} & x + y + t = 5, \quad 2x + y - u = 6, \quad x, y, t, u \geq 0 \end{array}$$

Ahora intentamos encontrar una SBF haciendo $x = y = 0$, para iniciar el método símplex. Obtenemos $t = 5$ y $u = -6$, y ésta no es factible ya que $u < 0$.

Es posible salvar esta dificultad por medio de la sencilla estrategia de introducir otra variable v, denominada **variable artificial**, en la segunda restricción de modo que las restricciones se transforman en

$$x + y + t = 5, \quad 2x + y - u + v = 6, \quad x, y, t, u, v \geq 0$$

Ahora podemos obtener una SBF poniendo $x = y = u = 0$, y las variables básicas son $t = 5$ y $v = 6$, ambas positivas.

Por supuesto, al introducir la variable ha cambiado el problema. Pero cuando $v = 0$, el nuevo conjunto de restricciones es el mismo que el anterior. Por tanto, si estamos seguros de que v es cero en la solución final del nuevo problema, esta solución también debe resolver el problema dado.

Podemos asegurar que v se lleva a cero cambiando la función objetivo a $Z = -x + 2y - Mv$, donde M es un número muy grande, por ejemplo, un millón. M se conoce como la **penalización** asociada con la variable artificial, y su efecto es asegurar que cualquier valor diferente de cero de v produce un valor negativo grande de la función objetivo, que por tanto debe ser menor al valor máximo. En el máximo de esta nueva Z, v debe ser cero.

Entonces la tabla para nuestro nuevo problema es

$$\begin{array}{c} \\ t \\ v \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} x & y & t & u & v & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -M & Z \end{array}\right] \end{array}$$

Sin embargo, esta tabla no está totalmente en la forma usual, ya que el indicador no es cero en la columna de v, y v es una variable básica. La operación $R_3 + MR_2$ resuelve ese pequeño problema, y queda

$$\begin{array}{c} \\ t \\ \to v \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & t & u & v \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 6 \\ 2M - 1 & M + 2 & 0 & -M & 0 & Z + 6M \end{array}\right] \\ \uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \end{array} \begin{array}{l} \\ \frac{5}{1} = 5 \\ \frac{6}{2} = 3 \\ \\ \end{array}$$

Ahora procedemos con el método símplex usual. El indicador más grande es $2M - 1$, en la columna de x, de modo que x entra a la base, y las razones usuales a la dere-

☛ **16.** Utilice el método símplex para maximizar $Z = x$ sujeta a las restricciones $y \geq x + 1$, $x + 2y \leq 8$, $x, y \geq 0$

Respuesta Después de eliminar la variable artificial de la función objetivo, la tabla inicial es

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x & y & t & u & v \end{array} \\ \begin{array}{c} t \\ v \\ \ \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1-M & M & 0 & -M & 0 & Z+M \end{array}\right] \end{array}$$

Después de dos pivoteos, la tabla final es

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x & y & t & u & v \end{array} \\ \begin{array}{c} t \\ u \\ \ \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & M+\frac{2}{3} & Z-2 \end{array}\right] \end{array}$$

dando la solución óptima $x = 2$, $y = 3$ y $Z_{\text{máx}} = 2$

cha muestran que v sale. Entonces, las operaciones entre renglones $R_1 - \frac{1}{2}R_2$ y $R_3 - (M - \frac{1}{2})R_2$ seguida de $\frac{1}{2}R_2$, producen la tabla

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccccc} x & y & t & u & v \end{array} & \\ \begin{array}{c} \to t \\ x \\ \ \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -M+\frac{1}{2} & Z+3 \end{array}\right] & \begin{array}{l} 2/\frac{1}{2} = 4 \\ 3/\frac{1}{2} = 6 \\ \ \end{array} \\ & \begin{array}{ccccc} \ & \uparrow & \ & \ & \ \end{array} & \end{array}$$

Esta vez y entra y t sale. Las operaciones entre renglones $R_2 - R_1$ y $R_3 - 5R_1$ seguida por $2R_1$ producen la tabla:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x & y & t & u & v \end{array} \\ \begin{array}{c} y \\ x \\ \ \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & -M+3 & Z-7 \end{array}\right] \end{array}$$

Ahora todos los indicadores son negativos, de modo que esta solución es óptima: $y = 4$, $x = 1$ y el valor máximo de Z es 7. (Con facilidad puede verificar por medio del método geométrico que esta solución es la correcta). Por último, el valor mínimo de $C = 10 - Z$ es 3. ☛ **16**

EJERCICIOS 10-4

(1-16) Use el método símplex para resolver los problemas de programación lineal dados en los ejercicios 1-6, 17-22, 25 y 26 de la sección 10-2 y los ejercicios 13 y 14 de la sección 10-3.

17. (*Mezclas*) Una compañía vende tres diferentes tipos de frituras, el tipo regular contiene 80% de cacahuates, 20% de nueces y no contiene pistaches; la mezcla super contiene 50% de cacahuates, 30% de nueces y 20% de pistaches y la mezcla de lujo contiene 30% de cacahuates, 30% de nueces y 40% de pistaches. La empresa tiene asegurados suministros por 4300 libras de cacahuates, 2500 de nueces y 2200 libras de pistaches a la semana. Si la utilidad es de 10¢ por libra de cada mezcla, ¿cuántas libras de cada una deberían venderse con el objetivo de maximizar la utilidad total?

(18-26) Mediante el método símplex encuentre el valor máximo de la función objetivo dada sujeta a las restricciones establecidas.

18. $Z = x + y + z$; $x, y, z \geq 0$, $x \leq 6$, $x + 2y + 3z \leq 12$, $2x + 4y + z \leq 16$

19. $Z = x + 2y - z$; $x, y, z \geq 0$, $2x + y + z \leq 4$, $x + 4y + 2z \leq 5$

20. $Z = 2x - y + 3z$; $x, y, z \geq 0$, $x + 3y + z \leq 5$, $2x + 2y + z \leq 7$

21. $Z = x + y + z$; $x, y, z \geq 0$, $x + 2y + z \leq 5$, $2x + y + 2z \leq 7$, $2x + 3y + 4z \leq 13$

22. $Z = 3x + y + 4z$; $x, y, z \geq 0$, $x + 2y + 2z \leq 9$, $2x + y + 3z \leq 13$, $3x + 2y + z \leq 13$

23. $Z = 4x + 5y$; $x, y \geq 0$, $x + 2y \leq 10$, $-x + 2y \leq 4$, $3x - y \leq 9$

24. $Z = x$; $x, y \geq 0$, $x \leq 2y$, $x + 2y \leq 4$, $3x + y \leq 9$

25. $Z = 3x - y + 2z$; $x, y, z \geq 0$, $4x - 3y + 2z \leq 4$, $3x + 2y + z \leq 1$, $-x + y - 3z \leq 0$

26. $Z = x + z$; $x, y, z \geq 0$, $2x - y + z \leq 6$, $4x + y + 3z \leq 20$, $-x + z \leq 2$

(27-30) Por medio de la introducción de variables artificiales cuando sea necesario, utilice el método símplex para resolver los ejercicios 9, 10, 27 y 29 de la sección 10-2.

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 10

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) La gráfica del conjunto solución de una desigualdad débil es una línea a trazos y es una línea continua para el conjunto solución de una desigualdad estricta.

b) Si $2x - y < 3$ entonces $y - 2x > 3$

c) Si $x > a$ y $y > b$ entonces $x - y > a - b$

d) Si $x < a$ y $y < b$ entonces $x + y < a + b$

e) La desigualdad $x - 2y \geq 5$ es equivalente a $2x - 4y \geq 10$

f) Si $3x - 5y \leq 5$ entonces $5y - 3x \geq 5$

g) Si $x \geq a$ y $y \leq b$ entonces $x - y \leq a - b$

h) El tercer cuadrante es el conjunto solución de $x \leq 0$ y $y \geq 0$

i) Si $x + y \leq a + b$ entonces $x \leq a$ y $y \leq b$

j) En el método símplex el elemento pivote puede ser un número negativo.

(2-6) Dibuje las gráficas de los siguientes conjuntos de desigualdades.

2. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 3$, $2x + y \leq 4$

3. $4 \geq y \geq 1$, $x \geq 0$, $3y - x \leq 9$, $3y + 5x \leq 45$

4. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $4x + 3y \leq 24$, $4x + 3y \leq 12$

5. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + 3y \leq 12$

6. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y - x \geq 0$, $5x + 2y \leq 10$

(7-16) Resuelva cada uno de los siguientes problemas de programación lineal:

a) Por medio del enfoque geométrico.

b) Con el método símplex.

7. Maximice $Z = 15x + 12y$ sujeta a las condiciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 20$, $3x + 2y \leq 45$

8. Maximice $Z = 3x + y$ sujeta a las condiciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 4$, $x + 2y \leq 6$

9. Minimice $Z =$ sujeta a las condiciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq 5$, $x \leq 8$, $x + 2y \leq 18$

***10.** Minimice $Z = 10x + 20y$ sujeta a las condiciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $8x + 2y \geq 16$, $x + y \geq 5$, $2x + 7y \geq 20$

11. Determine el valor máximo y el mínimo de $Z = x - y$ sujeta a las condiciones del problema 2.

12. Determine el valor máximo y el mínimo de $Z = x - 5y$ sujeta a las condiciones del problema 3.

13. Determine el el valor máximo y el mínimo de $Z = 3x + 2y$ sujeta a las condiciones del problema 4.

14. Determine el el valor máximo y el mínimo de $Z = x - y$ sujeta a las condiciones del problema 6.

15. Maximice $Z = 5x + 4y$ sujeta a las condiciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 4$, $2x + y \leq 5$

16. Minimice Z = 3x + 2y sujeta a las condiciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + y \geq 4$, $4y - 5x \leq 20$

(17-22) Resuelva cada uno de los siguientes problemas de programación lineal por el método símplex.

17. Maximice $Z = x + 5y + 2z$ sujeta a las condiciones x, y, $z \geq 0$, $x + 2y + z \leq 5$, $2x + y + 2z \leq 9$, $2x + 3y + 4z \leq 12$

18. Maximice $Z = 2x + 2y + 3z$ sujeta a las condiciones x, y, $z \geq 0$, $x + y + z \leq 20$, $2x - 2y + 3z \leq 30$, $2x + 3y + 4z \leq 36$

***19.** Minimice $Z = 2x + y - 3z$ sujeta a las condiciones x, y, $z \geq 0$, $2x - y + 3z \leq 36$, $-x + y + 2z \leq 18$, $4x + 5y - 3z \geq 30$

20. Maximice $Z = x + 2y + 3z$ sujeta a las condiciones x, y, $z \geq 0$, $x + y + z \leq 4$, $2x + y + 2z \leq 6$, $3x + 2y + z \leq 8$

21. Maximice $Z = x + 2y - z$ sujeta a las condiciones x, y, $z \geq 0$, $x + 3y + z \leq 8$, $x + y + 2z \leq 6$, $2x + y - 2z \leq 4$

***22.** Minimice $Z = 3x + 5y + 4z$ sujeta a las condiciones x, y, $z \geq 0$, $2x+y+2z \geq 12$, $x + 2y + 2z \geq 18$, $x + y + z \geq 10$

23. *(Estanque de peces)* Un estanque de peces se abastece cada primavera con dos especies de peces S y T. El peso promedio de los peces es 4 libras para S y 3 para T. Hay dos tipos de comida, A_1 y A_2, disponibles en el estanque. El requermiento diario promedio para un pez de la especie S es de 2 unidades de A_1 y 3 de A_2; mientras que para la especie T es 3 unidades de A_1 y 1 unidad de A_2. Si a lo más hay 440 unidades de A_1 y 240 unidades de A_2 diariamente, ¿cómo debe abastecerse el estanque para que el peso total inicial de los peces sea máximo?

24. *(Plan de producción)* Una empresa que se dedica a la fabricación de muebles, planea producir dos productos: sillas y mesas. Esto con base en sus recursos disponibles, los cuales consisten en 800 pies de madera de caoba y 900 horas de mano de obra (HM). El administrador sabe que para la fabricación de una silla, se requiere de 5 pies de madera y 10 HM, obteniéndose una ganancia de $40.00. Mientras que en la fabricación de cada mesa se utilizan 20 pies de madera y 15 HM, con una ganancia de $75.00. ¿Cuál es el plan de producción que maximiza las utilidades?

25. *(Plan de producción)* En el problema anterior, se recibe un pedido especial por lo que se debe producir al menos 30 sillas. Con esta nueva restricción, ahora ¿cuál es el plan de producción óptimo?

26. *(Decisiones sobre inversión)* Arturo Erdely, gerente de finanzas, tiene 2 millones de dólares de un fondo de pensiones, todo o parte de los cuales debe invertir. Arturo tiene dos inversiones en mente: unos bonos con poco riesgo que producen 5% anual, y unos bonos hipotecarios, un poco más riesgosos, que producen 8% anual. De acuerdo con las regulaciones del gobierno, no más del 20% de la cantidad invertida puede estar en bonos hipotecarios. Además, se debe invertir al menos $250,000 en bonos conservadores. Determine las cantidades de las dos inversiones que maximizarán los ingresos por intereses.

27. *(Decisiones sobre inversiones)* Con respecto al problema anterior, si la regulación cambia y permite invertir hasta 30% en los bonos hipotecarios, ¿cuál es la decisión de inversión que maximiza el rendimiento total?

28. *(Formulación de una dieta)* Una dieta debe contener al menos 16 unidades de carbohidratos y al menos 20 de proteínas. Cada unidad de alimento A contiene 2 unidades de carbohidratos y 4 de proteínas; mientras que cada unidad de alimento B contiene 2 unidades de carbohidratos y 1 de proteínas. Si el alimento A cuesta $1.20 por unidad y el alimento B cuesta $0.80 por unidad, ¿cuántas unidades de cada alimento deben comprarse para minimizar el costo? ¿Cuál es el costo mínimo?

29. *(Ayuda humanitaria)* Las víctimas de un terremoto en Centroamérica requieren medicinas y botellas de agua. Cada paquete de medicamentos mide 1 pie cúbico y pesa 8 libras; mientras que cada caja con botellas de agua ocupa un pie cúbico y pesa 15 libras. Un avión sólo puede transportar 59,700 libras con un volumen total de 4470 pies cúbicos. Cada paquete de medicamentos puede ayudar a 10 personas; mientras que cada caja con botellas de agua servirá para 15 personas. ¿Cuánto se debe enviar de cada uno para ayudar a la mayor cantidad de personas?

30. *(Ayuda humanitaria)* En el problema anterior, si cada paquete con medicamentos sirve para ayudar a 12 personas en vez de a 10, ¿cómo cambia la decisión de envío de ayuda?

CASO DE ESTUDIO

PRODUCCIÓN ÓPTIMA

La información relevante del problema que se planteó al inicio del capítulo se presenta en la siguiente tabla.

	Silla	Mesa	
Ganancia	\$45	\$80	Total del recurso
Madera utilizada	5 pies	20 pies	800 pies
Horas de mano de obra (HM)	10 HM	15 HM	900 HM

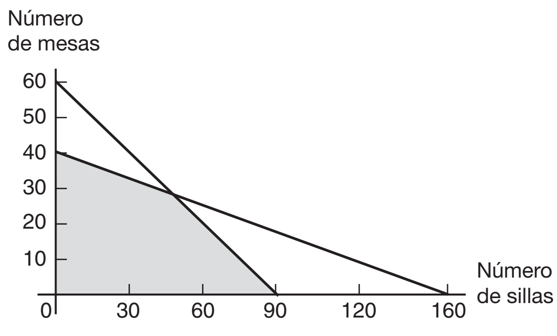
Si denotamos con x el número de sillas producidas y con y el número de mesas que se producen, entonces, al igual que en los problemas que se plantearon en este capítulo, la traducción al lenguaje algebraico del problema es:

Maximizar $Z = 45x + 80y$

Sujeta a:

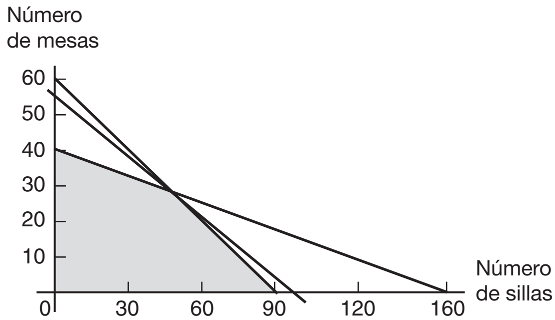
$5x + 20y \leq 800$ (R1, restricción de madera)
$10x + 15y \leq 900$ (R2, restricción de horas de mano de obra)
$x, y \geq 0$

Por medio del método gráfico, analizado en este capítulo, se resuelve el problema. La siguiente figura muestra las regiones correspondientes a las restricciones, la región factible aparece sombreada.

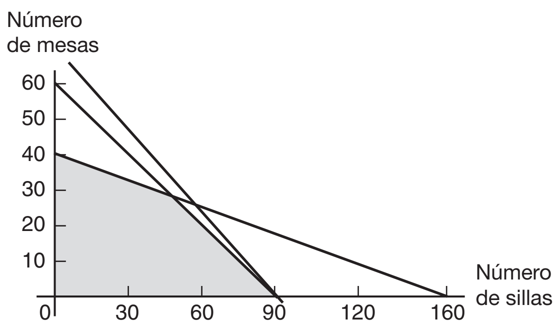


i. El plan de producción óptimo es producir 48 sillas y 28 mesas. El punto (48, 28) se obtiene al intersecar las rectas correspondientes a R1 y R2.

ii. Con la producción de 48 sillas y 28 mesas se tendría una ganancia de \$4400. En la siguiente figura se muestra la región factible junto con la función objetivo que pasa por el punto óptimo.



iii. Para decidir cuál es el nuevo plan de producción óptimo si la venta de cada silla deja una ganancia de \$55, se debe notar que la recta de utilidad cambia su pendiente de $-45\backslash 80$ a $-55\backslash 80$. Geométricamente esto significa que la recta de utilidad se "levanta" más, como se observa en la siguiente gráfica



y, por tanto, ahora el óptimo se alcanza en el punto (90, 0), es decir, el plan de producción óptimo es producir 90 sillas y ninguna mesa, con lo cual se obtiene una ganancia de \$4950.

Este plan utiliza todas las horas de mano de obra, pero sólo 450 pies de madera. ¿Por qué? Con base en las gráficas anteriores y un análisis cuidadoso, responda las siguientes preguntas.

a) Si la venta de cada silla deja una utilidad de $45 y la de cada mesa una utilidad de $120, ¿cuál es el plan de producción óptimo?

b) Si la utilidad es de $25 y $110, para cada silla y mesa, respectivamente, ahora, ¿cuál es el plan óptimo?

c) Si puede comprar madera, adicionalmente a la que ya tiene, ¿cuántos pies compraría? ¿Por qué?

d) De la oficina de recursos humanos le informan que puede contratar personal por honorarios, es decir, les paga por hora de trabajo. ¿Contrataría a nuevo personal? En caso afirmativo, si a cada persona la contrata por “bloque” de cuatro horas, ¿cuántas personas contrataría? ¿Cuánto pagaría por hora de trabajo?

e) Si en realidad son 850 HM, ¿cuál es el óptimo?

Sugerencia: Para responder las partes *c*), *d*) y *e*) debe analizar qué le sucede a la recta asociada con la restricción correspondiente al recurso que está cambiando.

Observación: Cada pregunta es independiente de las demás; es decir, cada una es una variante del problema original.

Al planteamiento de este tipo de preguntas se le conoce como *análisis de sensibilidad* y es un tema muy apasionante e importante al resolver problemas de programación lineal. Para profundizar más en el tema, consulte los textos Taha, Hamdy, *Investigación de operaciones*, sexta edición; y Eppen y Gould, *Introducción a la investigación de operaciones*, quinta edición, ambos de esta editorial.

CAPÍTULO 11

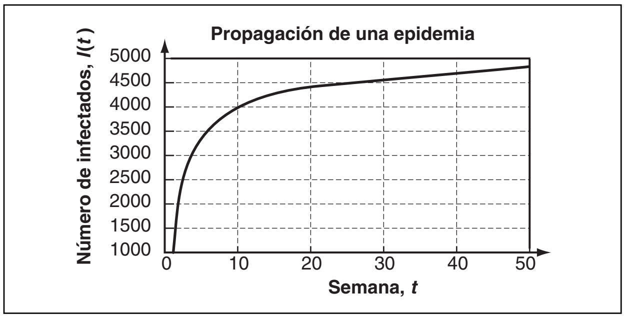
La derivada

PROPAGACIÓN DE UNA EPIDEMIA

En capítulos anteriores se estudiaron modelos matemáticos como aproximaciones a la realidad. Estos modelos se pueden analizar desde el punto de vista matemático y para obtener resultados con respecto al fenómeno que modelan. Así, por ejemplo, se han estudiado diferentes funciones que "gobiernan" el movimiento de proyectiles, el crecimiento de una deuda, la ganancia por el alquiler de viviendas, etc. Como un ejemplo, una aplicación del cálculo la observamos en el problema al que se enfrenta la doctora Socorro cuando una epidemia se propoga en una población y, gracias a estudios anteriores en otras poblaciones similares, sabe que el número de infectados, I, después de t semanas, está dado por la fórmula

$$I(t) = 10{,}000 - 4500(t^{-1/2} + 1), \text{ para } t \geq 1$$

La gráfica de esta función de la semana 1 a la 50 se muestra a continuación:



La gráfica de la función muestra que el número de individuos al inicio crece rápido; sin embargo, alrededor de la semana 8 o 10, aunque sigue creciendo, el crecimiento empieza a ser más lento. Ahora bien, con base en el modelo que se propone para este fenómeno, la doctora Socorro tendría respuesta a preguntas de su interés, como las siguientes:

a) ¿Cuántos casos se tienen en la semana 1?
b) ¿Cuál es el aumento de casos de la semana 4 a la semana 6?
c) En promedio, ¿qué tan rápido se propaga la enfermedad de las semanas 1 a 2?
d) ¿Qué tan rápido se propaga la enfermedad en la semana 9?
e) ¿Qué tan rápido se propaga la enfermedad en la semana 50?

Con los temas que se abordan en este capítulo usted responderá las preguntas anteriores.

TEMARIO

■ 11-1 INCREMENTOS Y TASAS

El cálculo diferencial es el estudio del cambio que ocurre en una cantidad, cuando ocurren variaciones en otras cantidades de las cuales depende la cantidad original. Los siguientes ejemplos ilustran tales situaciones.

1. El cambio en el costo total de operación de una planta que resultan de cada unidad adicional producida.
2. El cambio en la demanda de cierto producto que resulta de un incremento de una unidad (por ejemplo, \$1) en el precio.
3. El cambio en el producto nacional bruto de un país con cada año que pasa.

DEFINICIÓN Sea x una variable con un primer valor x_1 y un segundo valor x_2. Entonces, el cambio en el valor de x, que es $x_2 - x_1$, se denomina el incremento de x y se denota por Δx.

Usamos la letra griega Δ (delta) para denotar un cambio o incremento de cualquier variable.

Δx denota el cambio de la variable x

Δp indica el cambio de la variable p

Δq denota el cambio de la variable q

Sea y una variable que depende de x tal que $y = f(x)$ está definida para todo valor de x entre x_1 y x_2. Cuando $x = x_1$, y tiene el valor $y_1 = f(x_1)$. De manera similar, cuando $x = x_2$, y tiene el valor $y_2 = f(x_2)$. Así, el incremento de y es

$$\begin{aligned}\Delta y &= y_2 - y_1\\ &= f(x_2) - f(x_1)\end{aligned}$$

EJEMPLO 1 El volumen de ventas de gasolina de cierta estación de servicio depende del precio por litro. Si p es el precio por litro en centavos, se encuentra que el volumen de venta q (en litros por día) está dado por

$$q = 500(150 - p)$$

Calcule el incremento en el volumen de ventas que corresponde a un incremento en el precio de 120¢ a 130¢ por litro.

Solución Aquí, p es la variable independiente y q la función de p. El primer valor de p es $p_1 = 120$ y el segundo valor es $p_2 = 130$. El incremento de p es

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 130 - 120 = 10$$

Los valores correspondientes de q son los siguientes:

$$q_1 = 500(150 - p_1) = 500(150 - 120) = 15{,}000$$
$$q_2 = 500(150 - p_2) = 500(150 - 130) = 10{,}000$$

En consecuencia, el incremento de q está dado por

$$\Delta q = q_2 - q_1 = 10{,}000 - 15{,}000 = -5000$$

☛ **1.** Dada $y = 2 - 3x + x^2$ calcule Δx y Δy si
a) $x_1 = 1, x_2 = 2$
b) $x_1 = -1, x_2 = 1$

El incremento de q mide el crecimiento en q y el hecho de que sea negativo significa que q en realidad decrece. El volumen de ventas decrece en 5000 litros por día si el precio se incrementa de 120 a 130 centavos. ☛ **1**

Sea P el punto (x_1, y_1) y Q el punto (x_2, y_2), ambos situados en la gráfica de la función $y = f(x)$. (Véase la figura 1). Entonces, el incremento Δx es igual a la distancia horizontal de P a Q, mientras que Δy es igual a la distancia vertical de P a Q. En otras palabras, Δx es el *recorrido* y Δy es la *elevación* de P a Q.

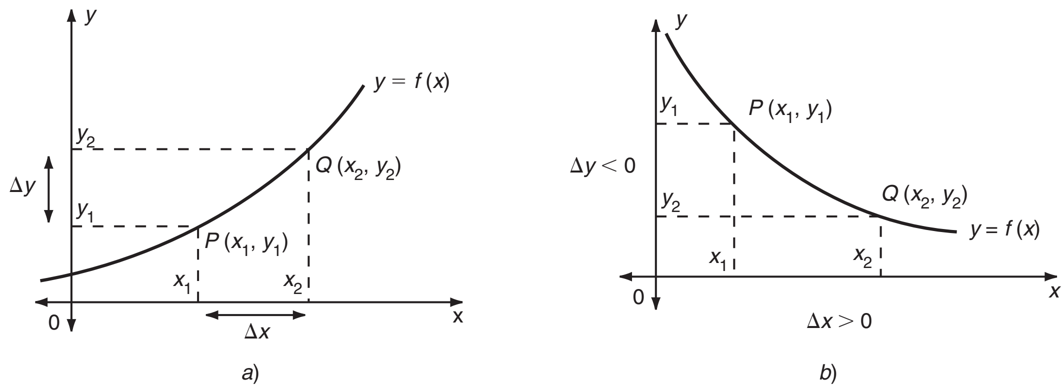


FIGURA 1

En el caso ilustrado en la parte *a*) de la figura 1, tanto Δx como Δy son positivos. Es posible que Δx, Δy o ambos sean negativos y aún Δy puede ser cero. Un ejemplo típico de un caso en que $\Delta x > 0$ y $\Delta y < 0$ se ilustra en la parte *b*) de la figura 1.

En algunas de las aplicaciones que abordaremos más adelante, nos convendrá pensar el incremento Δx como muy pequeño (esto es, sólo desearemos considerar pequeños cambios en la variable independiente). Se sobreentiende, por antonomasia, que Δx significa un cambio pequeño de x más bien que sólo un incremento. Sin embargo, en esta sección no se pondrá alguna restricción en el tamaño de los incrementos considerados; pueden ser pequeños o relativamente grandes.

Resolviendo la ecuación $\Delta x = x_2 - x_1$ para x_2, tenemos $x_2 = x_1 + \Delta x$. Usando este valor de x_2 en la definición de Δy, obtenemos

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

Respuesta *a*) $\Delta x = 1,\ \Delta y = 0$
b) $\Delta x = 2, \Delta y = -6$

Dado que x_1 puede ser cualquier valor de x, suprimimos el subíndice y escribimos

$$\boxed{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)}$$

En forma alternativa, dado que $f(x) = y$, podemos escribir

$$\boxed{y + \Delta y = f(x + \Delta x)}$$

EJEMPLO 2 Dada $f(x) = x^2$, calcule Δy si $x = 1$ y $\Delta x = 0.2$.

Solución Sustituyendo los valores de x y Δx en la fórmula de Δy,

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = f(1 + 0.2) - f(1) = f(1.2) - f(1)\\ &= (1.2)^2 - (1)^2 = 1.44 - 1 = 0.44\end{aligned}$$

Así que, un cambio de 0.2 en el valor de x da como resultado un cambio en y de 0.44. Esto se ilustra de manera gráfica en la figura 2.

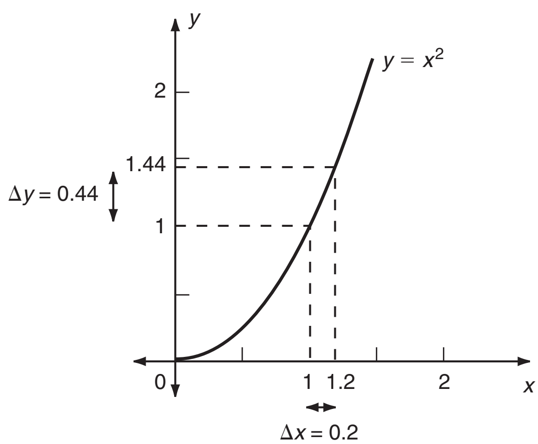


FIGURA 2

EJEMPLO 3 En el caso de la función $y = x^2$, determine Δy cuando $x = 1$ para cualquier incremento Δx.

Solución

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^2 - (1)^2\\ &= (1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2) - 1 = 2\Delta x + (\Delta x)^2\end{aligned}$$

Puesto que la expresión de Δy del ejemplo 3 es válida para todos los incrementos Δx, podemos resolver el ejemplo 2 sustituyendo $\Delta x = 0.2$ en el resultado. De esta manera,

$$\Delta y = 2(0.2) + (0.2)^2 = 0.4 + 0.04 = 0.44$$

como antes.

☛ **2.** Calcule Δy para valores generales de x y Δx, si
a) $y = 3 - 2x$; *b*) $y = 4x - x^2$

EJEMPLO 4 De nuevo, considere la función $y = x^2$ y determine Δy para valores generales de x y Δx.

Solución $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

Nuevamente es claro que recuperamos el resultado del ejemplo 3 sustituyendo $x = 1$ en la expresión del ejemplo 4. ☛ **2**

Cuando se establecen en términos absolutos (como en los ejemplos anteriores), los cambios de la variable dependiente contienen menos información de la que tendrían si se establecieran en términos relativos. Por ejemplo, enunciados absolutos como, "la temperatura descendió 10°C" o "las ganancias se incrementarán en \$3000" son menos informativos que proposiciones relativas como, "la temperatura descendió 10°C en las últimas 5 horas" o " las ganancias se incrementarán en 3000 dólares si se venden 60 unidades extra". De estos últimos enunciados, no sólo sabemos qué tanto cambia la variable (temperatura o ganancias), sino que también podemos calcular la tasa promedio en que está cambiando con respecto a una segunda variable. Por tanto, el descenso promedio de la temperatura durante las últimas 6 horas es $\frac{10}{5} = 2$°C por hora; y el incremento promedio de las ganancias si 60 unidades más se venden es de $\frac{3000}{60} = 50$ dólares por unidad.

DEFINICIÓN La **tasa de cambio promedio** de una función f sobre un intervalo de x a $x + \Delta x$ se define por la razón $\Delta y/\Delta x$. Por tanto, la tasa de cambio promedio de y con respecto a x es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Observación Es necesario que el intervalo completo de x a $x + \Delta x$ pertenezca al dominio de f.

Gráficamente, si P es el punto $(x, f(x))$ y Q es el punto $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ sobre la gráfica de $y = f(x)$, entonces $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ es la elevación y Δx es el recorrido de P a Q. Por la definición de pendiente, podemos decir que $\Delta y/\Delta x$ es la pendiente del segmento rectilíneo PQ. Así que la tasa de cambio promedio de y con respecto a x es igual a la pendiente de la secante PQ que une los puntos P y Q sobre la gráfica de $y = f(x)$. (Véase la figura 3). Estos puntos corresponden a los valores x y $x + \Delta x$ de la variable independiente.

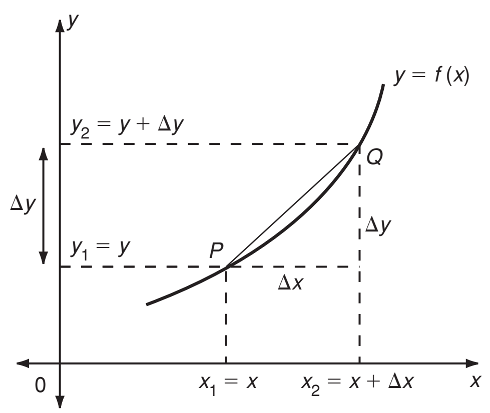


FIGURA 3

Respuesta *a*) $\Delta y = -2\Delta x$
b) $\Delta y = 4\Delta x - 2x\Delta x - (\Delta x)^2$

EJEMPLO 5 ***(Costo, ingresos y utilidades)*** Un fabricante de productos químicos advierte que el costo por semana de producir x toneladas de cierto fertilizante está dado por $C(x) = 20{,}000 + 40x$ dólares y el ingreso obtenido por la venta de x toneladas está dado por $R(x) = 100x - 0.01x^2$. La compañía actualmente produce 3100 toneladas por semana; pero está considerando incrementar la producción a 3200 toneladas por semana. Calcule los incrementos resultantes en el costo, el ingreso y la utilidad. Determine la tasa de cambio promedio de la utilidad por las toneladas extra producidas.

Solución El primer valor de x es 3100 y $x + \Delta x = 3200$:

$$\begin{aligned}
\Delta C &= C(x + \Delta x) - C(x) \\
&= C(3200) - C(3100) \\
&= [20{,}000 + 40(3200)] - [20{,}000 + 40(3100)] \\
&= 148{,}000 - 144{,}000 = 4000 \\
\Delta R &= R(x + \Delta x) - R(x) \\
&= R(3200) - R(3100) \\
&= [100(3200) - 0.01(3200)^2] - [100(3100) - 0.01(3\,100)^2] \\
&= 217{,}600 - 213{,}900 = 3700
\end{aligned}$$

De modo que los costos se incrementan en \$4000 con el incremento dado en la producción, mientras que los ingresos se incrementan en \$3700.

A partir de estos resultados, es claro que la utilidad debe decrecer en \$300. Podemos advertir esto con más detalle si consideramos que las utilidades obtenidas por la empresa son iguales a sus ingresos menos sus costos, de modo que la utilidad $P(x)$ por la venta de x toneladas de fertilizante es

$$\begin{aligned}
P(x) &= R(x) - C(x) \\
&= 100x - 0.01x^2 - (20{,}000 + 40x) \\
&= 60x - 0.01x^2 - 20{,}000
\end{aligned}$$

En consecuencia, el incremento en la utilidad cuando x cambia de 3100 a 3200 es

$$\begin{aligned}
\Delta P &= P(3200) - P(3100) \\
&= [60(3200) - 0.01(3200)^2 - 20{,}000] - [60(3100) - 0.01(3100)^2 - 20{,}000] \\
&= 69{,}600 - 69{,}900 = -300
\end{aligned}$$

Así pues, la utilidad decrece en \$300. La tasa de cambio promedio de la utilidad por tonelada extra es

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{-300}{100} = -3$$

en donde $\Delta x = 3200 - 3100 = 100$. De modo que la utilidad decrece en un promedio de \$3 por tonelada con el incremento dado en la producción. ☛ **3**

☛ **3.** Dada $y = x^2 + 2x$, calcule la tasa de cambio promedio de y con respecto a x en el intervalo
a) de $x_1 = 1$, $x_2 = 3$
b) de $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

Respuesta *a*) 6; *b*) 3

EJEMPLO 6 Cuando cualquier objeto se suelta a partir del resposo y se le permite caer libremente bajo la fuerza de gravedad, la distancia s (en pies) recorrida en el tiempo t (en segundos) está dada por

$$s(t) = 16t^2$$

Determine la velocidad promedio del objeto durante los siguientes intervalos de tiempo:

a) El intervalo de tiempo de 3 a 5 segundos.

b) El cuarto segundo (de $t = 3$ a $t = 4$ segundos).

c) El intervalo de tiempo entre los instantes 3 y $3\frac{1}{2}$ segundos.

d) El lapso de t a $t + \Delta t$

Solución La velocidad promedio de cualquier móvil es igual a la distancia recorrida dividida entre el intervalo de tiempo empleado. Durante el lapso de t a $t + \Delta t$, la distancia recorrida es el incremento Δs, y así la velocidad promedio es la razón $\Delta s/\Delta t$.

a) Aquí $t = 3$ y $t + \Delta t = 5$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{s(5) - s(3)}{5 - 3}$$

$$= \frac{16(5^2) - 16(3^2)}{2} = \frac{400 - 144}{2} = \frac{256}{2} = 128$$

Por consiguiente, durante el lapso de $t = 3$ a $t = 5$, el móvil cae una distancia de 256 pies con una velocidad promedio de 128 pies/segundo.

b) Ahora, $t = 3$ y $t + \Delta t = 4$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{s(4) - s(3)}{4 - 3}$$

$$= \frac{16(4^2) - 16(3^2)}{1} = 256 - 144 = 112$$

El móvil tiene una velocidad promedio de 112 pies/segundo durante el cuarto segundo de caída.

c) En este caso, $t = 3$ y $\Delta t = 3\frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2}$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{16(3\frac{1}{2})^2 - 16(3)^2}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{196 - 144}{\frac{1}{2}} = \frac{52}{\frac{1}{2}} = 104$$

Así pues, el móvil tiene una velocidad promedio de 104 pies/segundo durante el lapso de 3 a $3\frac{1}{2}$ segundos.

☛ **4.** Si la distancia recorrida en t segundos es $s = 96t - 16t^2$, calcule la velocidad promedio durante

a) el intervalo de $t = 0$ a $t = 3$

b) el intervalo de $t = 2$ a $t = 4$

c) el intervalo de $t = 3$ a $t = 5$

d) el intervalo de t a $t + \Delta t$

Respuesta *a*) 48 *b*) 0 *c*) –32 *d*) $96 - 32t - 16\Delta t$

d) En el caso general,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{16(t + \Delta t)^2 - 16t^2}{\Delta t}$$

$$= \frac{16[t^2 + 2t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2] - 16t^2}{\Delta t}$$

$$= \frac{32t \cdot \Delta t + 16(\Delta t)^2}{\Delta t} = 32t + 16\Delta t$$

la cual es la velocidad promedio durante el lapso de t a $t + \Delta t$

Todos los resultados particulares del ejemplo 6 pueden obtenerse como casos especiales de la parte *d*) poniendo los valores apropiados de t y Δt. Por ejemplo, el resultado de la parte *a*) se obtiene haciendo $t = 3$ y $\Delta t = 2$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 32t + 16\Delta t = 32(3) + 16(2) = 96 + 32 = 128$$ ☛ **4**

EJERCICIOS 11-1

(1-8) Determine los incrementos de las siguientes funciones para los intervalos dados.

1. $f(x) = 2x + 7;\ x = 3, \Delta x = 0.2$

2. $f(x) = 2x^2 + 3x - 5; x = 2, \Delta x = 0.5$

3. $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}; x = 1, \Delta x = 2$

4. $f(t) = \dfrac{900}{t}; t = 25, \Delta t = 5$

5. $p(t) = 2000 + \dfrac{500}{1 + t^2}; t = 2, \Delta t = 1$

6. $h(x) = ax^2 + bx + c$; x a $x + \Delta x$

7. $F(x) = x + \dfrac{2}{x}$; x a $x + \Delta x$

8. $G(t) = 300 + \dfrac{5}{t + 1}$; t a $t + \Delta t$

(9-16) Calcule la tasa de cambio promedio de cada función en el intervalo dado.

9. $f(x) = 3 - 7x;\ x = 2, \Delta x = 0.5$

10. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1;\ x = 3, \Delta x = 0.2$

11. $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3};\ x = 2, \Delta x = 0.5$

12. $h(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x};\ x = 5, \Delta x = 0.3$

13. $f(t) = \sqrt{4 + t};\ t = 5, \Delta t = 1.24$

14. $F(x) = \dfrac{3}{x}$; x a $x + \Delta x$

15. $G(t) = t^3 + t$; $t = a$ a $a + h$

16. $f(x) = \dfrac{3}{2x + 1}$; x a $x + \Delta x$

17. *(Crecimiento y variación de la población)* El tamaño de la población de cierto centro minero al tiempo t (medido en años) está dado por

$$p(t) = 10{,}000 + 1000t - 120t^2$$

Determine la tasa de crecimiento promedio entre cada par de tiempos.

a) $t = 3$ y $t = 5$ años

b) $t = 3$ y $t = 4$ años

c) $t = 3$ y $t = 3\frac{1}{2}$ años

d) $t = 3$ y $t = 3\frac{1}{4}$ años

e) t y $t + \Delta t$ años

18. *(Función de costo)* Un fabricante descubre que el costo de producir x artículos está dado por

$$C = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000$$

a) Determine el incremento en el costo cuando el número de unidades se incrementa de 50 a 60.

b) Calcule el costo promedio por unidad adicional de incremento en la producción de 50 a 60 unidades.

19. *(Función de costo)* Con respecto a la función de costo del ejercicio 18, calcule el costo promedio por unidad adicional en incremento de la producción de 90 a 100 unidades.

20. *(Relación de demanda)* Cuando el precio de cierto artículo es igual a p, el número de artículos que pueden venderse por semana (esto es, la demanda) está dado por la fórmula

$$x = \frac{1000}{\sqrt{p} + 1}$$

Determine el incremento de la demanda cuando el precio se incrementa de \$1 a \$2.25.

21. *(Función de ingreso)* En el caso de la función de demanda del ejercicio 20:

a) Determine el incremento en el ingreso bruto cuando el precio del artículo se incrementa de \$4 a \$6.25.

b) Calcule el incremento promedio en el ingreso total por dólar de incremento en el precio que ocurre con este incremento en p.

22. *(Crecimiento del PNB)* Durante el periodo de 1950 a 1970, el producto nacional bruto de cierto país se encontraba dado por la fórmula $I = 5 + 0.1x + 0.01x^2$ en miles de millones de dólares. (Aquí la variable x se utiliza para medir los años, con $x = 0$ siendo 1970 y $x = 20$ siendo 1990). Determine el crecimiento promedio en el PNB por año entre 1975 y 1980.

23. *(Televidentes)* Después de que la televisión se introdujo en cierto país en desarrollo, la proporción de jefes de familia que poseían televisor t años después se encontró que estaba dada por la fórmula $p = 1 - e^{-0.1t}$.

a) Determine el crecimiento en p entre $t = 3$ y $t = 6$ y

b) Determine la tasa de cambio promedio de p por año.

24. *(Crecimiento de la población)* La población de cierta isla como función del tiempo t se encuentra que está dada por la fórmula

$$y = \frac{20{,}000}{1 + 6(2)^{-0.1t}}$$

a) El incremento de y entre $t = 10$ y $t = 30$

b) El crecimiento promedio de la población por año durante este periodo.

25. *(Proyectiles)* Una partícula que se lanza hacia arriba con una velocidad de 100 pies/segundo alcanza una altura s después de t segundos, en donde $s = 100t - 16t^2$. Calcule la velocidad ascendente promedio en cada caso.

a) Entre $t = 2$ y $t = 3$ segundos

b) Entre $t = 3$ y $t = 5$ segundos

c) Entre t y $t + \Delta t$

26. *(Función de ingreso)* El ingreso semanal total R (en dólares) obtenido por la producción y venta de x unidades de cierto artículo está dado por

$$R = f(x) = 500x - 2x^2$$

Determine la tasa promedio de ingresos por unidad extra cuando el número de unidades producidas y vendidas por semana se incrementa de 100 a 120.

27. *(Medicina)* Cuando se le da cierta droga a una persona, su reacción se mide mediante los cambios en la presión de la sangre, cambios de temperatura, variación de pulso y otros cambios fisiológicos. La fuerza S de la reacción depende de la cantidad x de droga administrada y está dada por

$$S(x) = x^2(5 - x)$$

Determine el promedio de la razón de cambio en la fuerza de reacción cuando la cantidad de unidades de droga cambia de $x = 1$ a $x = 3$.

28. *(Agricultura)* El número de libras de duraznos P de buena calidad, producidos por un árbol promedio en cierto huerto depende, del número de libras de insecticida x con el cual el árbol fue rociado, de acuerdo con la siguiente fórmula

$$P = 300 - \frac{100}{1 + x}$$

Calcule el promedio de la razón de incremento de P cuando x cambia de 0 a 3.

■ 11-2 LÍMITES

En el ejemplo 6 de la sección 11-1, estudiamos las velocidades promedio de un móvil que cae durante varios intervalos de tiempo diferentes. Sin embargo, en muchos ejemplos tanto de la ciencia como de la vida diaria, la velocidad promedio de un móvil no da la información de mayor importancia. Por ejemplo, si una persona que viaja en un automóvil choca contra una pared de concreto, no es la velocidad promedio sino la velocidad en el *instante de colisión* la que determina si la persona sobrevivirá al accidente.

¿Qué entendemos por la velocidad de un móvil en cierto instante (o *velocidad instantánea*, como se denomina regularmente)? La mayoría de la gente aceptaría que en una idea como la de velocidad instantánea (es precisamente la cantidad que el velocímetro del automóvil mide) pero la definición de velocidad instantánea presenta algunas dificultades. La velocidad se define como la distancia recorrida en cierto intervalo dividida entre su duración. Pero si nos interesa la velocidad en cierto instante particular, deberíamos considerar un intervalo de duración cero. Sin embargo, la distancia recorrida durante tal intervalo sería cero, y obtendríamos: Velocidad = Distancia ÷ Tiempo = 0 ÷ 0, un valor sin significado.

Con la finalidad de definir la velocidad instantánea de un móvil en cierto instante t, procederemos de la siguiente manera. Durante cualquier intervalo con una duración entre t y $t + \Delta t$, se recorre un incremento en la distancia Δs. La velocidad promedio es $\Delta s/\Delta t$. Imaginemos ahora que el incremento Δt se hace cada vez más pequeño, de modo que el intervalo correspondiente es muy pequeño. Así, es razonable suponer que la velocidad promedio $\Delta s/\Delta t$ sobre tal intervalo muy pequeño estará muy cerca de la velocidad instantánea en el instante t. Más aún, cuanto más corto sea el intervalo Δt, mejor aproximará la velocidad promedio a la velocidad instantánea. De hecho, podemos imaginar que a Δt se le permite hacerse arbitrariamente cercano a cero, de modo que la velocidad promedio $\Delta s/\Delta t$ puede hacerse cada vez más parecida a la velocidad instantánea.

En el ejemplo 6 de la sección 11-1, vimos que la velocidad promedio durante el intervalo de t a $t + \Delta t$, de una particula que cae bajo la acción de la gravedad está dada por

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 32t + 16\Delta t$$

Haciendo $t = 3$, obtenemos la velocidad promedio durante un intervalo de duración Δt después de 3 segundos de caída.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 96 + 16\Delta t$$

Algunos valores de esta velocidad aparecen en la tabla 1 para diferentes valores del incremento Δt. Por ejemplo, la velocidad promedio entre 3 y 3.1 segundos se obtiene haciendo $\Delta t = 0.1$: $\Delta s/\Delta t = 96 + 16(0.1) = 96 + 1.6 = 97.6$ pies/segundo.

TABLA 1

Δt	0.5	0.25	0.1	0.01	0.001
$\Delta s/\Delta t$	104	100	97.6	96.16	96.016

A partir de los valores de la tabla 1 es claro que a medida que Δt se hace más y más pequeño, la velocidad promedio se acerca cada vez más a 96 pies/segundo. Es razonable concluir en consecuencia que 96 pies/segundo es la velocidad instantánea en $t = 3$.

Este ejemplo es característico de una clase completa de problemas en que necesitamos examinar el comportamiento de cierta función a medida que su argumento se acerca cada vez más a un valor particular.* En este caso, nos interesa el comportamiento de la velocidad promedio $\Delta s/\Delta t$ cuando Δt se acerca a cero. En general, puede interesarnos el comportamiento de una función $f(x)$ de una variable x cuando x se aproxima a un valor particular, digamos c. Debe entenderse que x toma una sucesión de valores que están arbitrariamente cerca del valor c, si bien x nunca puede ser igual a c. (Obsérvese que la velocidad promedio $\Delta s/\Delta t$ no está definida si $\Delta t = 0$. Sólo podemos considerar un pequeño, muy pequeño valor de Δt, pero nunca un valor cero). Mediante $x \to c$ indicaremos que x se *aproxima* a c; por ejemplo, escribiríamos $\Delta t \to 0$ en el ejemplo anterior.

Examinemos lo que sucede con la función $f(x) = 2x + 3$ cuando $x \to 1$. Permitiremos de que x tome la sucesión de valores 0.8, 0.9, 0.99, 0.999 y 0.9999, que sin duda se acercan cada vez más a 1. Los valores correspondientes de $f(x)$ están dados en la tabla 2.

TABLA 2

x	0.8	0.9	0.99	0.999	0.9999
$f(x)$	4.6	4.8	4.98	4.998	4.9998

A partir de esta tabla es claro que a medida que x se acerca a 1, $f(x)$ está cada vez más cerca de 5. Escribimos entonces $f(x) \to 5$ cuando $x \to 1$.

Los valores de x considerados en la tabla 2 son menores que 1. En tal caso, decimos que x se aproxima a 1 por abajo. Podemos considerar también el caso alternativo en que x se aproxima a 1 por arriba; es decir, x toma una sucesión de valores que están cada vez más cerca de 1 pero siempre son mayores que 1. Por ejemplo, podríamos permitir que x tomara la sucesión de valores 1.5, 1.1, 1.01, 1.001 y 1.0001. Los valores correspondientes de $f(x)$ están dados en la tabla 3.

TABLA 3

x	1.5	1.1	1.01	1.001	1.0001
$f(x)$	6	5.2	5.02	5.002	5.0002

*El término *argumento* se definió en la página 174.

Otra vez, es claro que $f(x)$ está cada vez más cerca de 5 cuando x se aproxima a 1 por arriba.

En consecuencia, cuando x se aproxima a 1 por abajo o por arriba, $f(x) = 2x + 3$ se acerca a 5. Decimos que el *límite* (o *valor límite*) de $f(x)$ cuando x tiende a 1 es igual a 5. Esto se denota así:

$$\lim_{x \to 1} (2x + 3) = 5$$

Damos ahora la definición formal de límite.

DEFINICIÓN Sea $f(x)$ una función que está definida para todos los valores de x cerca de c, con la excepción posible de c mismo. *Se dice que* L *es el límite de* f(x) *cuando* x *tiende a* c, *si la diferencia entre* f(x) *y* L *puede hacerse tan pequeña como se desee con sólo restringir a* x *a estar lo suficientemente cerca de* c. En símbolos, escribimos

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \qquad \text{o bien} \qquad f(x) \to L \text{ cuando } x \to c$$

☛ **5.** Por el cálculo de unos cuantos valores, como en las tablas 2 y 3, evalúe los límites.

a) $\lim_{x \to 3} (2x + 3)$ *b*) $\lim_{x \to -1} 2x^2$

c) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x + 1}$

Respuesta *a*) 9 *b*) 2 *c*) 0

En nuestro ejemplo anterior, $f(x) = 2x + 3$, $c = 1$ y $L = 5$. Podemos hacer que el valor de la función $2x + 3$ esté tan cercano a 5 como se desee eligiendo x lo suficientemente cercano a 1. ☛ **5**

En este ejemplo, el valor límite de la función $f(x) = 2x + 3$ cuando $x \to 1$ puede obtenerse con sólo sustituir $x = 1$ en la fórmula $2x + 3$ que define la función. La pregunta que surge es si los límites siempre pueden encontrarse sustituyendo el valor de x en la expresión dada. La respuesta a esta pregunta es: algunas veces, pero no siempre. El análisis de la velocidad instantánea de la página 450 ya ilustró este punto. En términos de límites, la velocidad instantánea se definió como

$$\text{Velocidad instantánea} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

y si tratamos de sustituir de forma directa $\Delta t = 0$, obtenemos 0/0.

El ejemplo 1 presenta otro caso en que la sustitución directa no funciona.

EJEMPLO 1 Si $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$, evalúe $\lim_{x \to 3} f(x)$

Solución Si sustituimos $x = 3$ en $f(x)$, obtenemos $\frac{0}{0}$, y concluimos que $f(x)$ no está definida en $x = 3$. Sin embargo, $\lim_{x \to 3} f(x)$ existe, dado que podemos escribir

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$$

La eliminación del factor $x - 3$ es válida siempre que $x \neq 3$, y, por supuesto, no es válida si $x = 3$. Es fácil advertir que cuando x tiende a 3, la función $x + 3$ está cada vez más cerca del valor 6. (Facilmente se puede convencer de esto calculando algunos valores como en las tablas 2 y 3). En consecuencia,

☛ **6.** Después del ejemplo 1, evalúe

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

b) $\lim_{x\to 3} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$ ☛ **6**

Al evaluar $\lim_{x\to c} f(x)$, es legítimo dividir numerador y denominador entre un factor común $x - c$, como lo hicimos en el ejemplo 1, a pesar de que cuando $x = c$, estos factores son cero. Esto se debe a que *el límite involucra el comportamiento de* f(x) *cerca de x = c, pero no se refiere al valor de* f *en* x = c. Mientras $x \neq c$, los factores del tipo $x - c$ pueden cancelarse. De hecho, el ejemplo 1 ilustró un caso en el cual $f(x)$ no estaba definida en $x = c$ y aún $\lim_{x\to c} f(x)$ existió.

Estudiemos la idea del límite desde el punto de vista de la gráfica de la función considerada. En primer término volvamos a nuestro ejemplo inicial en que $f(x) = 2x + 3$. La gráfica de esta función es una línea recta con pendiente 2 y ordenada al origen 3. Cuando $x = 1$, $y = 5$.

Considere cualquier sucesión de puntos $P_1, P_2, P_3, \ldots,$ sobre la gráfica (véase la figura 4) tales que las coordenadas x de los puntos se acercan a 1. Es claro que los puntos mismos deben estar cerca del punto (1, 5) de la gráfica, y sus coordenadas y se aproximan al valor límite 5. Esto corresponde a nuestra proposición anterior de que $\lim_{x\to 1} (2x + 3) = 5$.

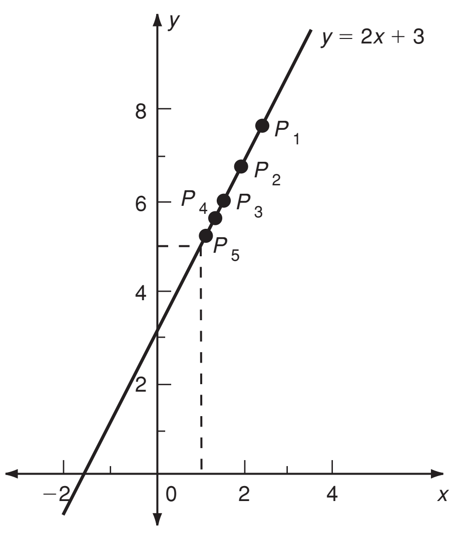


FIGURA 4

El ejemplo $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ es un poco diferente. Vimos antes que si $x \neq 3$, podemos escribir $f(x) = x + 3$. De modo que esta función también tiene una línea recta como gráfica, con pendiente 1 y ordenada al origen 3. Sin embargo, $f(x)$ no está definida en $x = 3$, por lo que el punto (3, 6) no pertenece a la gráfica. Este hecho se indica en la figura 5 usando un pequeño círculo en este punto sobre la línea recta. Otra vez, si consideramos una sucesión de puntos $P_1, P_2, P_3, \ldots,$ sobre la

Respuesta *a*) 4 *b*) $-\frac{1}{2}$

gráfica con coordenadas x aproximándose a 3, entonces los puntos mismos deben acercarse al punto (3, 6), a pesar de que este punto no pertenece a la gráfica. Así, a pesar de que $f(3)$ no existe, el límite de $f(x)$ cuando $x \to 3$ existe y es igual a 6.

En el primero de estos dos ejemplos, tenemos una función $f(x) = 2x + 3$ para la cual el límite cuando $x \to 1$ existe y es igual al valor de la función en $x = 1$. En el segundo ejemplo, tenemos una función $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ tal que el límite cuando $x \to 3$ existe, pero este límite no es igual a $f(3)$ (de hecho, $f(3)$ no existe en este caso). La primera función se dice que es *continua* en $x = 1$; la segunda función es *discontinua* en $x = 3$. Informalmente, una función es continua en $x = c$ si su gráfica pasa a través del valor de x sin un salto o ruptura. Por ejemplo, la gráfica de la figura 5 no pasa por el valor de $x = 3$ sin una ruptura porque el punto (3, 6) no forma parte de la gráfica. Más formalmente, tenemos la siguiente definición:

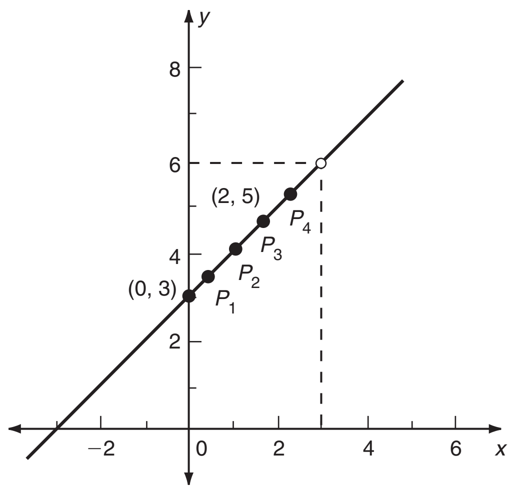


FIGURA 5

DEFINICIÓN Una función $f(x)$ es *continua* en $x = c$ si tanto $f(c)$ como $\lim_{x \to c} f(x)$ existen y son iguales.

Analizaremos funciones continuas y discontinuas con mayor detalle en la sección 11-6.

El cálculo de los valores límites de funciones en casos más complicados descansa en varios teoremas que se refieren a límites. Establecemos ahora estos teoremas e ilustraremos su aplicación con varios ejemplos, pero no daremos demostraciones de ellos.

TEOREMA 1 Si m, b y c son tres constantes cualesquiera, entonces,

$$\boxed{\lim_{x \to c} (mx + b) = mc + b}$$

☛ **7.** Utilizando los teoremas 1 y 2, evalúe los límites siguientes:
a) $\lim_{x\to 3} (2x + 3)^2$ *b*) $\lim_{x\to 4} 2\sqrt{x}$
c) $\lim_{x\to 1} \frac{4}{x + 1}$

Observemos que la función $y = mx + b$ tiene como gráfica una línea recta con pendiente m y ordenada al origen b. Cuando $x = c$, y siempre está definida y $y = mc + b$. Cuando x tiende a c, el punto (x, y) sobre la gráfica de esta función se acerca cada vez más al punto $(c, mc + b)$. Esto es, el valor de y está cada vez más cerca de $mc + b$, como se estableció en el teorema.

EJEMPLO 2

a) Tomando $m = 2$, $b = 3$ y $c = 1$, obtenemos el resultado

$$\lim_{x\to 1} (2x + 3) = 2(1) + 3 = 5$$

que ya dimos antes.

b) Ahora con $m = 1$, $b = 3$ y $c = 3$, tenemos que

$$\lim_{x\to 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$

reproduciendo otra vez un resultado ya obtenido.

TEOREMA 2

a) $\lim_{x\to c} bf(x) = b \lim_{x\to c} f(x)$

b) $\lim_{x\to c} [f(x)]^n = [\lim_{x\to c} f(x)]^n$ si $[f(x)]^n$ está definida en x cercano a $x = c$

EJEMPLO 3

a)
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3} x^2 &= [\lim_{x\to 3} x]^2 && \text{(por teorema 2(b))} \\ &= 3^2 && \text{(por teorema 1)} \\ &= 9 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} 5(2x + 3)^{-1} &= 5 \lim_{x\to 1} (2x + 3)^{-1} && \text{(por teorema 2(a))} \\ &= 5[\lim_{x\to 1} (2x + 3)]^{-1} && \text{(por teorema 2(b))} \\ &= 5[2(1) + 3]^{-1} && \text{(por el teorema 1)} \\ &= 5(5)^{-1} = 1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3} \frac{(x^2 - 9)^3}{12(x - 3)^3} &= \frac{1}{12} \lim_{x\to 3} \left(\frac{x^2 - 9}{x - 3}\right)^3 && \text{(por teorema 2(a))} \\ &= \frac{1}{12} \left[\lim_{x\to 3} \left(\frac{x^2 - 9}{x - 3}\right)\right]^3 && \text{(por el teorema 2(b))} \\ &= \frac{1}{12} (6)^3 && \text{(por el resultado del ejemplo 1)} \\ &= 18 \end{aligned}$$

☛ **7**

Respuesta *a*) 81 *b*) 4 *c*) 2

☛ **8.** Utilizando los teoremas 1, 2 y 3, evalúe los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 3} [(x + 3)(1 - x)]$

b) $\lim_{x\to -1} \sqrt{\dfrac{3 - x}{x^3 + 2}}$

c) $\lim_{x\to 2} (x + 2x^{-1})$

Respuesta *a*) –12 *b*) 2 *c*) 3

TEOREMA 3

a) $\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$

b) $\lim_{x\to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$

c) $\lim_{x\to c} [f(x)g(x)] = [\lim_{x\to c} f(x)][\lim_{x\to c} g(x)]$

d) $\lim_{x\to c} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{[\lim_{x\to c} f(x)]}{[\lim_{x\to c} g(x)]}$

con tal de que existan los límites del lado derecho y, en el caso *d*), el denominador del lado derecho sea distinto de cero.

EJEMPLO 4

a)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} (x^2 + 2x) &= \lim_{x\to 3} x^2 + \lim_{x\to 3} 2x && \text{(por teorema 3(a))}\\ &= 3^2 + 2(3) && \text{(por ejemplo 3(a)}\\ &= 9 + 6 = 15 && \text{y teorema 1)}\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\left(2x^3 - \frac{3}{x-1}\right) &= \lim_{x\to -1} (2x^3) - \lim_{x\to -1}\left(\frac{3}{x-1}\right) && \text{(por teorema 3(b))}\\ &= 2\lim_{x\to -1} x^3 - 3\lim_{x\to -1} (x-1)^{-1} && \text{(por teorema 2(a))}\\ &= 2[\lim_{x\to -1} x]^3 - 3[\lim_{x\to -1} (x-1)]^{-1} && \text{(por teorema 2(b))}\\ &= 2(-1)^3 - 3(-1-1)^{-1} && \text{(por teorema 1)}\\ &= -2 + \tfrac{3}{2} = -\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} \frac{(x-1)(x^2-9)}{x-3} &= \lim_{x\to 3} (x-1) \lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right) && \text{(por teorema 3(c))}\\ &= \lim_{x\to 3} (x-1) \lim_{x\to 3} (x+3)\\ &= (3-1)(3+3) = 12 && \text{(por teorema 1)}\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^2}{x-1}\right) &= \frac{\lim_{x\to -2} x^2}{\lim_{x\to -2} (x-1)} && \text{(por teorema 3(d))}\\ &= \frac{\left(\lim_{x\to -2} x\right)^2}{(-2-1)} && \text{(por teorema 2(b) y 1)}\\ &= \frac{(-2)^2}{-3} && \text{(por teorema 1)}\\ &= -\tfrac{4}{3}\end{aligned}$$

☛ **8**

☛ **9.** Evalúe los siguientes límites por medio de sustitución del valor límite de x, siempre que eso sea válido:

a) $\lim_{x\to 3} [(x + 3)(1 - x)]$

b) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ *c*) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

d) $\lim_{x\to 2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$

Sin duda, el lector habrá notado que en la mayoría de estos ejemplos, el valor límite de la función considerada pudo obtenerse con la simple sustitución del valor límite de x en la función dada. Este método de sustitución siempre producirá la respuesta correcta cuando la función cuyo límite se está evaluando sea continua. Esto se sigue directamente de la definición de función continua. Todos los polinomios son funciones continuas y cualquier función racional es continua, excepto en los puntos en que el denominador se hace cero. De modo que en el caso de una función racional, siempre podemos evaluar un valor límite por sustitución con tal de que el resultado después de la sustitución sea un número bien definido y no uno de la forma $\frac{0}{0}$ o constante$/0$. Esta misma observación se aplica a funciones algebraicas de x a condición de que estén definidas en algún intervalo que incluya el valor a que tiende x. ☛ **9**

En los ejemplos que siguen, determinaremos límites por sustitución. Sin embargo, recomendamos al lector que haga un buen número de ejercicios usando los teoremas anteriores en la forma ilustrada por los ejemplos anteriores. La razón de esto es que nos encontraremos casos en los últimos capítulos en que la utilización de los teoremas desempeña una parte esencial y los límites no podrán evaluarse por sustitución. (Véase los ejercicios 47 y 48 como un ejemplo). Sólo después de haber dominado la aplicación de los teoremas deberá adoptar el lector el método de sustitución como un medio de evaluar límites.

Puede suceder que al sustituir $x = c$ en $f(x)$, obtengamos un resultado del tipo constante$/0$. Por ejemplo, suponga que tratamos de evaluar $\lim_{x\to 0} (1/x)$. Al sustituir $x = 0$, obtendríamos el resultado $1/0$, que no está definido. En tal caso, diríamos que *el límite no existe*. La función $1/x$ se hace indefinidamente grande cuando x se acerca a cero, y no se aproxima a algún valor límite. Esto puede advertirse de la tabla 4, en que aparece una serie de valores de $1/x$ cuando x toma una sucesión de valores más y más pequeños. Es claro que los valores correspondientes de $1/x$ se hacen cada vez más grandes y no pueden aproximarse a algún valor límite finito.

TABLA 4

x	1	0.5	0.1	0.02	0.002	0.0002
$\frac{1}{x}$	1	2	10	50	500	5000

Otro caso muy importante que puede surgir es el de obtener el resultado $0/0$, que está indefinido, al sustituir $x = c$ en $f(x)$. A menudo, límites de esta clase pueden evaluarse cancelando factores del tipo $(x - c)$ del numerador y denominador de fracciones que ocurran en $f(x)$. Esta técnica se ilustró ya en esta sección y se darán otros ejemplos ahora.

EJEMPLO 5 Calcule $\lim_{x\to -1} f(x)$ en el caso de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{1 - x^2} & (x \neq -1) \\ 0 & (x = -1) \end{cases}$$

Respuesta *a*) -12 *b*) La sustitución no se permite *c*) 0 *d*) el límite no existe.

Solución Haciendo $x = -1$ en la fórmula válida para $f(x)$ cuando $x \neq -1$, tenemos

$$\frac{(-1)^2 + 3(-1) + 2}{1 - (-1)^2} = \frac{1 - 3 + 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

En consecuencia, factorizamos numerador y denominador y cancelamos el factor $x + 1$ antes de sustituir $x = -1$.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{1 - x^2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x + 1)(x + 2)}{(1 - x)(1 + x)} = \lim_{x\to -1} \frac{x + 2}{1 - x} = \frac{-1 + 2}{1 -(-1)} = \frac{1}{2}$$

El hecho de que $f(-1) = 0$ es irrelevante para el límite. (Recuerde que el valor del límite está determinado por el comportamiento de la función cerca del punto límite c, pero no está influido en absoluto por el valor de f en c).

☛ **10.** Después de los ejemplos 5 y 6, evalúe los límites

a) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6}$

b) $\lim_{x\to 1} \frac{1 - \sqrt{2 - x}}{x - 1}$

c) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{2 - \sqrt{8 - x}}$

EJEMPLO 6 Determine

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$$

Solución Cuando 0 sustituye a x, obtenemos

$$\frac{\sqrt{1 + 0} - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

En este caso, no podemos factorizar el numerador directamente para obtener el factor x que es necesario con el objetivo de cancelar la x del denominador. Superamos esta dificultad racionalizando el numerador, que se logra multiplicando numerador y denominador por $(\sqrt{1 + x} + 1)$.*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1 + x} + 1}{\sqrt{1 + x} + 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1 + x})^2 - 1^2}{x(\sqrt{1 + x} + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x) - 1}{x(\sqrt{1 + x} + 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{1 + x} + 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1 + x} + 1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

☛ **10**

Obsérvese que en estos ejemplos, el límite final se evaluó por sustitución. En realidad, los teoremas sobre límites fundamentan este procedimiento de sustitución.

Respuesta *a*) -4 *b*) $\frac{1}{2}$ *c*) 20

*Véase la sección 1-5.

EJERCICIOS 11-2

(1-30) Evalúe los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to 2} (3x^2 + 7x - 1)$

2. $\lim_{x\to -1} (2x^2 + 3x + 1)$

3. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x+1}{x-2}$

4. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2+1}{x+3}$

5. $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{\sqrt{x^2+11}}$

6. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4}$

7. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x^2+3x+2}$

8. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$

9. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$

10. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$

11. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}$

12. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$

13. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

14. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2+4x+3}{x^2+3x+2}$

15. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

16. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

17. $\lim_{x\to 9} \dfrac{9-x}{\sqrt{x}-3}$

18. $\lim_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x^2-81}$

19. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

20. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2-4}$

***21.** $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^3-64}$

***22.** $\lim_{x\to 9} \dfrac{x^3-729}{\sqrt{x}-3}$

23. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x-2}$

24. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x^2+5x+7}{x}$

25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

26. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$

27. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$

28. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+2x}$

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{4+x}-2}$

30. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2-x}-1}{2-\sqrt{x+3}}$

(31-36) Calcule $\lim_{x\to c} f(x)$, en donde $f(x)$ y c se dan abajo.

31. $f(x) = \begin{cases} 3x-4 & \text{para } x \neq 2 \\ 5 & \text{para } x = 2 \end{cases}; \quad c = 2$

32. $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+1 & \text{para } x \neq 1 \\ 7 & \text{para } x = 1 \end{cases}; \quad c = 1$

33. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{para } x \neq 2 \\ 3 & \text{para } x = 2 \end{cases}; \quad c = 2$

34. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3} & \text{para } x \neq -3 \\ -5 & \text{para } x = -3 \end{cases}; \quad c = -3$

35. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{para } x \neq 1 \\ 3 & \text{para } x = 1 \end{cases}; \quad c = 1$

36. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3} & \text{para } x \neq 9 \\ 7 & \text{para } x = 9 \end{cases}; \quad c = 9$

(37-41) Las funciones $f(x)$ y los valores de a están dados abajo. Evalúe.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

en cada caso.

37. $f(x) = 2x^2 + 3x + 1, \quad a = 1$

38. $f(x) = 3x^2 - 5x + 7, \quad a = 2$

39. $f(x) = x^2 - 1, \quad a = 0$

40. $f(x) = x^2 + x + 1, \quad a = x$

41. $f(x) = 2x^2 + 5x + 1, \quad a = x$

42. Una partícula cae del reposo bajo la acción de la gravedad. ¿Cuál es la velocidad instantánea después de $1\frac{1}{2}$ segundos?

43. Una pelota se arroja verticalmente hacia arriba con una velocidad de 40 pies/segundo. La distancia recorrida en pies después de t segundos está dada por la fórmula $s = 40t - 16t^2$. Determine la velocidad instantánea:

a) Después de 1 segundo *b*) Después de 2 segundos

44. En el ejercicio 43, calcule la velocidad instantánea después de t segundos. ¿Qué ocurre cuando $t = \frac{5}{4}$? ¿Cuál es la velocidad instantánea cuando $t = \frac{5}{2}$?

45. En este ejercicio, con su calculadora evalúe la función

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$$

en $x = 1.2, 1.1, 1.05, 1.01, 1.005$ y 1.001. Demuestre que el $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{4}{3}$. ¿Se acercan sus valores calculados a este límite?

46. Use una calculadora para evaluar

$$f(x) = \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$$

para $x = 0.9, 0.99, 0.999$ y 0.9999 y para $x = 1.1., 1.01, 1.001$ y 1.0001. Pruebe que $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{4}$. ¿Se acercan los valores calculados a este límite?

47. Use una calculadora para evaluar la función

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

para $x = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ y 0.00001. ¿Están los valores calculados cada vez más cerca de algún número? ¿Cuánto cree que vale $\lim_{x \to 0} f(x)$?

48. Repita el ejercicio 45 con la función

$$f(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

¿A qué piensa que sea igual $\lim_{x \to 1} f(x)$?

■ 11-3 LA DERIVADA

En la sección 11-2, vimos cómo la definición de velocidad instantánea de un móvil nos conduce de manera natural a un proceso de límite. La velocidad promedio $\Delta s/\Delta t$ se calcula, en primer término, para un lapso de duración entre t y $t + \Delta t$, y luego se calcula su valor límite cuando $\Delta t \to 0$. Podríamos describir $\Delta s/\Delta t$ como la tasa de cambio promedio de la posición s con respecto al tiempo, y su límite es la tasa de cambio promedio de s con respecto a t.

Ahora bien, existen muchos ejemplos de procesos que se desarrollan en el tiempo y podemos dar definiciones correspondientes de la tasa de cambio instantánea de las variables asociadas.

EJEMPLO 1 ***(Crecimiento de la población)*** Durante el periodo de 10 años de 1970 a 1980, se encontró que la población de cierto país estaba dada por la fórmula

$$P(t) = 1 + 0.03t + 0.001t^2$$

donde P está en millones y t es el tiempo medido en años desde el inicio de 1970. Calcule la tasa de crecimiento instantánea al inicio de 1975.

Solución Queremos la tasa de crecimiento en $t = 5$. El incremento de P entre $t = 5$ y $t = 5 + \Delta t$ es

$$\begin{aligned}
\Delta P &= P(5 + \Delta t) - P(5) \\
&= [1 + 0.03(5 + \Delta t) + 0.001(5 + \Delta t)^2] - [1 + 0.3(5) + 0.001(5)^2] \\
&= 1 + 0.15 + 0.03\ \Delta t + 0.001(25 + 10\ \Delta t + (\Delta t)^2) \\
&\quad -[1 + 0.15 + 0.001(25)] \\
&= 0.04\ \Delta t + 0.001\ (\Delta t)^2
\end{aligned}$$

La tasa de crecimiento promedio durante este intervalo de tiempo está dada por

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = 0.04 + 0.001\ \Delta t$$

Para obtener la tasa de crecimiento instantánea, debemos tomar el límite cuando $\Delta t \to 0$.

☛ **11.** En el ejemplo 1, encuentre la tasa de crecimiento instantánea cuando
a) $t = 0$ *b*) $t = 10$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} [0.04 + 0.001\ \Delta t] = 0.04$$

Así, al inicio de 1975, la población de la ciudad estaba creciendo a una tasa de 0.04 millones anualmente (esto es, 40,000 por año). ☛ **11**

La tasa de cambio instantánea de una función tal como la del ejemplo 1 es un caso de lo que llamamos la *derivada* de una función. Daremos ahora una definición formal de la derivada.

DEFINICIÓN Sea $y = f(x)$ una función dada. La **derivada de y con respecto a x**, denotada por dy/dx, se define por

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

o bien,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

con tal de que este límite exista.

A la derivada también se le da el nombre de **coeficiente diferencial** y la operación de calcular la derivada de una función se denomina **diferenciación**.

Si la derivada de una función existe en un punto particular, decimos que f es **diferenciable** en tal punto.

La derivada de $y = f(x)$ con respecto a x también se denota por uno de los siguientes símbolos:

$$\frac{d}{dx}(y), \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}(f), \quad y', \quad f'(x), \quad D_x y, \quad D_x f$$

Cada una de estas notaciones indica exactamente lo mismo que dy/dx.

Observación dy/dx representa un solo símbolo y no deberá interpretarse como el cociente de las cantidades dy y dx. Con la finalidad de ampliar la notación, note que dy/dx indica la derivada de y con respecto a x si y es una función de la variable independiente x; dC/dq denota la derivada de C con respecto a q si C es una función de la variable independiente q; dx/du indica la derivada de x con respecto a u si x es una función de la variable independiente u. De la definición,

Respuesta *a*) 0.03 *b*) 0.05

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \frac{dC}{dq} = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta q} \quad \text{y} \quad \frac{dx}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta u}$$

Con el propósito de calcular la derivada dy/dx, procedemos de la siguiente manera:

1. Calculamos $y = f(x)$ y $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

2. Restamos la primera cantidad de la segunda a fin de obtener Δy y simplificamos el resultado.

3. Dividimos Δy entre Δx y entonces tomamos el límite de la expresión resultante cuando $\Delta x \to 0$.

El valor de dy/dx depende de la elección de x. Esto se enfatiza cuando utilizamos la notación $f'(x)$, la cual indica que la derivada $f'(x)$ es una función de x. El valor de la derivada en un punto particular, digamos $x = 2$, entonces es $f'(2)$. Por ejemplo, en el ejemplo 1 evaluamos dP/dt en $t = 5$, o de forma equivalente, $P'(5)$.

☛ **12.** Determine $f'(x)$ cuando $f(x) = 2 - x^2$. Evalúe $f'(3)$ y $f'(-2)$

Respuesta $f'(x) = -2x$, $f'(3) = -6$, $f'(-2) = 4$

EJEMPLO 2 Determine $f'(x)$ si $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$. Evalúe $f'(2)$ y $f'(-2)$.

Solución Sea $y = f(x) = 2x^2 + 3x + 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} y + \Delta y = f(x + \Delta x) &= 2(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) + 1 \\ &= 2[x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] + 3x + 3\Delta x + 1 \\ &= 2x^2 + 4x \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x + 1 \\ &= 2x^2 + 3x + 1 + \Delta x(4x + 3 + 2\Delta x) \end{aligned}$$

Restando y de $y + \Delta y$, tenemos

$$\Delta y = \Delta x(4x + 3 + 2\Delta x)$$

y así $\Delta y/\Delta x = 4x + 3 + 2\Delta x$. Por lo que

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (4x + 3 + 2\Delta x) = 4x + 3$$

Esto es, $f'(x) = 4x + 3$
Cuando $x = 2$, $f'(2) = 4(2) + 3 = 11$
cuando $x = -2$, $f'(-2) = 4(-2) + 3 = -5$

☛ **13.** Determine $f'(x)$ cuando $f(x) = x^3$. Evalúe $f'(2)$ y $f'(-2)$

Respuesta $f'(x) = 3x^2$, $f'(2) = 12$, $f'(-2) = 12$

***Observación*:** Para determinar $f'(c)$ no debemos encontrar primero $f(c)$ y luego derivarla: $f'(c) \neq (d/dx)\, f(c)$. ☛ **12, 13**

EJEMPLO 3 Determine $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt{x}$

Solución Sea $y = f(x) = \sqrt{x}$. Entonces $y + \Delta y = f'(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$, de modo que

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

Por tanto,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

Deseamos tomar el límite cuando $\Delta x \to 0$; antes de hacerlo, debemos racionalizar el numerador. Hacemos esto multiplicando el numerador y el denominador por $(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})\,(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x})^2 - (\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

De aquí que $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$

EJEMPLO 4 Evalúe dy/dx para la función cúbica

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

donde A, B, C y D son cuatro constantes.

Solución Reemplazando x por $x + \Delta x$, encontramos que

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= A(x + \Delta x\,)^3 + B\,(x + \Delta x)^2 + C(x + \Delta x) + D \\ &= A[x^3 + 3x^2\,\Delta x + 3x\,(\Delta x)^2 + \Delta x)^3] \\ &\quad + B[x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2] + C(x + \Delta x) + D \end{aligned}$$

Ahora, si restamos la expresión dada para y, encontramos que

$$\begin{aligned} \Delta y &= (y + \Delta y) - y \\ &= A[x^3 + 3x^2\,\Delta x + 3x\,(\Delta x)^2 + \Delta x)^3] \\ &\quad + B[x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2] \\ &\quad + C(x + \Delta x) + D - (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \\ &= A[3x^2\,\Delta x + 3x\,(\Delta x)^2 + \Delta x)^3] + B[(2x\,\Delta x + \Delta x)^2] + C\,\Delta x \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A[\,3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2] + B(2x + \Delta x) + C$$

Permitiendo que Δx se aproxime a cero, vemos que en el límite, los tres términos de la derecha que incluyen Δx como factor se aproximan a cero. Los restantes términos dan el siguiente resultado:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 3\,Ax^2 + 2Bx + C \tag{1}$$

Con base en el resultado de este ejemplo, es posible recuperar algunos de los resultados de los ejemplos anteriores. Por ejemplo, si tomamos $A = 0$, $B = 2$, $C = 3$

y $D = 1$, la función cúbica en el ejemplo 4 se transforma en $y = 0x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 2x^2 + 3x + 1$, que se analizó en el ejemplo 2. De la ecuación (1),

$$\frac{dy}{dx} = 3Ax^2 + 2Bx + C = 3(0)x^2 + 2(2)x + 3 = 4x + 3$$

lo cual coincide con el resultado del ejemplo 2.

Interpretación geométrica

Ya hemos visto que cuando la variable independiente de una función $y = f(t)$ representa el tiempo, la derivada dy/dt da la tasa de cambio instantánea de y. Por ejemplo, si $s = f(t)$ representa la distancia recorrida por un móvil, ds/dt da la velocidad instantánea. Aparte de esta clase de aplicación de la derivada, sin embargo, también tiene una interpretación desde el punto de vista geométrico.

Si P y Q son los dos puntos $(x, f(x))$ y $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ sobre la gráfica de $y = f(x)$, entonces, como se estableció en la sección 11-1, la razón

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

representa la pendiente del segmento rectilíneo PQ. A medida que Δx se hace cada vez más pequeño, el punto Q se aproxima cada vez más a P y el segmento secante PQ está cada vez más cerca de ser tangente. Cuando $\Delta x \to 0$, la pendiente de la secante PQ se aproxima a la pendiente de la línea tangente en P. Así que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

representa la pendiente de la línea tangente a $y = f(x)$ en el punto $P(x, f(x))$. (Véase la figura 6). Con tal de que la curva $y = f(x)$ sea "suave" en P; esto es, si podemos dibujar una tangente que no sea vertical en P, el límite existirá.

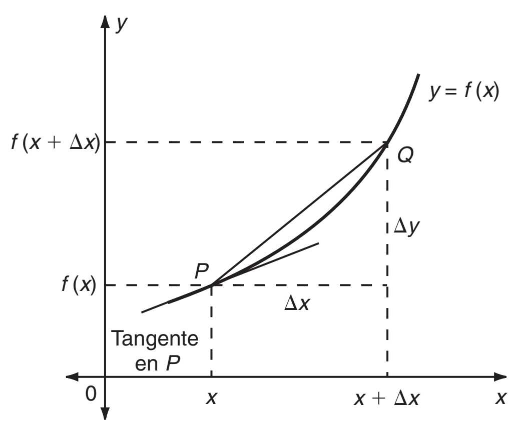


FIGURA 6

☛ **14.** En el ejemplo 4, encuentre la ecuación de la recta tangente en *a*) (1, 1) *b*) (9, 3)

Respuesta *a*) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

b) $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$

☛ **15.** Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + x$ en el punto *a*) (1, 2) *b*) $(-1, 0)$

Respuesta *a*) $y = 3x - 1$
b) $y = -x - 1$

EJEMPLO 5 Determine la pendiente de la tangente y la ecuación de la recta tangente a la gráfica $y = \sqrt{x}$ en el punto (4, 2) y en el punto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

Solución En el ejemplo 3, demostramos que si $f(x) = \sqrt{x}$ entonces $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$. Cuando $x = 4$, $f'(4) = 1/2\sqrt{4} = \frac{1}{4}$. Por lo que la pendiente de la tangente en (4, 2) es $\frac{1}{4}$.

Para obtener la ecuación de la recta tangente, podemos utilizar la fórmula punto-pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

con pendiente $m = \frac{1}{4}$ y $(x_1, y_1) = (4, 2)$. (Véase la figura 7). Obtenemos

$$y - 2 = \tfrac{1}{4}(x - 4)$$

$$y = \tfrac{1}{4}x + 1$$

que es la ecuación pedida.

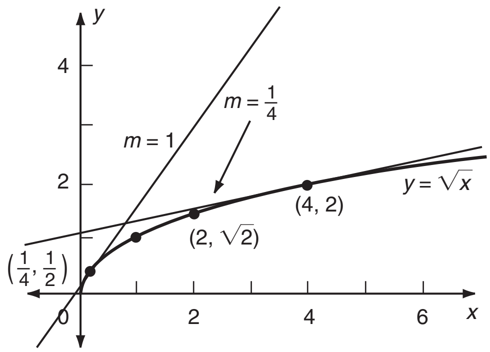


FIGURA 7

Cuando $x = \frac{1}{4}$, $f'(\frac{1}{4}) = 1/2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$. Así la pendiente de la tangente en $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ es 1. (Véase la figura 7). Con base en la fórmula punto-pendiente, su ecuación es

$$y - \tfrac{1}{2} = 1 \cdot (x - \tfrac{1}{4}) \quad \text{o} \quad y = x + \tfrac{1}{4}$$ ☛ **14, 15**

EJERCICIOS 11-3

(1-14) Calcule las derivadas de las siguientes funciones con respecto a las variables independientes según el caso.

1. $f(x) = 2x - 5$ **2.** $f(x) = 2 - 5x$

3. $g(x) = 7$ **4.** $g(t) = -3$

5. $f(x) = x^2$ **6.** $g(t) = 3t^2 + 1$

7. $f(u) = u^2 + u + 1$ **8.** $g(x) = x^2 - 3x + 7$

9. $h(x) = 7 - 3x^2$ **10.** $f(x) = 1/x$

11. $g(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ **12.** $h(u) = \dfrac{2}{1 - u}$

13. $f(t) = \dfrac{1}{2t + 3}$ **14.** $g(u) = \dfrac{u}{u + 1}$

15. Calcule dy/dx si:

a) $y = 3 - 2x^2$ *b*) $y = 3x + 7$

16. Determine du/dt si:

a) $u = 2t + 3$ *b)* $u = 1/(2t + 1)$

17. Encuentre dx/dy si:

a) $x = \sqrt{y}$ *b)* $x = (y + 1)/y^2$

18. Calcule dp/dq si:

a) $p = 1/(3 + 2q)$ *b)* $p = 1/\sqrt{q}$

19. Determine $f'(2)$ si $f(x) = 5 - 2x$

20. Calcule $g'(4)$ si $g(x) = (x + 1)^2$

21. Encuentre $F'(3)$ si $F(t) = t^2 - 3t$

22. Determine $G'(1)$ si $G(u) = u^2 - u + 3$

23. Calcule $h'(0)$ si $h(y) = y^2 + 7y$

24. Encuentre $H'(2)$ si $H(t) = 1/(t - 1)$

(25-32) Determine la pendiente de la tangente a las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados. Encuentre la ecuación de la línea tangente en cada caso.

25. $y = 3x^2 - 4$ en $x = 2$

26. $y = x^2 + x + 2$ en $x = -2$

27. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = 3$ 28. $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ en $x = 2$

29. $y = \dfrac{x + 1}{x}$ en $x = 1$ 30. $f(x) = \sqrt{x - 1}$ en $x = 5$

31. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ en $x = 2$

32. $g(t) = 5t^2 + 1$ en $t = -3$

33. *(Crecimiento de las ventas)* El volumen de las ventas de un disco fonográfico particular está dado como una función del tiempo t por la fórmula

$$S(t) = 10{,}000 + 2000t - 200t^2$$

donde t se mide en semanas y S es el número de discos vendidos por semana. Determine la tasa en que S cambia cuando:

a) $t = 0$ *b)* $t = 4$ *c)* $t = 8$

34. *(Crecimiento de la población)* Cierta población crece de acuerdo con la fórmula

$$p(t) = 30{,}000 + 60t^2$$

donde t se mide en años. Calcule la tasa de crecimiento cuando:

a) $t = 2$ *b)* $t = 0$ *c)* $t = 5$

35. *(Reacción química)* Durante una reacción química en la cual una sustancia A se descompone, la masa (en gramos) de A restante en un tiempo t está dada por $m(t) = 9 - 3t + \frac{1}{4}t^2$. Encuentre $m'(t)$ e interprete esta cantidad. Evalúe $m(0)$, $m'(0)$, $m(6)$ y $m'(6)$.

■ 11-4 DERIVADAS DE FUNCIONES ELEVADAS A UNA POTENCIA

Por lo que se expuso en la sección 11-3 quedó claro que encontrar derivadas de funciones utilizando la propia definición de derivada no siempre es sencillo y, por lo general, lleva tiempo. Esta tarea puede simplificarse en forma apreciable usando ciertas fórmulas estándar. En esta sección, desarrollaremos fórmulas con el propósito de encontrar las derivadas de funciones elevadas a una potencia y combinaciones de ellas.

Empecemos regresando al ejemplo 4 de la sección 11-3. Considerando casos especiales de los coeficientes A, B, C y D en ese ejemplo, obtenemos los siguientes resultados.

TEOREMA 1

a) La derivada de una función constante es cero

b) Si $y = x$, entonces $dy/dx = 1$

c) Si $y = x^2$, entonces $dy/dx = 2x$

d) Si $y = x^3$, entonces $dy/dr = 3x^2$

DEMOSTRACIÓN

a) En la función $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, hagamos A, B y C iguales a cero. Entonces $y = D$, una función constante. La expresión general de dy/dx es $3Ax^2 + 2Bx + C$ (por el ejemplo 4 de la sección 11.3) y es cero cuando $A = B = C = 0$.

b) Si hacemos $A = B = D = 0$ y $C = 1$, obtenemos $y = x$ y $dy/dx = 1$, como se requería.

c) y *d*) se prueban en forma similar.

En términos geométricos, la parte *a*) del teorema 1 asegura que la pendiente de la línea $y = c$ es cero en todo punto de ella. Es obvio que esto es cierto porque la gráfica de $y = c$ es una línea horizontal, y cualquier línea horizontal tiene pendiente cero.

EJEMPLO 1 $\dfrac{d}{dx}(6) = 0$ y $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$

Con base en los resultados de las partes *a*) a *d*) del teorema 1, podemos observar cierto patrón en las derivadas de potencias de x, $y = x^n$. Tenemos el siguiente resultado que es válido para cualquier valor real de n.

$$\boxed{\text{Si } y = x^n, \text{ entonces } \frac{dy}{dx} = nx^{n-1} \qquad \text{(fórmula de la potencia)}}$$

Verbalmente, *con la finalidad de encontrar la derivada de cualquier potencia constante de* x, *reducimos la potencia de* x *en* 1 *y multiplicamos por el exponente original de* x.

Al final de esta sección, probaremos esta fórmula de la derivada de x^n en el caso de que n sea un entero positivo. Sin embargo, es válida para todos los valores reales de n.

EJEMPLO 2

a) $\dfrac{d}{dx}(x^7) = 7x^{7-1} = 7x^6$

b) $\dfrac{d}{dy}(y^{3/2}) = \frac{3}{2}y^{3/2-1} = \frac{3}{2}y^{1/2}$

c) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right) = \dfrac{d}{dt}(t^{-1/2}) = -\frac{1}{2}t^{-1/2-1} = -\frac{1}{2}t^{-3/2}$

d) $\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{1}{u^2}\right) = \dfrac{d}{du}(u^{-2}) = -2u^{-2-1} = -2u^{-3} = -\dfrac{2}{u^3}$

☛ **16.** Utilice la fórmula de la potencia para encontrar

a) $\frac{d}{dx}(x^4)$ *b*) $\frac{d}{dt}(\sqrt{t})$

c) $\frac{d}{du}(u^e)$ *d*) $\frac{d}{dx}(x^x)$

$$e)\ \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(x^1) = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1 \text{ (porque } x^0 = 1)$$

$$f)\ \frac{d}{dx}(x^{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$$ ☛ **16**

TEOREMA 2 Si $u(x)$ es una función diferenciable de x y c es una constante, entonces

$$\boxed{\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}}$$

Esto es, *la derivada del producto de una constante y una función de* x *es igual al producto de la constante y la derivada de la función*.

EJEMPLO 3

$$a)\ \frac{d}{dx}(cx^n) = c\frac{d}{dx}(x^n) = c(nx^{n-1}) = ncx^{n-1}$$

$$b)\ \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{t}\right) = \frac{d}{dt}(4t^{-1}) = 4\frac{d}{dt}(t^{-1}) = 4(-1 \cdot t^{-2}) = \frac{4}{t^2}$$

$$c)\ \frac{d}{du}(2\sqrt{u}) = \frac{d}{du}(2u^{1/2}) = 2\frac{d}{du}(u^{1/2}) = 2 \cdot \tfrac{1}{2}u^{-1/2} = u^{-1/2}$$

TEOREMA 3 Si $u(x)$ y $\upsilon(x)$ son dos funciones diferenciables de x, entonces,

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u + \upsilon) = \frac{du}{dx} + \frac{d\upsilon}{dx}}$$

En otras palabras, *la derivada de la suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas de las dos funciones*.

EJEMPLO 4 Calcule dy/dx si $y = x^2 + \sqrt{x}$

Solución La función dada es la suma de x^2 y $x^{1/2}$. En consecuencia, por el teorema 3, podemos diferenciar estas dos potencias por separado.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = 2x + \tfrac{1}{2}x^{-1/2}$$

Este teorema puede extenderse de inmediato a la suma de cualquier número de funciones y también a diferencias entre funciones. Por ejemplo,

Respuesta *a*) $4x^3$ *b*) $\frac{1}{2}t^{-1/2}$ *c*) eu^{e-1} *d*) la fórmula de la potencia no puede utilizarse cuando el exponente no es una constante. La respuesta *no* es $x \cdot x^{x-1}$

☛ **17.** Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$ si

a) $y = 4x^3 - \dfrac{2}{x^3}$

b) $y = x(2x^2 + 1)$

$$\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

etcétera.

EJEMPLO 5 Determine la derivada de $3x^4 - 5x^3 + 7x + 2$ con respecto a x.

Solución Sea $y = 3x^4 - 5x^3 + 7x + 2$. Se sigue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^4 - 5x^3 + 7x + 2) = \frac{d}{dx}(3x^4) - \frac{d}{dx}(5x^3) + \frac{d}{dx}(7x) + \frac{d}{dx}(2)$$

Usamos el teorema 3 para expresar la derivada de la suma $3x^4 - 5x^3 + 7x + 2$ como la suma de las derivadas de $3x^4$, $-5x^3$, $7x$ y 2. Calculando estas cuatro derivadas, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 3(4x^3) - 5(3x^2) + 7(1x^0) + 0 = 12x^3 - 15x^2 + 7$$

porque $x^0 = 1$. ☛ **17**

Respuesta

a) $12x^2 + \dfrac{6}{x^4}$

b) $6x^2 + 1$

Reconsidere el ejemplo 2 de la sección 11-3. Utilizando los métodos de esta sección podemos obtener la respuesta con mucho más facilidad que antes. Porque si $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$, entonces,

$$f'(x) = 2 \cdot 2x + 3 \cdot 1 + 0 = 4x + 3$$

Terminado.

Con frecuencia es necesario arreglar la forma algebraica de una función antes de que puedan aplicarse los teoremas. Expresiones en que aparecen paréntesis pueden derivarse después de eliminar los paréntesis. Por ejemplo, si deseamos calcular dy/dx cuando $y = x^2(2x - 3)$, en primer término escribimos $y = 2x^3 - 3x^2$. En esta forma, podemos derivar y como en el ejemplo 5, y obtener $dy/dx = 6x^2 - 6x$. O si $y = (x + 2)(x^2 - 3)$, empezamos desarrollando los productos, obteniendo $y = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$. A partir de esta etapa, procedemos otra vez como en el ejemplo 5 y obtenemos que $dy/dx = 3x^2 + 4x - 3$.

☛ **18.** Derive

a) $y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)(2 - x^2)$

b) $y = \dfrac{3t^2 - \sqrt{t}}{2t}$

En forma similar, podemos simplificar fracciones con denominadores monomiales antes de diferenciar. Por ejemplo, si

$$y = \frac{5t^4 + 7t^2 - 3}{2t^2}$$

escribimos primero $y = \frac{5}{2}t^2 + \frac{7}{2} - \frac{3}{2}t^{-2}$. Después de derivar los tres términos por separado,

$$\frac{dy}{dt} = 5t + 3t^{-3}$$ ☛ **18**

Respuesta

a) $1 - \dfrac{2}{x^2} - 3x^2$

b) $\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4}t^{-3/2}$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2 Sea $y = cu(x)$. Entonces si x se reemplaza por $x + \Delta x u$ se convierte en $u + \Delta u$ y en $y + \Delta y$, de modo que

$$y + \Delta y = cu(x + \Delta x) = c(u + \Delta u)$$

Restando, tenemos que $\Delta y = c(u + \Delta u) - cu = c\Delta u$. La división de ambos lados entre Δx nos da

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c\,\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$, tenemos que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(c\,\frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Esto es,

$$\frac{dy}{dx} = c\,\frac{du}{dx}$$

como se requería.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3 Sea $y = u(x) + v(x)$. Sea x dado un incremento Δx. Puesto que y, u y v son funciones de x, se incrementan en $y + \Delta y$, $u + \Delta u$ y $v + \Delta v$, en donde

$$y + \Delta y = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) = (u + \Delta u) + (v + \Delta v)$$

La resta de y a $y + \Delta y$ da

$$\Delta y = (u + \Delta u + v + \Delta v) - (u + v) = \Delta u + \Delta v$$

Dividiendo entre Δx, tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Si ahora hacemos que Δx tienda a cero, obtenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \qquad \text{(por el teorema 3(a), sección 11-2)}$$

Esto es,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

que es el resultado requerido.

Por último, probaremos la fórmula de las potencias cuando n es un entero positivo. La demostración dada utiliza el siguiente resultado del álgebra.

Si n es un entero positivo,

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + n^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Este resultado es fácil de verificar multiplicando las dos expresiones del lado derecho término a término. Debe observarse que el número de términos en el segundo paréntesis de la derecha es igual a n, la potencia de a y b en el lado izquierdo. Considere los siguientes ejemplos:

$$n = 2: \quad a^2 - b^2 = (a - b)\underbrace{(a + b)}_{\text{2 términos}}$$

$$n = 3: \quad a^3 - b^3 = (a - b)\underbrace{(a^2 + ab + b^2)}_{\text{3 términos}}$$

$$n = 4: \quad a^4 - b^4 = (a - b)\underbrace{(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)}_{\text{4, términos, etcétera}}\text{, etcétera.}$$

TEOREMA 4 La derivada de x^n con respecto a x es nx^{n-1}, en donde n es un entero positivo.

DEMOSTRACIÓN Sea $y = x^n$. Cuando x cambia a $x + \Delta x$, y se incrementa a $y + \Delta y$, en donde

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$$

La sustracción del valor de y de $y + \Delta y$ nos da

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

Con objeto de simplificar esta expresión de Δy, usamos la identidad algebraica que se dio antes, haciendo $a = x + \Delta x$ y $b = x$. Así pues, $a - b = (x + \Delta x) - x = \Delta x$, de modo que

$$\Delta y = \Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \cdots + (x + \Delta x) \cdot x^{n-2} + x^{n-1}]$$

Dividiendo ambos lados entre Δx y tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \cdots + (x + \Delta x) \cdot x^{n-2} + x^{n-1}]$$

Ahora cuando $\Delta x \to 0$, cada término de los paréntesis se aproxima al límite x^{n-1}. Por ejemplo, el segundo término $(x + \Delta x)^{n-2} \cdot x$ se aproxima a $x^{n-2} \cdot x = x^{n-1}$ cuando $\Delta x \to 0$. Además, hay n de tales términos que están sumados. Así, que

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{n \text{ términos}} = nx^{n-1}$$

como se requería.

EJERCICIOS 11-4

(1-46) Derive las siguientes expresiones.

1. x^5

2. $x^{\sqrt{3}}$

3. $\frac{1}{t^3}$

4. $\frac{4}{u^4}$

5. $\frac{1}{5u^5}$

6. $\frac{x^7}{7}$

7. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

8. $2x - x^3$

9. $4x^3 - 3x^2 + 7$

10. $5 - 2x^2 + x^4$

11. $3x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 8$

12. $4x^3 + 2 + \frac{1}{x}$

13. $3u^2 + \frac{3}{u^2}$

14. $\frac{x^6}{6} + \frac{6}{x^6}$

15. $x^{1.2} + \frac{1}{x^{0.6}}$

16. $x^{0.4} - x^{-0.4}$

17. $2\sqrt{x} + 2/\sqrt{x}$

18. $x^7 + \frac{1}{x^7} + 7x + \frac{7}{x} + 7$

19. $2\sqrt{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x^3}}$

20. $2\sqrt{t} - \frac{3}{\sqrt[3]{t}}$

21. $2x^{3/2} + 4x^{5/4}$

22. $\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

23. $3x^4 + (2x - 1)^2$

24. $(y - 2)(2y - 3)$

25. $(x - 7)(2x - 9)$

26. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

27. $(u + 1)(2u + 1)$

28. $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

29. $(t + 1)(3t - 1)^2$

30. $(u - 2)^3$

31. $(x + 2)^3$

32. $(x + 1)(x - 1)^2$

33. $\left(\frac{x + 1}{x}\right)^3$

34. $\left(\frac{2t - 1}{2t}\right)^3$

35. $\left(\frac{y + 2}{y}\right)^3 + \left(\frac{y - 2}{y}\right)^3$

36. $\frac{2y^2 + 3y - 7}{y}$

37. $\frac{(x + 1)^2}{x}$

38. $\frac{x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x}}$

39. $\frac{t + 3/t}{\sqrt{t}}$

40. $\frac{(x + 1)^2 + (x - 1)^2}{x^2}$

41. $\frac{(2t + 3)^2 - (2t - 3)^2}{4t}$

42. $x^3 - \frac{x^{1.6}}{x^{2.3}}$

43. $\sqrt{2y} + (3y)^{-1}$

44. $(8y)^{2/3} + (8y)^{-2/3}$

45. $(16t)^{3/4} - (16t)^{-3/4}$

46. $\sqrt[3]{27t^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{27t^2}}$

47. Calcule dy/dx si $y = x^3 + 1/x^3$

48. Determine du/dx si $u = x^2 - 7x + 5/x$

49. Calcule dy/du si $y = u^3 - 5u^2 + \frac{7}{3u^2} + 6$

50. Determine dx/dt si $x = (t^3 - 5t^2 + 7t - 1)/t^2$

51. Si $y = \sqrt{x}$, pruebe que $2y(dy/dx) = 1$

52. Si $u = 1/\sqrt{x}$, pruebe que $2u^{-3}\,(du/dx) + 1 = 0$

(53-56) Determine la ecuación de la línea tangente a la gráfica de las funciones siguientes en los puntos indicados.

53. $f(x) = x^2 - 3x + 4$ en $(1, 2)$

54. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ en $(-1, 2)$

55. $f(x) = \frac{2}{x}$ en $x = -2$

56. $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$ en $x = 1$

57. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = x^2 - 3x + 7$ donde la recta tangente sea paralela a la recta $x - y + 4 = 0$

58. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $f(x) = x^3 - 5x + 2$ donde la recta tangente sea perpendicular a la recta $x + 7y + 4 = 0$

59. *(Móvil)* La distancia recorrida por un móvil al tiempo t es igual a $2t^3 - t^{1/2}$. Calcule la velocidad instantánea:

a) Al tiempo t *b*) En el instante $t = 4$

60. *(Proyectiles)* Una partícula se lanza directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 60 pies/segundo. Después de t segundos, su altura sobre el nivel del suelo está dada por $s = 60t - 16t^2$. Calcule su velocidad instantánea después de t segundos. ¿Qué tiene de especial el instante $t = \frac{15}{8}$?

61. *(Crecimiento del PNB)* En el ejercicio 22 de la sección 11-1, calcule las tasas de crecimiento instantáneas del PNB en:

***a*)** 1970 ***b*)** 1980 ***c*)** 1990

(La respuesta debe darse en miles de millones de dólares por año).

62. *(Crecimiento de población)* Al principio de un experimento se encontró que en un cultivo de bacterias había 10,000 individuos. Se observó el crecimiento de la población y se encontró que en un tiempo posterior t (horas) después de empezado el experimento, el tamaño de la población $p(t)$ se podía expresar por la fórmula

$$p(t) = 2500\,(2 + t)^2$$

Determine la fórmula de la razón de crecimiento de la población en cualquier tiempo t y en particular calcule la razón de crecimiento para $t = 15$ minutos y para $t = 2$ horas.

63. *(Botánica)* La proporción de semillas de una especie de árbol que disemina una distancia mayor que r, a partir de la base del árbol, está dada por

$$p(r) = \frac{3}{4}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2} + \frac{1}{4}\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

donde r es una constante. Encuentre la razón de cambio de la proporción con respecto a la distancia y calcule $p'(2r_0)$.

64. *(Física)* Durante cambios rápidos (adiabáticos) de presión, la presión ρ y la densidad ρ de un gas varía de acuerdo con la ley $p\rho^{-\gamma} = c$ donde γ y c son constantes. Calcule $dp/d\rho$.

65. *(Bioquímica)* Según la ley de Schütz-Borisoff, la cantidad y de sustrato transformada por una enzima en un intervalo de tiempo t está dada por $y = k\sqrt{cat}$, donde c es la concentración de la enzima, a es la concentración inicial de sustrato y k es una constante. ¿Cuál es la razón a la cual el sustrato está siendo transformado?

66. *(Proyectiles)* Una pelota es lanzada al aire a una velocidad de 40 pies por segundo con un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. Si tomamos el eje x como horizontal y el eje y como vertical, el origen como el punto inicial del vuelo de la pelota, entonces la posición de la pelota en el tiempo t está dada por $x = 20\sqrt{2}\,t$, $y = 20\sqrt{2}\,t - 16t^2$. Calcule la pendiente de la trayectoria t segundos después de haberse lanzado la pelota. ¿Para cuál valor de t la pendiente es cero? (*Sugerencia*: Exprese y en términos de x para eliminar a t).

67. *(Crecimiento de células)* La masa de un organismo unicelular crece con el tiempo t de acuerdo con la fórmula $m(t) = 2 + 6t + 3t^2$. Encuentre $m'(t)$ y evalúe $m(2)$ y $m'(2)$. Interprete estos valores.

68. *(Epidemias)* Una enfermedad infecciosa y debilitante se propaga lentamente en una población. El número de individuos infectados después de t meses está dado mediante la fórmula:

$$N(t) = 1000(t^{3/2} + t^2)$$

Encuentre $N'(t)$. Evalúe $N(9)$ y $N'(9)$ e interprete estos valores.

69. *(Fórmula Fay/Lehr)* Se ha observado que la forma de esparcimiento de un derrame de petróleo es aproximadamente una elipse con su eje mayor en la dirección del viento. El área de la elipse en metros cuadrados es $A = \pi ab$, donde:

$$a(t) = b(t) + c_1 t^{3/4}, \qquad b(t) = c_2 t^{1/4}$$

Aquí t es el tiempo en minutos, c_1 es una constante que depende de la velocidad del viento y c_2 es una constante que depende del volumen derramado. Si $c_1 = 0.2$ y $c_2 = 15$ calcule los valores de $A(t)$ y $A'(t)$ después de 15 minutos y después de 30 minutos.

■ 11-5 ANÁLISIS MARGINAL

La derivada tiene varias aplicaciones en la administración y la economía en la construcción de lo que denominamos *tasas marginales*. En este campo, la palabra "marginal" se utiliza para indicar una derivada, esto es, una tasa de cambio. Se dará una selección de ejemplos.

Costo marginal

Suponga que el fabricante de cierto artículo descubre que con la finalidad de producir x de estos artículos a la semana, el costo total en dólares está dado por $C = 200 + 0.03x^2$. Por ejemplo, si se producen 100 artículos a la semana, el costo está dado por $C = 200 + 0.03(100)^2 = 500$. El costo promedio por artículo al producir 100 artículos es $\frac{500}{100} = \$5$.

Si el fabricante considera cambiar la tasa de producción de 100 a $(100 + \Delta x)$ unidades por semana, en donde Δx representa el incremento en la producción semanal. El costo es

$$\begin{aligned} C + \Delta C &= 200 + 0.03(100 + \Delta x)^2 \\ &= 200 + 0.03[10{,}000 + 200\Delta x + (\Delta x)^2] \\ &= 500 + 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el costo extra determinado por la producción de los artículos adicionales es

$$\begin{aligned} \Delta C = (C + \Delta C) - C &= 500 + 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2 - 500 \\ &= 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

En consecuencia, el costo promedio por artículo de las unidades extra es

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = 6 + 0.03\Delta x$$

Por ejemplo, si la producción crece de 100 a 150 artículos por semana (de modo que $\Delta x = 50$), se sigue que el costo promedio de los 50 artículos adicionales es igual a $6 + 0.03(50) = \$7.50$ por cada uno. Si el incremento es de 100 a 110 (de modo que $\Delta x = 10$), el costo promedio extra de los 10 artículos es igual a \$6.30 por cada uno.

Definimos el costo marginal como el valor límite del costo promedio por artículo extra cuando este número de artículos extra tiende a cero. Así, podemos pensar del costo marginal como el costo promedio por artículo extra cuando se efectúa un cambio muy pequeño en la cantidad producida. En el ejemplo anterior,

$$\text{Costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + 0.03\Delta x) = 6$$

En el caso de una función de costo general $C(x)$ que represente el costo de producir una cantidad de x de cierto artículo, el costo marginal se define en forma similar por

$$\text{Costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

Es claro que el costo marginal no es otra cosa que la derivada de la función de costo con respecto a la cantidad producida.

$$\boxed{\text{Costo marginal} = \frac{dC}{dx}}$$

El costo marginal mide la tasa con que el costo se incrementa con respecto al incremento de la cantidad producida.

EJEMPLO 1 ***(Costo marginal)*** Para el caso de la función de costo

$$C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000$$

determine el costo marginal como una función de x. Evalúe el costo marginal cuando la producción está dada por $x = 50$, $x = 100$ y $x = 150$.

Solución Deseamos evaluar $C'(x)$. La función dada $C(x)$ es una combinación de potencias de x y así puede derivarse por medio de la fórmula para las potencias que se presentó en la última sección. Obtenemos

$$\begin{aligned} C'(x) &= \frac{d}{dx}(0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000) \\ &= 0.001(3x^2) - 0.3(2x) + 40(1) + 0 \\ &= 0.003x^2 - 0.6x + 40 \end{aligned}$$

Esta función, el costo marginal, da el costo promedio por artículo de crecimiento de la producción por una pequeña cantidad dado que ya se han producido x artículos. Cuando se han producido 50 unidades, el costo marginal de los artículos extra está dado por

$$C'(50) = (0.003)(50)^2 - (0.6)(50) + 40 = 7.5 - 30 + 40 = 17.5$$

Si $x = 100$, el costo marginal es

$$C'(100) = (0.003)(100)^2 - (0.6)(100) + 40 = 30 - 60 + 40 = 10$$

Cuando $x = 150$, el costo marginal está dado por

$$C'(150) = (0.003)(150)^2 - (0.6)(150) + 40 = 67.5 - 90 + 40 = 17.5$$

Informalmente podemos decir que el costo de producir el artículo número 51 es de \$17.50, el artículo número 101 tiene un costo de \$10 y el artículo número 151 cuesta \$17.50. (Afirmaciones como ésta no son lo *bastante* precisas, dado que la derivada de la tasa de un incremento infinitesimalmente pequeño en la producción, no para un incremento unitario). ☛ **19**

☛ **19.** Determine el costo marginal si $C(x) = 4 + 3x - 0.1x^2$ Evalúe $C'(5)$ y explique su significado.

Respuesta $C'(x) = 3 - 0.2x$, $C'(5) = 2$. Cuando se producen 5 unidades, el costo se eleva en 2 por unidad adicional, cuando se aumenta el nivel de producción en un pequeño incremento infinitesimal.

En el ejemplo 1, observamos que el costo marginal decrece a medida que la producción se incrementa de 50 a 100 unidades y luego se incrementa de nuevo cuando la producción aumenta de 100 a 150. En la figura 8 aparece la gráfica de $C'(x)$ como una función de x.

Este tipo de comportamiento es bastante frecuente en el costo marginal. Cuando la producción x aumenta a partir de valores pequeños, el costo marginal decrece (esto es, baja el costo promedio del pequeño incremento siguiente en la producción). La razón de esto estriba en las economías de escala, que provocan que la fabricación de pequeñas cantidades de bienes sea relativamente más cara que la producción de grandes cantidades. Sin embargo, cuando x se hace muy grande, los costos empie-

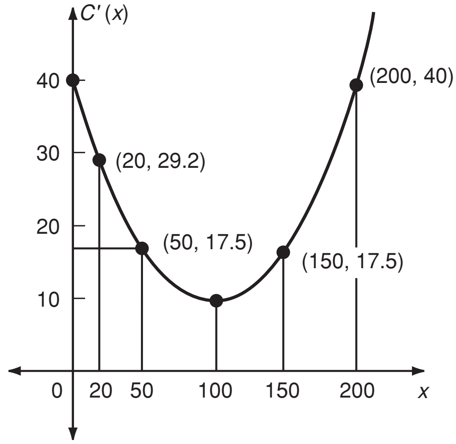


FIGURA 8

zan a aumentar a medida que la capacidad de las unidades de producción existentes llegan a gastarse, y empieza a ser necesario invertir en una nueva planta o maquinaria o pagar horas extra a los trabajadores, etc. Esto causa un eventual aumento en el costo marginal. Así que, por lo regular, el costo marginal primero decrece al aumentar la producción y luego se incrementa de nuevo.

Vale la pena comparar este tipo de comportamiento con el sencillo modelo de costo lineal (véase la sección 4-3). En ese caso, $C(x) = mx + b$ (m y b constantes) y el costo marginal $C'(x) = m$ es constante para toda x. Así que el costo de cada unidad de producción adicional es constante, independiente del nivel de producción.

Es importante no confundir el costo marginal con el costo promedio. Si $C(x)$ es la función de costo, el **costo promedio** de producir x artículos es el costo total, $C(x)$, dividido entre el número de artículos producidos.

$$\boxed{\text{Costo promedio por artículo} = \frac{C(x)}{x}}$$

Esto es muy diferente del costo marginal, que está dado por la derivada $C'(x)$. El costo marginal representa el costo promedio por unidad adicional de un pequeño incremento en la producción. El costo promedio por lo regular se denota por $\overline{C}(x)$.

EJEMPLO 2 En el caso de la función de costo $C(x) = 1000 + 10x + 0.1x^2$, el costo marginal es $C'(x) = 10 + 0.2x$. El costo promedio de producir x artículos es

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1000}{x} + 10 + 0.1x$$

Estas dos funciones son bastante distintas.

Ingreso y utilidad marginales

Ahora consideramos los ingresos derivados de la venta de los productos o servicios de una empresa. Si $R(x)$ denota el ingreso en dólares por la venta de x artículos, definimos el **ingreso marginal** como la derivada $R'(x)$.

$$\text{Ingreso marginal} = R'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta x}$$

Si el número de artículos vendidos se incrementa de x a $x + \Delta x$, entonces existe un incremento correspondiente en el ingreso dado por

$$\Delta R = \text{Nuevo ingreso} - \text{Ingreso original} = R(x + \Delta x) - R(x)$$

El incremento promedio en el ingreso por artículo adicional vendido se obtiene dividiendo ΔR entre el número de artículos adicionales, lo que da $\Delta R/\Delta x$. El valor límite de este promedio cuando $\Delta x \to 0$ da el ingreso marginal. Así pues, el ingreso marginal representa las entradas adicionales de una empresa por artículo adicional vendido cuando ocurre un incremento muy pequeño en el número de artículos vendidos. Esto es, la tasa con la que crece el ingreso con respecto al incremento del volumen de ventas.

EJEMPLO 3 ***(Ingreso marginal)*** Si la función de ingreso está dada por

$$R(x) = 10x - 0.01x^2$$

en donde x es el número de artículos vendidos, determine el ingreso marginal. Evalúe el ingreso marginal cuando $x = 200$.

Solución Necesitamos evaluar $R'(x)$. Dado que $R(x)$ es una combinación de potencias de x, podemos usar la fórmula para las potencias, obteniendo el resultado.

$$R'(x) = \frac{d}{dx}(10x - 0.01x^2) = 10(1) - (0.01)(2x) = 10 - 0.02x$$

Esto nos da el ingreso marginal cuando se vende un número arbitrario x de artículos. Si $x = 200$, obtenemos un ingreso marginal de

$$R'(200) = 10 - (0.02)(200) = 10 - 4 = 6$$

Así que cuando se venden 200 artículos, cualquier incremento pequeño en las ventas provoca un aumento en los ingresos de \$6 por artículo.

La función de ingreso puede escribirse en la forma

$$R(x) = xp$$

en donde p es el precio por artículo y x es el número de artículos vendidos. Vimos en la sección 4.5 que en muchos casos existe una relación entre x y p caraterizada por la ecuación de demanda. Cuanto más artículos pueda vender la empresa, más bajo puede fijar el precio; cuanto más alto se fije el precio, en general, menor será el volumen de las ventas.

EJEMPLO 4 ***(Ingreso marginal)*** Determine el ingreso marginal cuando $x = 300$ si la ecuación de demanda es

$$x = 1000 - 100p$$

Solución En primer término, debemos escribir la ecuación de demanda en tal forma que expresamos p como una función de x.

$$100p = 1000 - x$$
$$p = 10 - 0.01x$$

Así, la función de ingreso está dada por

$$R(x) = xp = x(10 - 0.01x) = 10x - 0.01x^2$$

Observemos que esta función de ingreso es la misma que la del ejemplo anterior, de modo que podemos usar el resultado del ingreso marginal:

$$R'(x) = 10 - 0.02x$$

Cuando el volumen de ventas es 300, el ingreso marginal está dado por

$$R'(300) = 10 - (0.02)(300) = 10 - 6 = 4$$

☛ **20.** Calcule el ingreso marginal para la ecuación de demanda $p = 4 - \sqrt{x}$. Si la función de costo es $C(x) = 1 + x$, determine el costo marginal y la utilidad marginal. Evalúe $R'(4)$, $P'(4)$, $R'(6)$ y $P'(6)$

La utilidad que una empresa obtiene está dada por la diferencia entre sus ingresos y sus costos. Si la función de ingreso es $R(x)$ cuando se venden x artículos, y si la función de costo es $C(x)$ al producirse esos mismos x artículos, entonces la utilidad $P(x)$ obtenida por producir y vender x artículos está dada por

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

La derivada $P'(x)$ se denomina la **utilidad marginal**. Representa la utilidad adicional por artículo si la producción sufre un pequeño incremento. ☛ **20**

EJEMPLO 5 ***(Utilidad marginal)*** La ecuación de demanda de cierto artículo es

$$p + 0.1x = 80$$

y la función de costo es

$$C(x) = 5000 + 20x$$

Calcule la utilidad marginal cuando se producen y venden 150 unidades y también en el caso de que se produzcan y vendan 400 unidades.

Solución La función de ingreso está dada por

$$R(x) = xp = x(80 - 0.1x) = 80x - 0.1x^2$$

Por consiguiente, la utilidad generada por la producción y venta de x artículos está dada por

$$P(x) = R(x) - C(x)$$
$$= (80x - 0.1x^2) - (5000 + 20x)$$
$$= 60x - 01x^2 - 5000$$

Respuesta

$R'(x) = 4 - \frac{3}{2}\sqrt{x}$, $C'(x) = 1$, $P'(x) = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{x}$. $R'(4) = 1$, $P'(4) = 0$, $R'(6) = 4 - \frac{3}{2}\sqrt{6} \approx 0.33$, $P'(6) = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{6} \approx -0.67$

La utilidad marginal es la derivada $P'(x)$. Ya que $P(x)$ es una combinación de potencias, usamos la fórmula de las potencias para calcular su derivada.

$$P'(x) = \frac{d}{dx}(60x - 0.1x^2 - 5000) = 60 - 0.2x$$

Si $x = 150$, obtenemos $P'(x) = 60 - (0.2)(150) = 30$. Así pues, cuando se producen 150 artículos, la utilidad marginal, esto es, la utilidad extra por artículo adicional cuando la producción se incrementa en una pequeña cantidad es \$30.

Cuando $x = 400$, la utilidad marginal es $P'(400) = 60 - (0.2)(400) = -20$. En consecuencia, si se producen 400 unidades, un pequeño incremento en la producción da como resultado una pérdida (esto es, una utilidad negativa) de \$20 por unidad adicional. ☛ **21**

☛ **21.** Para la función de costo del ejemplo 1, determine la utilidad marginal si los artículos pueden venderse en \$130 cada uno. Evalúe $P'(200)$, $P'(300)$ y $P'(400)$ e interprete sus valores.

La utilización de las tasas marginales es amplia en los negocios y la economía. Además de los ejemplos anteriores de costo marginal, ingreso marginal y utilidad marginal, tiene otras aplicaciones. Algunas de ellas se resumen a continuación.

Productividad marginal

Considere que un fabricante tiene una cantidad fija de disponibilidad de capacidad de producción pero con un número variable de empleados. Denotemos con u la cantidad de mano de obra empleada (por ejemplo, u podría ser el número de horas-hombre a la semana de los empleados de la industria) y sea x la cantidad de producción (por ejemplo, el número total de artículos producidos a la semana). Entonces x es función de u y podemos escribir $x = f(u)$.

Si la cantidad de mano de obra u sufre un incremento Δu, la producción x se incrementa a $x + \Delta x$ en donde, como de costumbre, el incremento en la producción está dado por

$$\Delta x = f(u + \Delta u) - f(u)$$

La razón

$$\frac{\Delta x}{\Delta u} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u}$$

proporciona la producción adicional promedio por unidad extra de mano de obra correspondiente al incremento Δu. Si ahora hacemos que Δu tienda a cero, esta razón se aproxima a la derivada dx/du, que se denomina **productividad marginal de mano de obra**. Así,

$$\text{Productividad marginal} = \frac{dx}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u}$$

De modo que la productividad marginal de mano de obra mide el incremento en la producción por unidad de mano de obra adicional, por ejemplo, por hora-hombre adicional, cuando se realiza un pequeño incremento en la cantidad de mano de obra empleada. Está dada por la derivada $f'(u)$.

Respuesta
$P'(x) = -0.003x^2 + 0.6x + 90$,
$P'(200) = 90$,
$P'(300) = 0$ y $P'(400) = -150$
Para un muy pequeño aumento en el nivel de producción, las utilidades aumentan en \$90 por unidad cuando $x = 200$, se mantiene sin cambio cuando $x = 300$ y disminuye en \$150 por unidad cuando $x = 400$

Rendimiento marginal

Suponga que un inversionista se enfrenta con el problema de saber cuánto capital debe invertir en un negocio o en una empresa financiera. Si se invierte una cantidad S, el inversionista obtendrá cierto rendimiento en la forma de ingresos de, digamos, Y dólares por año. En general, el rendimiento Y será una función del capital S invertido: $Y = f(S)$. En un caso característico, si S es pequeña, el rendimiento también será pequeño o aun cero, puesto que la empresa no dispondrá del capital suficiente para operar con eficiencia. A medida que S aumenta, la eficiencia de operación mejora y el rendimiento crece rápidamente. Sin embargo, cuando S se hace muy grande, la eficiencia puede deteriorarse otra vez si los demás recursos necesarios para la operación, tales como la mano de obra e insumos, no pueden crecer lo suficiente para mantener el ritmo del capital extra. En consecuencia, en el caso de grandes capitales S, el rendimiento Y puede descender de nuevo a medida que S continúa su crecimiento.

La **rendimiento marginal** se define como la derivada dY/dS. Se obtiene como el valor límite de $\Delta Y/\Delta S$ y representa el rendimiento por dólar adicional invertido cuando se realiza un pequeño incremento en el capital.

Tasa de impuesto marginal

Sea T la cantidad de impuestos pagados por un individuo o por una corporación cuando el ingreso es I. Así, podemos escribir $T = f(I)$. Si todas las demás variables permanecen fijas, un incremento ΔI en I provoca un aumento en T dado por $\Delta T = f(I + \Delta I) - f(I)$. La razón $\Delta T/\Delta I$ representa la fracción del incremento del ingreso que se pierde en forma de impuestos. Si hacemos que ΔI tienda a cero, esta razón se aproxima a la derivada dT/dI, la cual se denomina la tasa marginal de impuestos. Representa la proporción de un incremento infinitamente pequeño en el ingreso que debe pagarse en forma de impuesto.

La tasa marginal de impuestos está determinada por las escalas graduadas de impuestos. Los individuos con ingreso muy bajos no pagan impuestos, y por debajo de cierto nivel de ingreso la tasa marginal es cero. A medida que el ingreso aumenta, la tasa de impuestos marginal aumenta hasta que alcanza un nivel máximo igual a la proporción máxima que puede pagarse de acuerdo con la escala. (Véase ejemplo 8 de la sección 11-6).

Tendencias marginales a ahorrar y a consumir

Sea I el ingreso total (producto nacional bruto) de una nación. Cada individuo de la población que recibe parte de este ingreso toma una decisión con el propósito de gastar parte de su ingreso en bienes consumibles o servicios y ahorrar el resto. Sea C la cantidad total gastada por la población en artículos consumibles y S la cantidad total de los ahorros. Se sigue que $S + C = I$.

En general, la cantidad ahorrada está determinada por el ingreso nacional, y podemos escribir $S = f(I)$. La cantidad consumida está dada entonces por $C = I - f(I)$.

Si el ingreso nacional recibe un incremento ΔI, los ahorros y el consumo también sufren incrementos ΔS y ΔC, respectivamente, en donde

$$\Delta S + \Delta C = \Delta I \quad \text{y} \quad \Delta S = f(I + \Delta I) - f(1)$$

La razón $\Delta S/\Delta I$ representa la fracción del incremento del ingreso que se ahorra y $\Delta C/\Delta I$ indica a la fracción que se consume. Ya que

$$\frac{\Delta S}{\Delta I} + \frac{\Delta C}{\Delta I} = \frac{\Delta S + \Delta C}{\Delta I} = \frac{\Delta I}{\Delta I} = 1$$

la suma de estas dos fracciones es igual a 1.

En el límite cuando $\Delta I \to 0$, estas fracciones se convierten en las derivadas correspondientes. Llamamos a dS/dI la **tendencia marginal a ahorrar** y a dC/dI la **tendencia marginal a consumir**. Representan las proporciones de un pequeño incremento en el ingreso nacional que se ahorran y se consumen, respectivamente. Están relacionadas por la ecuación

$$\frac{dS}{dI} + \frac{dC}{dI} = 1$$

EJERCICIOS 11-5

(1-4) *(Costo marginal)* Calcule el costo marginal de las siguientes funciones de costo.

1. $C(x) = 100 + 2x$

2. $C(x) = 40 + (\ln 2)x^2$

3. $C(x) = 0.0001x^3 - 0.09x^2 + 20x + 1200$

4. $C(x) = 10^{-6}x^3 - (3 \times 10^{-3})x^2 + 36x + 2000$

(5-8) *(Ingreso marginal)* Calcule el ingreso marginal de las siguientes funciones de ingreso.

5. $R(x) = x - 0.01x^2$

6. $R(x) = 5x - 0.01x^{5/2}$

7. $R(x) = 0.1x - 10^{-3}x^2 - 10^{-5}x^{5/2}$

8. $R(x) = 100x - (\log 5)x^3(1 + \sqrt{x})$

9. *(Ingreso marginal)* Si la ecuación de demanda es $x + 4p = 100$, calcule el ingreso marginal, $R'(x)$

10. *(Ingreso marginal)* Si la ecuación de demanda es $\sqrt{x} + p = 10$, calcule el ingreso marginal.

11. *(Ingreso marginal)* Si la ecuación de demanda es $x^{3/2} + 50p = 1000$, calcule el ingreso marginal cuando $p = 16$

12. *(Ingreso marginal)* Si la ecuación de demanda es $10p + x + 0.01x^2 = 700$, calcule el ingreso marginal cuando $p = 10$

13. *(Utilidad marginal)* Si en el ejercicio 9, la función de costo es $C(x) = 100 + 5x$, calcule la utilidad marginal.

14. *(Utilidad marginal)* Si en el ejercicio 10, la función de costo es $C(x) = 60 + x$, calcule la utilidad marginal.

15. *(Utilidad marginal)* Si en el ejercicio 11, la función de costo es $C(x) = 50 + x^{3/2}$, evalúe la utilidad marginal cuando:

a) $p = 16$ *b*) $x = 25$

16. *(Utilidad marginal)* Si en el ejercicio 12, la función de costo es $C(x) = 1000 + 0.01x^2$, evalúe la función de utilidad marginal si:

a) $x = 100$ *b*) $p = 10$

17-18. *(Utilidad máxima)* En los ejercicios 13 y 14, encuentre el valor de x tal que $P'(x) = 0$ y calcule la utilidad correspondiente. Ésta representa la utilidad máxima que puede obtenerse por la venta del artículo en cuestión. Determine el precio p que da esta utilidad máxima.

19. *(Ingreso marginal)* Cuando una peluquera fija una cuota de \$4 por corte de cabello, advierte que el número de clientes que atiende en una semana es de 100, en promedio. Al elevar la tarifa a \$5, el número de clientes por semana baja a 80. Suponiendo una ecuación de demanda lineal entre el precio y el número de clientes, determine la función de ingreso marginal. Encuentre entonces el precio que produce un ingreso marginal igual a cero.

20. *(Utilidades marginales)* El editor de una revista descubre que si fija un precio de \$1 a su revista, vende 20,000 ejemplares al mes; sin embargo, si el precio fijado es de \$1.50, sus ventas sólo serán por 15,000 ejemplares. El costo de producir cada ejemplar es de \$0.80 y tiene costos fijos de \$10,000 al mes. Suponiendo una ecuación de demanda lineal, calcule su función de utilidad marginal y determine el precio de la revista que haga la utilidad marginal igual a cero. Evalúe la utilidad misma cuando el precio es:

a) \$1.80 *b*) \$1.90 *c*) \$2

21. *(Costo marginal y costo promedio)* Demuestre que si la función de costo es de la forma $C(x) = ax^2 + bx + c$, entonces en el valor de x para el cual el costo marginal es igual al costo promedio $\overline{C}(x)$, la derivada $(d/dx)\overline{C}(x)$ es cero.

***22.** *(Costo marginal y costo promedio)* Pruebe que el resultado del ejercicio 21 es válido para cualquier función de costo $C(x)$ que sea una función polinomial de x. (Esto es, $C(x)$ consta de una suma de potencias de x, donde cada potencia está multiplicada por una constante).

23. La función de consumo de cierta nación está dada por $C(I) = 4 + 0.36I + 0.48I^{3/4}$. Encuentre las tendencias marginales a consumir y a ahorrar, si el ingreso nacional es $I =$ 16 mil millones.

■ 11-6 CONTINUIDAD Y DIFERENCIABILIDAD (SECCIÓN OPCIONAL)

Al considerar el valor límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a c, debemos considerar valores de x que son tanto menores como mayores que c. Sin embargo, en algunos casos el comportamiento de una función dada es diferente si $x < c$ del correspondiente a $x > c$. En tal caso, desearíamos considerar por separado las posibilidades de que x tiende a c por la derecha o por la izquierda.

Decimos que x **tiende a c por la derecha** y escribimos $x \to c^+$ si x toma una sucesión de valores que están cada vez más cerca de c, pero siempre son mayores que c. (Véase la página 452). Decimos que *x tiende a C por la izquierda* y escribimos $x \to C^-$ si x toma una sucesión de valores cada vez más cercanos a C, pero siempre menores que C. Si $f(x)$ tiende al valor límite L cuando $x \to c^+$, escribimos

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

Si $f(x)$ se aproxima al valor límite M cuando $x \to c^-$, escribimos

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = M$$

Límites de este tipo se denominan **límites laterales**.

EJEMPLO 1 Investigue los valores límites de $f(x) = \sqrt{x-1}$ cuando x tiende a 1 por la derecha y por la izquierda.

Solución Cuando $x \to 1^+$, $x - 1$ tiende a cero mediante valores positivos. Por consiguiente,

$$\lim_{x\to c^+} \sqrt{x-1} = 0$$

Por otra parte, cuando $x \to 1^-$, $x - 1$ aún se aproxima a cero, pero siempre es una cantidad negativa. Así pues, $\sqrt{x-1}$ no está definida si $x < 1$, de modo que $\lim_{x\to 1^-} \sqrt{x-1}$ no existe.

La gráfica de $y = \sqrt{x-1}$ aparece en la figura 9. El dominio de esta función no comprende los valores de x que sean menores que 1, por lo que el límite por la izquierda no existe.

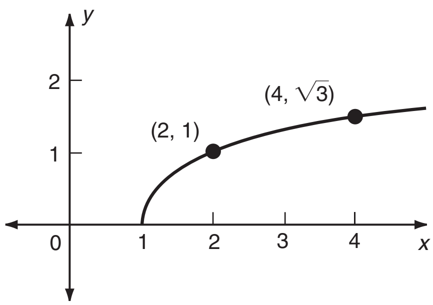


FIGURA 9

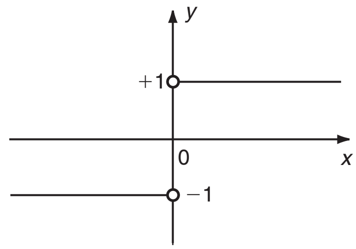


FIGURA 10

EJEMPLO 2 Calcule los valores límites de $f(x) = |x|/x$ cuando x tiende a 0 por la derecha o por la izquierda.

Solución Si $x > 0$, $|x| = x$, y así

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

La función dada tiene el valor 1 siempre que $x > 0$ y así debemos tener el valor límite 1 cuando x tiende a 0 por la derecha:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

En el caso de que $x < 0$, $|x| = -x$, por lo cual

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

(Por ejemplo, cuando $x = -6$, $f(-6) = |-6|/(-6) = 6/(-6) = -1$). En consecuencia $f(x)$ es idénticamente igual a -1 siempre que $x < 0$ y de ahí que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

La gráfica de $y = f(x)$ se aprecia en la figura 10. Obsérvese que $f(x)$ no está definida si $x = 0$ y la gráfica presenta un salto de -1 a $+1$ al pasar la x de la izquierda de cero a su derecha. ☛ **22**

☛ **22.** Evalúe $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ y $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ en los siguientes casos:

a) $f(x) = \sqrt{1 - x}$

b) $f(x) = \dfrac{x - 1}{|1 - x|}$

Los ejemplos anteriores ilustran dos tipos básicos de comportamiento. En el primer caso, sólo uno de los dos límites laterales existe. En el segundo, ambos límites existen pero sus valores son distintos. En ambos casos, el límite bilateral relevante, $\lim_{x \to c} f(x)$, no existe. En el caso de una función general $f(x)$, como se ilustra en la figura 11, si la gráfica de $f(x)$ tiene un salto en $x = c$, los límites laterales difieren. Obsérvese que $\lim_{x \to c} f(x)$ existe si tanto $\lim_{x \to c^-} f(x)$ como $\lim_{x \to c^+} f(x)$ existen y son iguales.

Respuesta *a*) No tiene límite, 0, respectivamente; *b*) 1 y –1, respectivamente.

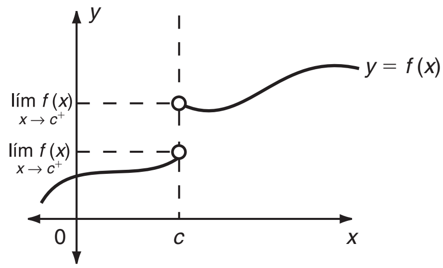


FIGURA 11

EJEMPLO 3 Dada

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{para } x > 3 \\ x^2 + 2 & \text{para } x \leq 3 \end{cases}$$

encuentre $\lim_{x \to 3} f(x)$.

Solución En este caso, $f(x)$ está definida por dos fórmulas diferentes, una para $x \leq 3$ y otra si $x > 3$. De modo que debemos calcular los límites laterales por separado.

Puesto que $f(x) = 2x + 5$ para $x > 3$, en el caso del límite por la derecha encontramos que

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} (2x + 5) = 2(3) + 5 = 11$$

De manera similar, si $x < 3$, tenemos que $f(x) = x^2 + 2$ y por tanto, por lo que respecta al límite por la izquierda,

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3} (x^2 + 2) = 3^2 + 2 = 11$$

Ya que $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = 11$, se sigue que $\lim_{x \to 3} f(x)$ existe y es igual a 11.

La gráfica de $f(x)$ en este caso aparece en la figura 12. Obsérvese que la forma de la gráfica cambia en $x = 3$, pero no presenta un salto en este punto. ☛ **23**

☛ **23.** Dada

$$f(x) = \begin{cases} 3 - 4x & \text{si } x \geq 2 \\ x^2 - 2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 3 - 4x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

determine $\lim_{x \to 1} f(x)$ y $\lim_{x \to 2} f(x)$, si existen.

Respuesta $\lim_{x \to 1} f(x) = -1$

$\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe ya que $\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f(x)$

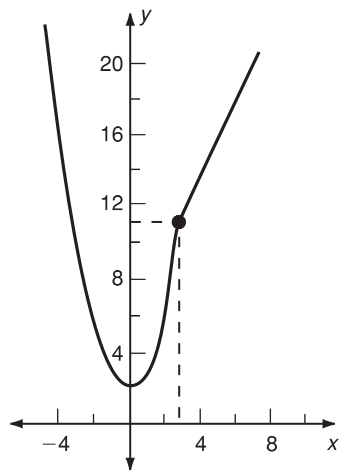


FIGURA 12

Recordemos la definición de continuidad de una función dada en la sección 11-2.

DEFINICIÓN Se dice que una función $f(x)$ es **continua** en el punto $x = c$ si se cumplen las tres condiciones siguientes.

1. $f(x)$ está definida en $x = c$. Esto es, $f(c)$ está bien definida.
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Si no se satisface cualquiera de estas tres condiciones, se dice que la función es **discontinua** en $x = c$. Si los dos límites de $f(x)$ cuando x tiende a c por la derecha y por la izquierda son diferentes, decimos que $f(x)$ presenta una **discontinuidad de salto** en $x = c$.

EJEMPLO 4 La función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$. Observemos que $f(0) = |0| = 0$, de modo que la condición 1 se cumple. Asimismo, $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe dado que, cuando x tiende a cero, $|x|$ se aproxima el límite cero. Por último, la condición 3 se satisface, puesto que $\lim_{x \to 0} f(x)$ y $f(0)$ son iguales a cero. La gráfica de $y = |x|$ se aprecia en la figura 13. Es claro que la gráfica pasa por $x = 0$ sin ruptura alguna. Presenta un pico (o cambio de pendiente) en $x = 0$, pero esto no la hace discontinua.

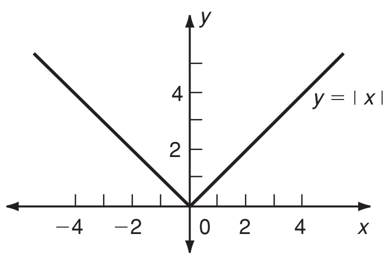


FIGURA 13

En el ejemplo 2, estudiamos la función $f(x) = |x|/x$. Esta función es discontinua en $x = 0$ porque $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe: los límites por la derecha y por la izquierda son distintos. La gráfica presenta un salto de -1 a $+1$ cuando x pasa por 0. Otro ejemplo de una función discontinua se da en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

¿Es continua $f(x)$ en $x = 3$?

Solución

Condición (1) Es claro que, $f(x)$ está definida en $x = 3$ y $f(3) = 5$

Condición (2) $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$

$$= \lim_{x\to 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$

Condición (3) $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$ y $f(3) = 5$ no son iguales.

☛ **24.** ¿Para qué valores de h y k la siguiente función es continua en $x = 2$?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{x^2 - 4} & \text{si } x > 2 \\ h & \text{si } x = 2 \\ 2x + k & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

En este caso, las primeras dos condiciones se cumplen, pero la tercera condición no se satisface, de modo que la función dada es discontinua en $x = 3$. Esto se advierte en la figura 14. La gráfica de $f(x)$ se rompe en $x = 3$ y el punto aislado (3, 5) de la gráfica no está unido continuamente al resto de la gráfica. ☛ **24**

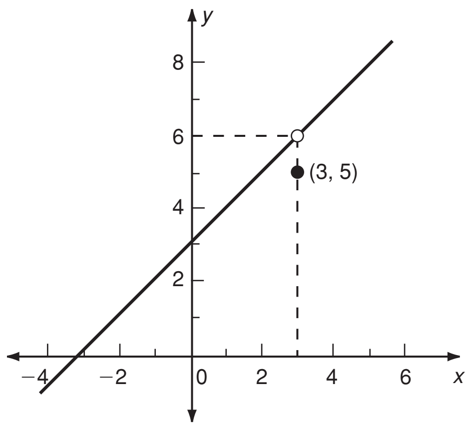


FIGURA 14

A primera vista parecería que las funciones discontinuas son de poca importancia en los problemas prácticos. Sin embargo, éste no es el caso, como el siguiente ejemplo de muestra.

EJEMPLO 6 ***(Función de costo del azúcar)*** Un mayorista vende azúcar a 50¢ el kilo en el caso de cantidades hasta de 100 kilos. Si se trata de cantidades entre 100 y 200 kilos la tarifa es de 45¢ el kilo y para órdenes por encima de los 200 kilos el precio es de 40¢ el kilo. Sea $y = f(x)$ el costo en pesos de x kilos de azúcar. Entonces si $x \le 100$, $y = (0.5)x$. Para $100 < x \le 200$, el costo es de \$0.45 por kilo, de modo que $y = 0.45x$. Por último, si $x > 200$, $y = 0.4x$. La gráfica de esta función aparece en la figura 15. Es claro que la función es discontinua en $x = 100$ y $x = 200$.

En la sección 11-3, definimos el término diferenciabilidad: se dice que una función $f(x)$ es diferenciable en el punto x si la derivada

Respuesta $h = 0$, $k = -4$

☛ **25.** *(Más difícil)* Utilizando la definición de $f'(0)$ como un límite, demuestre que la función $f(x) = x|x|$ es diferenciable en $x = 0$

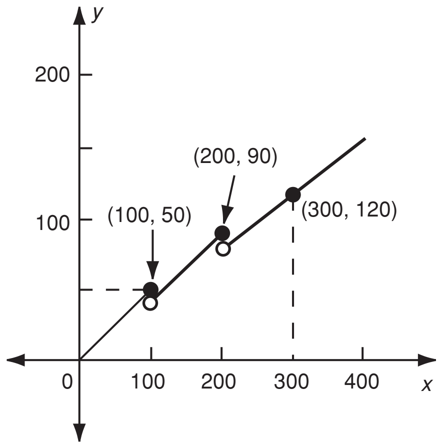


FIGURA 15

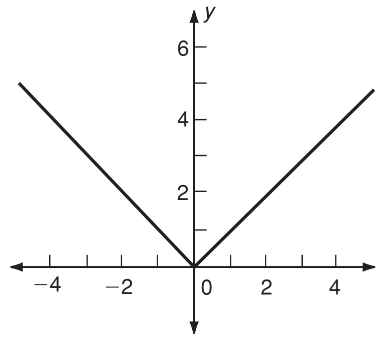


FIGURA 16

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

existe en ese punto.

EJEMPLO 7 Demuestre que la función $f(x) = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$.

Solución Debemos considerar $x = 0$, de modo que $f(x) = f(0) = 0$ y $f(x + \Delta x) = f(0 + \Delta x) = f(\Delta x) = |\Delta x|$. Así que

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = |\Delta x| - 0 = |\Delta x|$$

Por consiguiente,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

Pero en el ejemplo 2, analizamos este límite y demostramos que no existe. De hecho, los límites por la derecha y por la izquierda existen pero son distintos.

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1, \quad \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$$

Por tanto, f no es diferenciable en $x = 0$.

La gráfica de $y = |x|$ se observa en la figura 16. Si $x > 0$, la gráfica tiene una pendiente constante de 1; mientras que si $x < 0$ tiene una pendiente constante de -1. Si $x = 0$, no existe pendiente dado que la gráfica presenta un pico en este valor de x. Ésta es la razón de que $|x|$ no sea diferenciable en $x = 0$. ☛ **25**

Respuesta $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$ $= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x|\Delta x| - 0|0|}{\Delta x}$ $= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x|\Delta x|}{\Delta x}$ $= \lim_{\Delta x \to 0} |\Delta x|$, que existe y es igual a cero.

Una función $y = f(x)$ es diferenciable en cierto valor de x si su gráfica es "suave" en el punto correspondiente (x, y), por lo que entendemos que la gráfica tiene una línea tangente bien definida con una pendiente bien definida. Si la gráfica presenta un pico en el punto (x, y), se sigue que $f(x)$ no es diferenciable en tal valor x. En el ejemplo anterior se da una de tales funciones.

EJEMPLO 8 ***(Impuesto sobre la renta)*** En el mítico país de Erehwon, los habitantes afortunados no pagan impuesto sobre la renta en sus primeros \$10,000 de ingresos gravables.* Las tasas de impuestos graduadas para niveles de ingresos más altos se dan en la tabla 5. Denotamos con I los ingresos gravables y con T la cantidad gravada. Exprese T como una función de I, dibuje la gráfica de esta función y estudie su diferenciabilidad.

TABLA 5

Ingresos gravables	Tasa de impuesto
\$10,001–\$20,000	20%
\$20,001–\$30,000	30%
Más de \$30,000	40%

Solución Si $0 \leq I \leq 10{,}000$, $T = 0$. Cuando $10{,}000 < I \leq 20{,}000$, la cantidad por la cual I excede a 10,000 se grava en un 20%. Por consiguiente, en este rango,

$$T = 0.2(I - 10{,}000) = 0.2I - 2000$$

Cuando $I = 20{,}000$, $T = 0.2(20{,}000 - 10{,}000) = 2000$, de modo que el impuesto a \$20,000 es de \$2000.

En el caso, de que $20{,}000 < I \leq 30{,}000$, la cantidad por la que I sobrepasa 20,000 se grava en un 30%. Así que, en este rango,

$$T = 2000 + 0.3(I - 20{,}000) = 0.\,3I - 4000$$

Cuando $I = 30{,}000$, $T = 0.3(30{,}000) - 4000 = 5000$, de modo que el impuesto es de \$5000.

Continuando en esta forma, construimos una tabla de valores de T como una función de I (véase la tabla 6) y la gráfica aparece en la figura 17. ☛ **26**

☛ **26.** Existe una propuesta para "racionalizar" la estructura de impuestos en Erehwon gravando con el 25% todos los ingresos por arriba de \$10,000 y hasta e incluyendo \$30,000 y con 40% a todos los ingresos por encima de \$30,000. Construya la nueva versión de la tabla 6 en este caso.

Respuesta

I	T
$I \leq 10{,}000$	0
$10{,}000 < I \leq 30{,}000$	$0.25I - 2500$
30,000	5000
$I > 30{,}000$	$0.4I - 7000$

TABLA 6

I	T
$I \leq 10{,}000$	0
$10{,}000 < I \leq 20{,}000$	$0.2I - 2000$
20,000	2000
$20{,}000 < I \leq 30{,}000$	$0.3I - 4000$
30,000	5000
$I > 30{,}000$	$0.4I - 7000$

La gráfica consta de varios segmentos lineales. Es claro que la cantidad gravada es una función continua de los ingresos gravables, pero no es diferenciable en

*1 Dólar de Erehwon = 5 U.S. dólares.

☛ **27.** *(Más difícil)* Demuestre que $f(x) = x^{1/3}$ no es diferenciable en $x = 0$. (*Sugerencia:* Vuelva a la definición de la derivada, $f'(0)$).

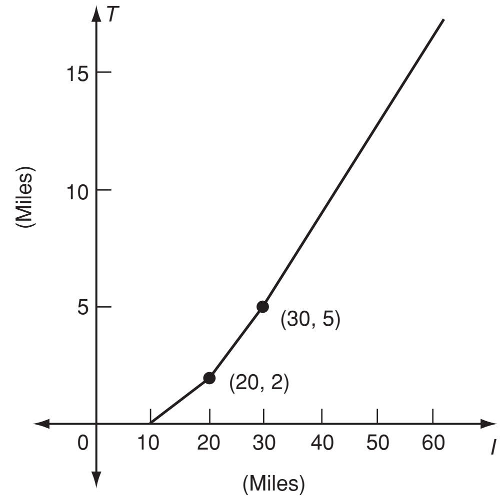


FIGURA 17

los puntos en que la gráfica presenta esquinas. Esto ocurre en los valores de I que marcan las divisiones de la escala de impuestos graduada. Entre estos puntos divisorios, T es diferenciable, y su derivada representa la tasa de impuestos marginal.

Respuesta $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$
$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(\Delta x)^{1/3} - 0^{1/3}}{\Delta x}$
$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{-2/3}$

que no existe. (*No* es suficiente decir que f no es diferenciable en $x = 0$ ya que $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, que no existe cuando $x = 0$. Todo esto muestra que no existe $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ y esto no es lo mismo que $f'(0)$).

Otro caso en que una función no es diferenciable surge cuando la línea tangente en cierto punto resulta ser vertical. En tal caso, la pendiente de la línea tangente no está definida en el punto en cuestión, de modo que la función no es diferenciable en ese valor de x. Por ejemplo, dejamos como ejercicio probar que la función $f(x) = x^{1/3}$ no es diferenciable en $x = 0$. ☛ **27**

Observemos que en el ejemplo 7 tenemos una función que está definida y es continua para todos los valores de x, pero no siempre es diferenciable. En $x = 0$, $f(x) = |x|$ es continua pero no diferenciable. Es claro que, por consiguiente, *el hecho de que una función sea continua no implica que sea diferenciable*. Sin embargo, la afirmación recíproca es cierta: *si* f(x) *es diferenciable en un punto* x = c, *se sigue que es continua en* x = c. Así que, diferenciabilidad implica continuidad, pero no al revés. No daremos una demostración de este resultado, aunque es muy importante.

EJERCICIOS 11-6

(1-4) Utilice la gráfica de $f(x)$ de la página 490 para estimar los siguientes límites.

1. *a)* $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ *b)* $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ *c)* $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

2. *a)* $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ *b)* $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$ *c)* $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

3. *a)* $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ *b)* $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ *c)* $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

4. *a)* $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ *b)* $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ *c)* $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

(5-16) Calcule los siguientes límites laterales.

5. $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x - 1}$ **6.** $\lim\limits_{x \to 1/2^-} \sqrt{1 - 2x}$

7. $\lim\limits_{x \to 4/3^+} \sqrt{4 - 3x}$

8. $\lim\limits_{x \to -1^-} \sqrt{x + 1}$

9. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$

10. $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x + 1}{|x + 1|}$

11. $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{|x - 3|}{9 - x^2}$

12. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - x - 2}{|x - 2|}$

13. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2}$

14. $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x - 1}{x + 1}$

15. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2 - x^2}{|x - 1|}$

16. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 6}{(x - 2)^3}$

(17-22) Estudie la continuidad de las siguientes funciones en $x = 0$ y bosqueje sus gráficas.

17. $f(x) = \dfrac{x^2}{x}$

18. $g(x) = \sqrt{x^2}$

19. $h(x) = \begin{cases} |x| & \text{para } x \neq 0 \\ 1 & \text{para } x = 0 \end{cases}$

20. $F(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

21. $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

22. $H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(23-28) Analice la continuidad de las funciones siguientes en los puntos indicados y bosqueje sus gráficas.

23. $f(x) = x^2 + 4x + 7, \quad x = 1$

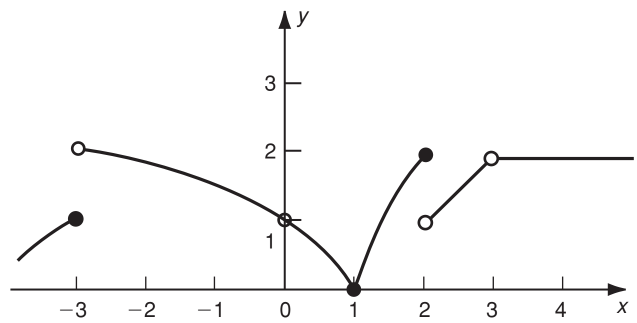
24. $g(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 1}; \quad x = 1$

25. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x - 3|}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}; \; x = 3$

26. $G(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{para } x \neq 2 \\ 4 & \text{para } x = 2 \end{cases}; \quad x = 2$

27. $f(x) = \begin{cases} 5x + 7 & \text{para } x > 2 \\ 2x + 3 & \text{para } x \leq 2 \end{cases}; \quad x = 2$

28. $f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{para } x < 1 \\ 10 - 2x & \text{para } x > 1 \end{cases}; \quad x = 1$



(29-35) Encuentre los valores de x (si los hay) para los cuales las siguientes funciones no son continuas.

29. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$

30. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 9}$

31. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x^2 - x - 6}$

32. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

33. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 4}$

34. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 2} & \text{si } x > 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x \leq 3 \end{cases}$

35. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 2} & \text{si } x \leq 3 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

(36-37) Encuentre el valor de h en los siguientes ejercicios, de modo que $f(x)$ sea continua en $x = 1$.

36. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & \text{si } x \neq 1 \\ h & \text{si } x = 1 \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} hx + 3 & \text{si } x \geq 1 \\ 3 - hx & \text{si } x < 1 \end{cases}$

(38-41) Determine los valores de x para los cuales las funciones siguientes no son diferenciables.

***38.** $f(x) = x^{2/3}$

***39.** $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 0 \\ x & \text{para } x > 0 \end{cases}$

***40.** $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 0 \\ x^2 & \text{para } x > 0 \end{cases}$

***41.** $f(x) = (x - 1)^{1/2}$

42. *(Función de costo de la electricidad)* Una compañía de luz fija una tarifa de 10¢ por unidad de electricidad para las primeras 50 unidades utilizadas por un usuario doméstico cada mes y de 3¢ por unidad en el caso de cantidades por encima de ésta. Si $c(x)$ denota el costo de x unidades por mes, estudie la continuidad y la diferenciabilidad de $c(x)$ y bosqueje su gráfica.

43. *(Costo de un empleado)* Denotemos con $f(x)$ el costo por semana que una empresa gasta en el contrato de un empleado que trabaja x horas por semana. Este costo consta de (1) un costo fijo de \$20, (2) un sueldo de \$6 por hora durante las primeras 35 horas, (3) un salario extra de \$9 la hora por horas laboradas más allá de las 35 pero sin llegar a las 45 horas, y (4) un salario extraordinario de \$12 por horas laboradas sobrepasando las 45. Estudie la continuidad y la diferenciabilidad de $f(x)$ y dibuje su gráfica.

44. *(Impuesto sobre la renta)* En cierto país las tasas de impuestos graduadas son como siguen: 10% en los primeros 2000 denarios (la unidad monetaria); 25% en los siguientes 4000, y 40% en cualquier ingreso adicional. Exprese la cantidad de impuesto sobre la renta como una función del ingreso y dibuje la gráfica de esta función.

45. *(Impuesto sobre la renta)* En el país del ejercicio 44 se ha propuesto cambiar el grupo de impuestos a lo siguiente: no hay impuesto en los primeros 2000 denarios, 30% en los siguientes 4000 y 50% en cualquier ingreso adicional. Exprese el cambio en el impuesto sobre la renta individual como una función de su ingreso y dibuje la gráfica de la función.

46. *(Función de costo discontinua)* Para niveles de producción superiores a las 1000 unidades semanales, la función de costo de una compañía es $C(x) = 5000 + 8x$, donde x es el nivel de producción. Si $x > 1000$ se debe abrir una nueva línea de montaje y la función de costo se vuelve $C(x) = 9000 + 6x$. Si las unidades son vendidas a \$16 cada una, construya la función de utilidades de la empresa. Haga la gráfica de esta función y analice su continuidad.

47. *(Tarifas postales)* Una carta de primera clase tiene un costo de 12¢ por gramo o fracción menor. Denotemos con $f(x)$ el costo de enviar una carta que pesa x gramos. Analice la continuidad y la diferenciabilidad de $f(x)$ y bosqueje su gráfica $0 < x \leq 8$.

REPASO DEL CAPÍTULO 11

Términos, símbolos y conceptos importantes

11.1 Incremento, Δx, Δy
Tasa de cambio promedio de y con respecto a x: $\Delta y/\Delta x$
Velocidad promedio.

11.2 Velocidad instantánea.
Límite (o valor límite): $\lim_{x\to c} f(x)$
Funciones continuas.

11.3 Derivada: Para $y = f(x)$: $\frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx}y, y', f'(x)$

Diferenciabilidad, diferenciación.
Pendiente de la recta tangente.

11.4 Fórmulas para las derivadas de potencias.

11.5 Costo marginal, $C'(x)$. Costo promedio, $\overline{C}(x) = C(x)/x$
Ingreso marginal, $R'(x)$. Utilidad marginal, $P'(x)$
Productividad marginal, rendimiento marginal, tasa marginal de impuestos.
Propensión marginal al ahorro y al consumo.

11.6 Límites laterales:
límites por arriba (por la derecha), $\lim_{x\to c+} f(x)$;
límite por abajo (por la izquierda), $\lim_{x\to c-} f(x)$;
Continuidad, discontinuidad, discontinuidad de salto.

Fórmulas

$\Delta x = x_2 - x_1$

Si $y = f(x)$, entonces $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

Velocidad promedio $= \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Velocidad instantánea $= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$

Teoremas sobre límites:

$$\lim_{x\to c} (mx + b) = mc + b$$

$$\lim_{x\to c} bf(x) = b \lim_{x\to c} f(x)$$

$$\lim_{x\to c} [f(x)]^n = [\lim_{x\to c} f(x)]^n$$

$$\lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$$

$$\lim_{x\to c} [f(x)\, g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$$

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$$

Para $y = f(x)$: $\dfrac{dy}{dx} = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Fórmula para la potencia: Si $y = x^n$ $\dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

Teoremas de diferenciación:

$\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx}$, en donde c es una constante.

$\dfrac{d}{dx}(u + v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

$P(x) = R(x) - C(x)$, $P'(x) = R'(x) - C'(x)$

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 11

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) Si el límite de una función existe en un punto, entonces la función debe estar definida en ese punto.

b) Una función $f(x)$ es continua en $x = a$ si, y sólo si, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

c) Si una función tiene derivada en un punto, entonces, en ese punto la función está definida.

d) La derivada de un producto de funciones es igual al producto de las derivadas.

e) Si $f(x) = |x|$, entonces $f'(0) = 0$

f) Si y es una función de x, entonces el valor de Δy (el incremento de y) debe ser positivo.

g) El significado de $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = A$ es que $f(x)$ está cerca de A cuando x se aproxima a a por la izquierda.

h) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ también existe.

i) Si una función es continua en un punto, entonces es diferenciable en ese punto.

j) Si una función es diferenciable en un punto, entonces es continua en ese punto.

k) Si la función $f(x)$ no está definida en $x = c$, entonces no existe $\lim\limits_{x \to c} f(x)$

l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x} = 1$

m) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x} = \pm 1$

2. Determine Δy cuando $y = 2^x$ y $\Delta x = 1$

3. Determine Δy cuando $x = 1$ y $\Delta x = 0.2$, en el caso en que $y = x^2 + 2x - 5$

4. *(Función de costo)* Para la función de costo $C(x) = 2500 + 8x$, determine el incremento en el costo cuando la producción se incrementa de 50 a 55 unidades. Calcule el costo promedio por unidad adicional.

5. *(Función de costo)* Para la función de costo $C(x) = 2000 + 5x + 0.02x^2$, determine el incremento en el costo cuando la producción se incrementa de 50 a 55 unidades. Calcule el costo promedio por unidad adicional.

6. *(Caída libre)* En el caso de un objeto que cae bajo la acción de la gravedad, calcule la velocidad promedio entre $t = 5$ y $t = 6$ segundos. ($t = 0$ es el instante en que se suelta el objeto).

(7-20) Evalúe los siguientes límites.

7. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x + 3}$

8. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{1 - x}$

9. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$

10. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$

11. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

12. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 3}{x - 5}$

13. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}$

14. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

15. $\lim\limits_{x \to -12} \dfrac{x^2 + x - 132}{x + 12}$

16. $\lim\limits_{x \to -6} \dfrac{x^2 + 8x + 12}{x^2 + x - 30}$

17. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 + 8x + 12}{x^2 + x - 30}$

***18.** $\lim\limits_{x \to 24} \dfrac{\sqrt{2x + 1} - 7}{\sqrt{x + 1} - 5}$

19. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$

20. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - \sqrt{3x - 5}}{x - 2}$

(21-24) Calcule las derivadas de las funciones siguientes, usando la definición de la derivada como un límite.

21. $f(x) = (x - 1)^{1/2}$

22. $f(x) = (x - 1)^{-1/2}$

23. $f(x) = (x - 1)^{-2}$

24. $f(x) = (x + 1)^2(x - 2)$

(25-36) Calcule las derivadas de las funciones siguientes con respecto al argumento dado.

25. $x^2\sqrt{x}$

26. x^{e^2}

27. $\dfrac{(x - 2)(x + 2)}{\sqrt{x}}$

***28.** $\dfrac{(x^2 - 4)(x + 2)}{\sqrt[3]{x^2}}$

29. $(p^3 - 3p)(p^2 + 1)$

30. $\dfrac{(p-3)(p+5)}{p^2}$

*__31.__ $\dfrac{u}{u^2 - 1}$

32. $\sqrt[5]{m} \cdot \sqrt[3]{m^2}$

*__33.__ $\dfrac{(y^2+1)(y+5)}{3y^2}$

34. $(u^2 + 2u - 15)(u^2 - u - 30)$

*__35.__ $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+1}$

*__36.__ $\dfrac{u^2}{1 + \frac{u+1}{u-1}}$

(37-40) Determine el costo marginal de cada una de las siguientes funciones de costo.

37. $C(x) = 800 + 5x^2$

38. $C(x) = 0.1x^3 - 2x^2 + 10x - 2500$

39. $C(x) = 0.2x^2 + 8x + 500$

40. $C(x) = 0.001x^3 - 0.01x^2 + 25x + 700$

(41-42) Determine la utilidad marginal dada cada una de las siguientes ecuaciones de demanda.

41. $2x + 25p = 2000$

42. $x^2 + 200p = 500$

(43-44) Calcule la utilidad marginal en los problemas 41 y 42, si la función de costo es $C(x) = 1500 + 8x$.

45. *(Precio marginal)* Si la función de demanda está dada por $p = f(x)$, entonces dp/dx se denomina *función de precio marginal*. La ecuación de demanda de cierto producto es $p = 2000 - 5x - x^2$. Determine el precio marginal a un nivel de demanda de 15 unidades.

46. *(Precio marginal)* La ecuación de demanda de cierto producto es $p = 25/(x+1)$. Determine la función de precio marginal.

47. *(Demanda marginal)* Si la relación de demanda está dada por $x = f(p)$, entonces dx/dp se denomina la *demanda marginal*. Si la ecuación de demanda de cierto producto es $p^2 + 2x = 50$, determine la demanda marginal a un nivel de precio de $p = 2$. Interprete el resultado.

48. *(Productividad física)* La *productividad física p* se define como la producción física de un número dado de trabajadores o máquinas y es, entonces, una función del número x de trabajadores o máquinas. En el caso de cierta empresa, $p = 200(x + 1)^2 - 100$. Determine la productividad física marginal dp/dx cuando $x = 2$.

(49-51) Investigue si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican.

49. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{7+x} - 3}{x - 2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ -\dfrac{1}{6} & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}, \quad x = 2$

50. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 2x - 15} & \text{si} \quad x \neq 3 \\ \dfrac{5}{8} & \text{si} \quad x = 3 \end{cases}, \quad x = 3$

51. $f(x) = \dfrac{|x+2|}{x+2}$, $x = -2$

52. Determine el valor de a si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 7 & \text{si} \quad x = 2, \end{cases}$$

es continua en $x = 2$

53. Si $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x}$ para $x \neq -1$ y $f(x)$ es continua en $x = -1$, determine $f(-1)$

54. *(Costo de un empleado)* Sea $c(x)$ el costo que tiene una empresa en el contrato de un empleado que trabaja x horas en una semana. Este costo consta de (1) un costo fijo de \$30, (2) un sueldo de \$8 por hora para las primeras 40 horas, (3) un sueldo extra de \$12 la hora por cada hora laborada por encima de 40 y hasta la 50 y (4) un salario extraordinario de \$15 por cada hora laborada, por arriba de la hora 50. Estudie la continuidad y la diferenciabilidad de $c(x)$ y dibuje su gráfica.

55. *(Tasa de interés)* En un estado el impuesto a la venta se establece de la manera siguiente.

Para ventas menores de \$1500 el impuesto es de 3%. Para cantidades de \$3500 o más, y hasta \$6500 el impuesto es 5% y para cantidades mayores a \$6500, el impuesto es de 8%. Construya la gráfica de la tasa de impuesto como una función del monto de la venta, y analice su continuidad y diferenciabilidad.

CASO DE ESTUDIO

PROPAGACIÓN DE UNA EPIDEMIA

En el caso que se planteó al inicio del capítulo, que trataba con el número de infectados por cierta enfermedad, se tenía el modelo

$$I(t) = 10000 - 4500(t^{-1/2} + 1), \text{ para } t \geq 1$$

La primera pregunta, "¿cuántos casos se tienen en la primera semana?", se puede responder ya sea por medio de la gráfica, o bien, con el cálculo de $I(1)$; por lo que

a) El número de enfermos en la semana 1 es I(1) = 1000.

El aumento de casos de la semana 4 a la semana 6 no es más que $\Delta(I) = \mathrm{I}(6) - I(4)$, es decir,

b) El aumento de casos de la semana 4 a la semana 6 es igual a

$$I(6) - I(4) \approx 413 \text{ casos}$$

Ahora bien, la rapidez de propagación promedio de la enfermedad, del tiempo t al Δt, como se vio en la sección 11.1, está dada por

$$\frac{\Delta I(t)}{\Delta t} = \frac{I(t + \Delta t}{\Delta t}$$

Así que para responder la tercera pregunta:

c) En promedio, ¿qué tan rápido se propaga la enfermedad en la semana 1 a la 2?

Se sustituye $t = 1$, $\Delta t = 1$ en la expresión anterior y se obtiene

Rapidez promedio de propagación, $\dfrac{\Delta I(t)}{\Delta t} = \dfrac{I(2) - I(1)}{1} \approx$ 1318 individuos/semana.

La pregunta, "¿qué tan rápido se propaga la enfermedad en la semana 9?", es diferente a la anterior, pues aquí se pide la rapidez instantánea, es decir, se debe analizar cuando $\Delta t \to 0$. Por lo que si aplicamos las fórmulas estudiadas en este capítulo a I(t), se obtiene

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(10{,}000 - 4500(t^{-1/2} + 1) = \frac{4500}{2}\, t^{-3/2}$$

Por tanto,

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{2250}{\sqrt{t^{-3}}}$$

Así que,

d) y *e*) En la semana 9 la enfermedad se propaga con una rapidez de

$$\frac{dI(9)}{dt} = \frac{2250}{27} \approx 83.33 \text{ individuos/semana}$$

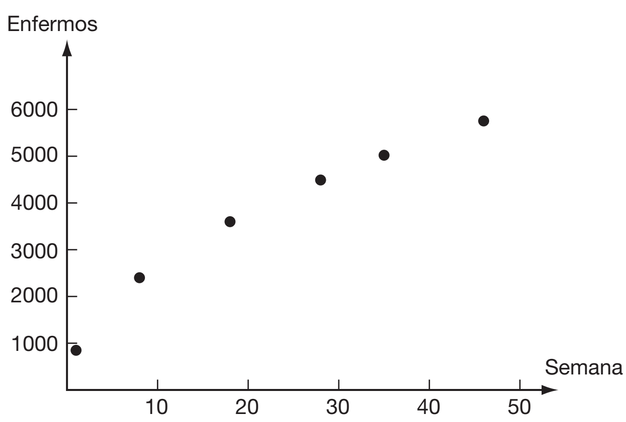
y en la semana 50,

$$\frac{dI(9)}{dt} = \frac{2250}{\sqrt{50^3}} \approx 6.36 \text{ individuos/semana}$$

Así, la doctora Socorro recopiló información en la población y en realidad el número de enfermos, en algunas semanas fue la siguiente

Semana	Núm. enfermos
1	848
8	2400
18	3600
28	4490
35	5020
46	5755

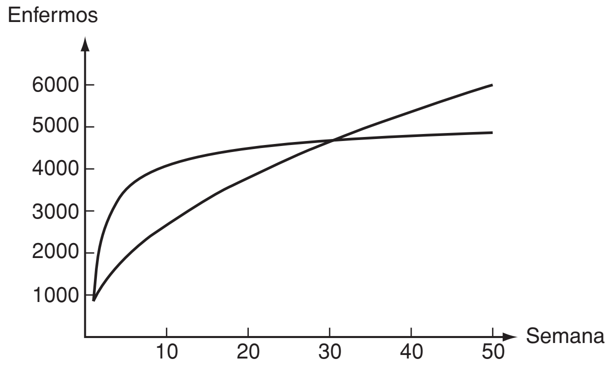
La gráfica de los puntos aparece a continuación,



Con estos puntos y técnicas estadísticas, que analizará en otros cursos, se determinó que un modelo más adecuado para el número de enfermos en la semana t es

$$E(t) = 6000\sqrt{\frac{t}{50}}, \text{ para } 1 \le t \le 50$$

Con base en este modelo, responda las mismas preguntas que para el primer modelo. Por otro lado, analice ambos modelos y diga que sucede a la larga, es decir, qué sucede cuando t es 100, 1000, 10000, etcétera. La gráfica de ambas funciones se muestra a continuación.



¿Puede identificar cuál es la gráfica de cada una de las funciones, $I(t)$ y $E(t)$?

CAPÍTULO 12

Cálculo de derivadas

Propensión marginal al ahorro

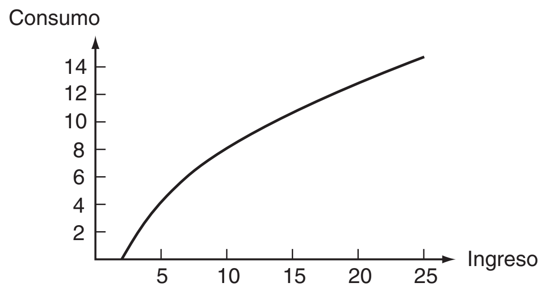
Al igual que los individuos, una población tiene ingresos y gastos. Ahora bien, en forma simplificada, se puede decir que el destino de estos ingresos son dos; el primero, los gastos en bienes, servicios, etcétera y, si queda algo, el segundo destino es el ahorro. Como se vio en el capítulo anterior, si C es la cantidad total gastada por la población e I es el ingreso total recibido, entonces,

$$S = I - C$$

es la cantidad ahorrada. Considere una población que, con base en información previa, su función de consumo se puede modelar mediante

$$C(I) = 2.4 + 0.2I + 4\ln(0.25I), \text{ para } I \geq 2$$

con I en miles de millones de dólares. La gráfica de esta función aparece a continuación.



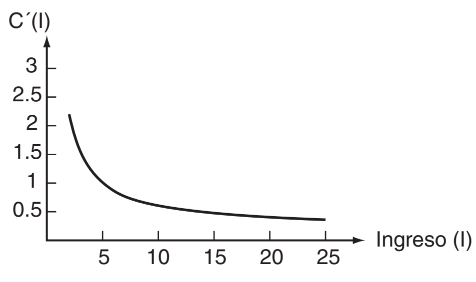
Esta gráfica, como era de esperarse, *dice* que si el ingreso aumenta, entonces, el gasto en consumo también aumenta.

a) Pero, ¿qué tan rápido aumenta el consumo con respecto al aumento del ingreso?

b) Y si, como se dijo al inicio, el otro destino de los ingresos es el ahorro, ¿esta población tiende a ahorrar más o menos cuando el ingreso aumenta?

c) Si el ingreso total de la población es de 25 mil millones de dólares, ¿cuál es la propensión marginal a ahorrar? ¿Y cuál es la propensión marginal a consumir?

Para ayudarle a responder estas preguntas, le será útil analizar la derivada de la función $C(I)$ con respecto de I. Después de estudiar este capítulo, y repasar la sección 11.5, *Análisis marginal*, responda las preguntas anteriores. A continuación se muestra la gráfica de $\frac{dC(I)}{dI}$, la cual le ayudará a responder las preguntas que se plantearon.



TEMARIO

12-1 DERIVADAS DE PRODUCTOS Y COCIENTES
12-2 LA REGLA DE LA CADENA
12-3 DERIVADAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS
12-4 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR
REPASO DEL CAPÍTULO

■ 12-1 DERIVADAS DE PRODUCTOS Y COCIENTES

En esta sección, probaremos y explicaremos el uso de dos importantes teoremas que representan técnicas útiles cuando se requiere derivar funciones complicadas.

TEOREMA 1 (LA REGLA DEL PRODUCTO) Si $u(x)$ y $v(x)$ son dos funciones de x diferenciables, se sigue que

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}}$$

Esto es,

$$\boxed{(uv)' = uv' + vu'}$$

En términos verbales, *la derivada del producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera.*

EJEMPLO 1 Calcule y' si $y = (5x^2 - 3x)(2x^3 + 8x + 7)$

Solución La función dada y puede escribirse como un producto $y = uv$ si hacemos

$$u = 5x^2 - 3x \quad \text{y} \quad v = 2x^3 + 8x + 7$$

Así, por los métodos de la sección 11-4, advertimos que

$$u' = 10x - 3 \quad \text{y} \quad v' = 6x^2 + 8$$

Por consiguiente, por la regla del producto,

$$\begin{aligned} y' &= uv' + vu' \\ &= (5x^2 - 3x)(6x^2 + 8) + (2x^3 + 8x + 7)(10x - 3) \\ &= \underline{50x^4 - 24x^3 + 120x^2 + 22x - 21} \end{aligned}$$

Observe el procedimiento aquí:

1. Identifique u y v tal que $y = uv$.
2. Calcule u' y v'.
3. Utilice la regla del producto para determinar y'.

En el ejemplo 1, en realidad no necesitábamos la regla del producto para calcular la derivada de la función dada. Pudimos calcular y' eliminando los paréntesis del lado derecho y expresando a y como una suma de potencias de x.

$$\begin{aligned} y &= (5x^2 - 3x)(2x^3 + 8x + 7) \\ &= 10x^5 - 6x^4 + 40x^3 + 11x^2 - 21x \end{aligned}$$

☛ **1.** Utilice la regla del producto para derivar las funciones siguientes:
a) $(2x - 1)(x^2 + 1)$
b) $(3t^2 + 2t + 1)(t^2 - 2)$
c) $x^2g(x)$

$$y' = 10(5x^4) - 6(4x^3) + 40(3x^2) + 11(2x) - 21(1)$$
$$= 50x^4 - 24x^3 + 120x^2 + 22x - 21$$

Los ejemplos que se dan a continuación también ilustran la utilización de la regla del producto aun cuando podrían resolverse empleando los métodos del capítulo 11. Sin embargo, más tarde nos toparemos con funciones para las que ese método alternativo no existe. En estos casos, será esencial utilizar la regla del producto con la finalidad de calcular las derivadas.

EJEMPLO 2 Dada $f(t) = (2\sqrt{t} + 1)(t^2 + 3)$, determine $f'(t)$.

Solución Usamos la regla del producto con $u = 2\sqrt{t} + 1 = 2t^{1/2} + 1$ y $v = t^2 + 3$. Entonces $u'(t) = 2 \cdot \frac{1}{2}t^{-1/2} = t^{-1/2}$ y $v'(t) = 2t$. Tenemos

$$f'(t) = uv' + vu'$$
$$= (2t^{1/2} + 1)(2t) + (t^2 + 3)(t^{-1/2})$$
$$= 4t^{3/2} + 2t + t^{3/2} + 3t^{-1/2}$$
$$= 5t^{3/2} + 2t + \frac{3}{\sqrt{t}}$$ ☛ **1**

Respuesta
a) $(2x - 1) \cdot 2x + 2 \cdot (x^2 + 1)$
$= 6x^2 - 2x + 2$
b) $(3t^2 + 2t + 1) \cdot 2t +$
$(6t + 2)(t^2 - 2)$
$= 12t^3 + 6t^2 - 10t - 4$
c) $x^2g'(x) + 2xg(x)$

La ecuación de demanda da el precio p en que una cantidad x de cierto artículo puede venderse durante cierto periodo. En general, podemos escribir $p = f(x)$. El ingreso originado en la venta de este número de artículos es

$$R = xp$$

Dado que R está expresado como el producto de dos cantidades, el ingreso marginal, que es la derivada de R con respecto a x, puede obtenerse mediante la regla del producto.

$$\frac{dR}{dx} = p\frac{d}{dx}(x) + x\frac{d}{dx}(p) = 1 \cdot p + x\frac{dp}{dx} = p + x\frac{dp}{dx}$$

La derivada dp/dx puede calcularse a partir de la relación de la demanda. Es el cambio en el precio por unidad de aumento en la demanda que se necesita para producir un cambio muy pequeño en la demanda.

☛ **2.** Calcule el ingreso marginal para la relación de demanda $p = 10 - 2x - \frac{1}{2}x^2$

EJEMPLO 3 ***(Ingreso marginal)*** Si la ecuación de demanda es lineal, tenemos

$$p = a - bx$$

donde a y b son dos constantes positivas. Así, $dp/dx = -b$ y el ingreso marginal es

$$\frac{dR}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} = a - bx + x(-b) = a - 2bx$$

Observemos que el ingreso marginal en este ejemplo puede calcularse directamente.

$$R = xp = x(a - bx) = ax - bx^2$$

En consecuencia, $R'(x) = a - 2bx$, como antes. ☛ **2**

Respuesta $R'(x) = p + x(-2 - x) = 10 - 4x - \frac{3}{2}x^2$

☛ **3.** Utilice la regla del cociente para derivar las siguientes funciones:

a) $\dfrac{x}{x-1}$ *b*) $\dfrac{2t+5}{2t-5}$

c) $\dfrac{1-u^3}{1+u^3}$

Observación La regla del producto se extiende de manera directa al producto de más de dos funciones. Para el producto de tres funciones se transforma en

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

TEOREMA 2 (REGLA DEL COCIENTE) Si $u(x)$ y $v(x)$ son dos funciones diferenciables de x, se sigue que

$$\boxed{\frac{du}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}}$$

o bien,

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}}$$

Esto es, *la derivada del cociente de dos funciones es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador todo dividido entre el cuadrado del denominador.*

EJEMPLO 4 Calcule y' si

$$y = \frac{x^2+1}{x^3+4}$$

Solución Primero necesitamos seleccionar u y v tales que $y = u/v$. En este caso: $u = x^2 + 1$ y $v = x^3 + 4$. Entonces, tenemos que $u' = 2x$ y $v' = 3x^2$. Finalmente, de la regla del cociente tenemos

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(x^3+4)(2x) - (x^2+1)(3x^2)}{(x^3+4)^2}$$

$$= \frac{2x^4 + 8x - (3x^4 + 3x^2)}{(x^3+4)^2} = \frac{-x^4 - 3x^2 + 8x}{(x^3+4)^2} \quad ☛ \ 3$$

Respuesta

a) $\dfrac{(x-1)\cdot 1 - x \cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$

b) $\dfrac{(2t-5)\cdot 2 - (2t+5)\cdot 2}{(2t-5)^2} = \dfrac{-20}{(2t-5)^2}$

c) $\dfrac{(1+u^3)\cdot(-3u^2) - (1-u^3)(3u^2)}{(1+u^3)^2} = \dfrac{-6u^2}{(1+u^3)^2}$

EJEMPLO 5 (Ingreso *per capita*) El producto nacional bruto (PNB) de cierto país está aumentando con el tiempo de acuerdo con la fórmula $I = 100 + t$ (miles de millones de dólares). La población en el instante t es $P = 75 + 2t$ (millones). Encuentre la tasa de cambio del ingreso *per capita* en el instante t.

Solución El ingreso *per capita*, que denotamos por y, es igual al PNB dividido entre el tamaño de la población:

$$y = \frac{I}{P} = \frac{100+t}{75+2t} \qquad \text{(miles de dólares)}$$

Para derivar esto utilizamos la regla del cociente con $y = u/v$, en donde $u = 100 + t$ y $v = 75 + 2t$. Entonces, $du/dt = 1$ y $dv/dt = 2$. Con base en la regla del cociente,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(75+2t)\cdot 1 - (100+t)\cdot 2}{(75+2t)^2} = \frac{-125}{(75+2t)^2} \quad ☛ \ 4$$

☛ **4.** En el ejemplo 5, calcule la tasa de crecimiento *per capita* si el crecimiento de la población se reduce a $P = 75 + t$ millones en el instante t.

Respuesta $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-25}{(75+t)^2}$

EJEMPLO 6 Determine dy/dx si $y = \dfrac{(x+1)(x^3-2x)}{x-1}$

Solución Primero escriba $y = u/v$, como un cociente, con $u = (x+1)(x^3 - 2x)$ y $v = x - 1$. Entonces, de la regla del cociente,

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Inmediatamente tenemos $v' = 1$, pero para encontrar u' utilizamos la regla del producto. Escribimos $u = u_1 v_1$ en donde $u_1 = x + 1$ y $v_1 = x^3 - 2x$. Entonces, $u_1' = 1$ y $v_1' = 3x^2 - 2$, de modo que

$$\begin{aligned} u' = u_1 v_1' + v_1 u_1' &= (x+1)(3x^2-2) + (x^3-2x) \cdot 1 \\ &= 4x^3 + 3x^2 - 4x - 2 \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x-1)(4x^3+3x^2-4x-2) - (x+1)(x^3-2x) \cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Sea $C(x)$ la función de costo de cierto artículo (esto es, $C(x)$ es el costo de fabricar y vender una cantidad x de los artículos en cuestión). La derivada $C'(x)$ da el costo marginal. La razón $C(x)/x$ es igual al costo total dividido entre la cantidad producida y de esta manera representa el costo promedio por unidad producida de estos artículos. La derivada de esta razón con respecto a x se denomina el **costo promedio marginal**. Da el incremento en el costo promedio por artículo por cada incremento de una unidad en la cantidad producida.

Con el objetivo de calcular el costo marginal promedio de la función de costo, debemos derivar la razón $C(x)/x$. Para esto, podemos usar la regla del cociente.

$$\begin{aligned} \text{Costo promedio marginal} = \frac{d}{dx}\left(\frac{C(x)}{x}\right) &= \frac{x\dfrac{d}{dx}C(x) - C(x)\dfrac{d}{dx}x}{x^2} \\ &= \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left[C'(x) - \frac{C(x)}{x}\right] \end{aligned}$$

Observe que en esta expresión final los paréntesis cuadrados representan la diferencia entre el costo marginal, $C'(x)$ y el costo promedio, $C(x)/x$. Por tanto, concluimos que el *costo promedio marginal es igual al costo marginal menos el costo promedio todo dividido entre la cantidad producida.* En particular, el costo promedio marginal es cero cuando el costo marginal y el costo promedio son iguales.

EJEMPLO 7 (***Costo promedio marginal***) Calcule el costo promedio marginal para la función de costo

$$C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000$$

cuando $x = 100$.

Solución $C'(x) = 0.003x^2 - 0.6x + 40$ y así

$$C'(100) = 0.003(100)^2 - 0.6(100) + 40 = 10$$

$$C(100) = 0.001(100)^3 - 0.3(100)^2 + 40(100) + 1000 = 3000$$

En consecuencia, el costo promedio marginal cuando $x = 100$ es

☛ **5.** Encuentre el costo marginal, costo promedio y costo marginal promedio para la función de costo $C(x) = 5 + x + 2x^2$
Verifique que $\overline{C}'(x) = x^{-1}[C'(x) - \overline{C}(x)]$

$$\frac{1}{x}\left[C'(x) - \frac{C(x)}{x}\right] = \frac{1}{100}\left[10 - \frac{3000}{100}\right] = -0.2$$

Así, cuando $x = 100$, el costo promedio por unidad decrece en 0.2 por cada unidad adicional producida. (También podemos calcular esta respuesta haciendo $\overline{C}(x) = C(x)/x$, y después derivar la expresión resultante). ☛ **5**

Demostraciones de los teoremas

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1 Sea $y = u \cdot v$. Entonces,

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) \\ &= uv + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v \\ &= y + u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v \end{aligned}$$

Restamos y de ambos lados.

$$\Delta y = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{vx} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Tomando límites cuando $\Delta x \to 0$, tenemos que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

(Observe que las partes *a*) y *c*) del teorema 3 de la sección 11-2 se aplicaron). El último término de la derecha es cero ya que, $\Delta u \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$, de modo que obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

como se requería.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2 Sea $y = u/v$. Cuando x se incrementó a $x + \Delta x$, y se incrementa a $y + \Delta y$, u a $u + \Delta u$, y v a $v + \Delta v$, por lo que

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

Restamos $y = u/v$ a ambos lados.

Respuesta
$C'(x) = 1 + 4x$,
$\overline{C}(x) = 5x^{-1} + 1 + 2x$,
$\overline{C}'(x) = -5x^{-2} + 2$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v(u + \Delta u) - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

Dividiendo entre Δx, obtenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

Si ahora tomamos los límites cuando $\Delta x \to 0$, de modo que $\Delta y/\Delta x \to dy/dx$, $\Delta u/\Delta x \to du/dx$ y $\Delta v/\Delta x \to dv/dx$, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{du}{dx}}{v(v + 0)} = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

dado que el otro incremento Δv en el denominador tiende a cero. Así que, con esto probamos el teorema.

EJERCICIOS 12-1

(1-12) Usando la regla del producto, calcule las derivadas de las siguientes funciones con respecto a la variable respectiva.

1. $y = (x + 1)(x^3 + 3)$

2. $y = (x^3 + 6x^2)(x^2 - 1)$

3. $u = (7x + 1)(2 - 3x)$

4. $u = (x^2 + 7x)(x^2 + 3x + 1)$

5. $f(x) = (x^2 - 5x + 1)(2x + 3)$

6. $g(x) = (x^2 + 1)(x + 1)^2$

7. $f(x) = (3x + 7)(x - 1)^2$

8. $y = (t^2 + 1)\left(t - \frac{1}{t}\right)$

9. $u = \left(y + \frac{3}{y}\right)(y^2 - 5)$

10. $g(t) = \left(t + \frac{1}{t}\right)\left(5t^2 - \frac{1}{t^2}\right)$

11. $g(x) = (x^2 + 1)(3x - 1)(2x - 3)$

12. $f(x) = (2x + 1)(3x^2 + 1)(x^3 + 7)$

(13-16) *(Ingreso marginal)* Usando la regla del producto, calcule el ingreso marginal de las siguientes relaciones de demanda.

13. $x = 1000 - 2p$

14. $p = 40 - \frac{1}{2}\sqrt{x}$

15. $x = 4000 - 10\sqrt{p}$

16. $p = 15 - 0.1x^{0.6} - 0.3x^{0.3}$

17. *(Tasa de cambio del PNB)* El ingreso *per cápita* promedio en cierto país al tiempo t es igual a $W = 6000 + 500t + 10t^2$. (W está en dólares y t en años.) El tamaño de la población en el instante t (en millones) es $P = 10 + 0.2t + 0.01t^2$. Calcule la tasa de cambio del PNB en el instante t. (*Sugerencia*: PNB = tamaño de la población × ingreso *per capita*).

18. *(Tasa de cambio del PNB)* Repita el ejercicio 17 en el caso en que $W = 1000 + 60t + t^2$ y $P = 4 + 0.1t + 0.01t^2$.

(19-30) Use la regla del cociente con el objetivo de calcular las derivadas de las siguientes funciones con respecto a la variable independiente respectiva.

19. $y = \dfrac{3}{2x + 7}$

20. $f(t) = \dfrac{5t}{2 - 3t}$

21. $y = \dfrac{u}{u + 1}$

22. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x + 3}$

23. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 1}$

24. $g(x) = \dfrac{3 - x}{x^2 - 3}$

25. $y = \dfrac{t^2 - 7t}{t - 5}$

26. $y = \dfrac{u^2 - u + 1}{u^2 + u + 1}$

27. $x = \dfrac{\sqrt{u} + 1}{\sqrt{u} - 1}$

28. $t = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

29. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

30. $y = \dfrac{1}{(t + 1)^2}$

31. $f(x) = \dfrac{(x^2 + 1)(2x + 3)}{3x - 1}$ **32.** $g(t) = \dfrac{(t + 3)(3t^2 + 5)}{2 - 3t}$

33. $y = \dfrac{(2u^3 + 7)(3u^2 - 5)}{u^2 + 1}$ **34.** $y = \dfrac{(t + 1/t)(t^2 + 7t)}{3t + 4}$

(35-38) Determine la ecuación de la recta tangente a las gráficas de las siguientes funciones en el punto que se indica.

35. $y = (3x^2 + 7)(x + 2)$ en $(-1, 10)$

36. $y = x + 1/x)(x^2 - 1)$ en $x = 1$

37. $y = \dfrac{2x - 3}{x - 2}$ en $(3, 3)$

38. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$ en $x = -2$

39. Determine los puntos sobre la curva $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ en donde las rectas tangentes son horizontales.

40. Determine los puntos sobre la curva $y = \dfrac{x + 2}{x^2 + 5}$ en donde las rectas tangentes son horizontales.

41. Determine los puntos sobre la curva $y = \dfrac{x - 3}{x + 3}$ en donde las rectas tangentes tengan una pendiente de $\frac{1}{6}$.

42. Determine los puntos sobre la curva $y = (x + 1/x)(x^2 + 6x)$ en donde las rectas tangentes tengan una pendiente de -8 unidades.

(43-44) *(Costo promedio marginal)* Encuentre los costos marginales de las funciones de costo siguientes (a, b y c son constantes).

43. $C(x) = a + bx$ **44.** $C(x) = a + bx^n$

45. *(Ingreso per cápita)* Si el PNB de una nación al tiempo t es $I = 10 + 0.4t + 0.01t^2$ (en miles de millones de dólares) y el tamaño de la población (en millones) es $P = 4 + 0.1t + 0.01t^2$, determine la tasa de cambio del ingreso *per capita.*

46. Mediante la regla del cociente *demuestre* que $(d/dx)(x^{-7}) = -7x^{-8}$. (*Sugerencia*: Escriba $x^{-7} = 1/x^7$).

***47.** Generalice el ejercicio 46 para probar que $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$ cuando n es cualquier entero negativo. (*Sugerencia*: Escriba $x^n = 1/x^m$, en donde $m = -n$).

48. *(Salario real)* El salario real de cierto grupo de trabajadores aumentó de acuerdo con la fórmula $W(t) = 3 + \frac{1}{2}t$ entre 1970 y 1980, donde t es el tiempo transcurrido en años a partir de 1970. Durante este tiempo, el índice de precios al consumidor estuvo dado por $I(t) = 100 + 3t + \frac{1}{2}t^2$. El salario real es igual a $100\ W(t)/I(t)$ cuando se ajusta por la inflación. Calcule la razón de cambio de este salario real en 1970, 1975 y 1980.

49. *(Granja piscícola)* El peso de cierto lote de peces está dado por $W = nw$, donde n es el tamaño del lote y w es el peso promedio de cada pez. Si n y w cambian con el tiempo de acuerdo con las fórmulas $n = (2t^2 + 3)$ y $w = (t^2 - t + 2)$, encuentre la razón de cambio de W con respecto al tiempo.

50. *(Física)* La temperatura absoluta T de un gas está dada por $T = cPV$, donde P es la presión, V el volumen y c es alguna constante que depende de la masa del gas. Si $P = (t^2 + 1)$ y $V = (2t + t^{-1})$ como funciones del tiempo t, encuentre la razón de cambio de T con respecto a t.

51. *(Biología)* La densidad de algas en un estanque de agua es igual a n/V, donde n es el número de algas y V es el volumen de agua en el estanque. Si n y V varían con el tiempo t de acuerdo con las fórmulas $n = \sqrt{t}$ y $V = \sqrt{t} + 1$, calcule la razón de cambio de la densidad.

52. *(Ecología)* Sea x el tamaño de cierta población de depredadores y y el tamaño de la población que le sirve de alimento. Como funciones del tiempo t, $x = t^2 + 4$ y $y = 2t^2 - 3t$. Sea u el número de presas por cada depredador. Encuentre la razón de cambio de u.

■ 12-2 LA REGLA DE LA CADENA

Sea $y = f(u)$ una función de u y $u = g(x)$ una función de x. Entonces, podemos escribir

$$y = f[g(x)]$$

que representa y como una función de x, denominada la *función composición de* f y g. Se denota por $(f \circ g)(x)$. (Véase la sección 5-4).

Las derivadas de funciones compuestas pueden calcularse mediante el teorema siguiente. Se dará una demostración al final de esta sección.

TEOREMA 1 (REGLA DE LA CADENA) Si y es una función de u y u es una función de x, entonces

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

La regla de la cadena representa la que es probablemente la más útil de todas las herramientas de diferenciación, como pronto se hará evidente. Es un recurso que se utiliza con frecuencia al manejar el cálculo diferencial y el lector deberá dominar su aplicación tan pronto como sea posible. Cuando la usamos al derivar una función complicada, es necesario reconocer que la función dada se puede escribir como la composición de dos funciones más simples. Los siguientes ejemplos ilustran lo anterior.

EJEMPLO 1 Calcule dy/dx cuando $y = (x^2 + 1)^5$

Solución Podríamos resolver este problema desarrollando $(x^2 + 1)^5$ como un polinomio en x. Sin embargo, es mucho más sencillo utilizar la regla de la cadena.

Observe que y puede expresarse como la composición de dos funciones en la siguiente forma:

$$y = u^5 \quad \text{donde} \quad u = x^2 + 1$$

Se sigue que

$$\frac{dy}{du} = 5u^4 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

Por la regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5u^4 \cdot 2x = 5(x^2 + 1)^4 \cdot 2x = 10x(x^2 + 1)^4 \quad ☛ \ \mathbf{6}$$

☛ **6.** Derive las funciones siguientes. Indique cómo descompuso cada función
a) $y = (1 - x^2)^3$
b) $y = \sqrt{2x + 1}$

Si $y = f(u)$, otra manera de escribir la regla de la cadena es

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\frac{du}{dx}$$

(dado que $f'(u) = dy/du$). En particular, si $f(u) = u^n, f'(u) = nu^{n-1}$. Así tenemos el caso siguiente de la regla de la cadena.

$$\boxed{\text{Si} \quad y = [u(x)]^n, \quad \text{entonces } \frac{dy}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}}$$

La composición puede pensarse como tener diferentes capas que deben desprenderse una por una. La capa exterior de la función corresponde a la parte que debe calcularse al último al evaluarla. Por ejemplo, si $y = (x^2 + 1)^5$, la parte *exterior*

Respuesta
a) $y = u^3, \quad u = 1 - x^2,$
$$\frac{dy}{dx} = -6x(1 - x^2)^2$$
b) $y = \sqrt{u} = u^{1/2}, \quad u = 2x + 1,$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$$

de la función es la quinta potencia y la parte *interior* es $(x^2 + 1)$. Al evaluar y para un valor particular de x, debemos evaluar en primer término la parte interior, $x^2 + 1$, y luego elevar a la quinta potencia. Por ejemplo, si $x = 2$, entonces la *interior* $= x^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$ y $y = (\textit{interior})^5 = 5^5 = 3125$.

Al derivar una función compuesta, debemos derivar primero la capa exterior de la función, y después multiplicar por la derivada de la parte interior. En estos términos verbales podemos reformular la regla de la cadena en la siguiente forma:

> Si $y = f(\textit{interior})$, entonces $\dfrac{dy}{dx} = f'(\textit{interior}) \cdot$ (derivada del *interior* con respecto a x)
>
> Si $y = (\textit{interior})^n$, entonces $\dfrac{dy}{dx} = n(\textit{interior})^{n-1} \cdot$ (derivada del *interior* con respecto a x)

Aquí *interior* significa cualquier función diferenciable de x.

Por ejemplo, volviendo a $y = (x^2 + 1)^5$, pudimos tomar el *interior* como $x^2 + 1$ y $y = f(\textit{interior}) = (\textit{interior})^5$. Se sigue de inmediato que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 5(\textit{interior})^4 \cdot \frac{d}{dx}(\textit{interior})\\ &= 5(x^2 + 1)^4 \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 1)\\ &= 5(x^2 + 1)^4 \cdot 2x = 10x(x^2 + 1)^4\end{aligned}$$

lo que da la misma respuesta que antes.

EJEMPLO 2 Dada $f(t) = 1/\sqrt{t^2 + 3}$, calcule $f'(t)$

Solución Sea $u = t^2 + 3$, de modo que $y = f(t) = 1/\sqrt{u} = u^{-1/2}$. Se sigue que

$$\frac{du}{dt} = 2t \quad \text{y} \quad \frac{dy}{du} = -\frac{1}{2}u^{-3/2} = -\frac{1}{2}(t^2 + 3)^{-3/2}$$

Así que, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt}\\ &= -\frac{1}{2}(t^2 + 3)^{-3/2} \cdot 2t = -t(t^2 + 3)^{-3/2}\end{aligned}$$

En **forma alternativa**, podemos resolver directamente,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 3}} = (t^2 + 3)^{-1/2}$$

Aquí el *interior* es $(t^2 + 3)$ y el *exterior* es la potencia $-\frac{1}{2}$. Usando la fórmula de la potencia para derivar la parte exterior, tenemos

$$f'(t) = -\frac{1}{2}(t^2 + 3)^{-1/2-1} \cdot \frac{d}{dt}(t^2 + 3)$$

$$= -\frac{1}{2}(t^2 + 3)^{-3/2} \cdot 2t = t(t^2 + 3)^{-3/2}$$

EJEMPLO 3 Dada $y = (x^2 + 5x + 1)(2 - x^2)^4$, calcule dy/dx.

Solución Primero escribimos y como un producto, $y = uv$, en donde $u = x^2 + 5x + 1$ y $v = (2 - x^2)^4$. De inmediato, tenemos $u' = 2x + 5$, pero para encontrar v' debemos utilizar la regla de la cadena. Para esto, la parte *interior* $= (2 - x^2)$ y la parte *exterior* de v es la potencia cuarta. Así,

$$v' = \frac{d}{dx}(2 - x^2)^4 = 4(2 - x^2)^3 \cdot \frac{d}{dx}(2 - x^2)$$
$$= 4(2 - x^2)^3 \cdot (-2x) = -8x(2 - x^2)^3$$

Entonces, finalmente, de la regla del producto,

$$y' = uv' + vu' = (x^2 + 5x + 1)[-8x(2 - x^2)^3] + (2 - x^2)^4(2x + 5)$$

Entonces, factorizando:

$$\frac{dy}{dx} = (2 - x^2)^3[-8x(x^2 + 5x + 1) + (2x + 5)(2 - x^2)]$$
$$= (2 - x^2)^3[10 - 4x - 45x^2 - 10x^3] \quad ☛ \ 7$$

☛ **7.** Derive las funciones siguientes:
a) $y = x\sqrt{2x + 1}$
b) $y = \dfrac{x}{\sqrt{2x + 1}}$

EJEMPLO 4 Determine dy/dx si $y = \left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)^3$

Solución Aquí tenemos una alternativa de cómo dividir esta función. Podemos escribir y como una función compuesta,

$$y = u^3, \qquad u = \frac{x - 1}{x + 1} \tag{1}$$

y luego utilizar la regla de la cadena. De manera alterna, podemos escribir $y = u/v$ en donde $u = (x - 1)^3$ y $v = (x + 1)^3$ y luego utilizar la regla del cociente. O una tercera alternativa es escribir $y = uv$ en donde $u = (x - 1)^3$ y $v = (x + 1)^{-3}$ y utilizar la regla del producto. Usaremos el primero de estos métodos, pero usted podría verificar que los otros métodos dan la misma respuesta.

De las ecuaciones (1), por medio de la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2\frac{du}{dx} = 3\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^2 \frac{du}{dx}$$

Respuesta
a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x + 1}{\sqrt{2x + 1}}$
b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 1}{(2x + 1)^{3/2}}$

Para determinar du/dx escribimos $u = u_1/v_1$ en donde $u_1 = x - 1$ y $v_1 = x + 1$. Entonces, por medio de la regla del cociente

$$\frac{du}{dx} = \frac{v_1 u_1' - u_1 v_1'}{v_1^2} = \frac{(x+1) \cdot 1 - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

☛ **8.** Resuelva el ejemplo 4 utilizando la regla del cociente o la regla del producto.

Así, finalmente,

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \frac{2}{(x+1)^2} = 6\frac{(x-1)^2}{(x+1)^4} \quad \text{☛ 8}$$

EJEMPLO 5 ***(Utilidad marginal)*** Un fabricante de calzado puede utilizar su planta para producir zapatos para dama o caballero. Si él fabrica x (en miles de pares) zapatos para caballero y y (en miles de pares) zapatos para dama a la semana, entonces, x y y están relacionados por la ecuación

$$2x^2 + y^2 = 25$$

(Ésta es la ecuación de transformación del producto; véase sección 5-3). Si la utilidad es de \$10 por cada par de zapatos, calcule la utilidad marginal con respecto a x si $x = 2$.

Solución La utilidad semanal P en miles de dólares está dada por

$$P = 10x + 10y$$

dado que cada mil pares de zapatos se traducen en diez mil dólares de utilidad, así $(x + y)$ miles de pares darán $10(x + y)$ miles de dólares de utilidad. Pero

$$y^2 = 25 - 2x^2$$

o bien,

$$y = \sqrt{25 - 2x^2}$$

Por consiguiente, podemos expresar P sólo en términos de x como

$$P = 10x + 10\sqrt{25 - 2x^2}$$

La utilidad marginal con respecto a x no es otra cosa que la derivada dP/dx. Mide el incremento en la utilidad por unidad de incremento en x cuando x, la producción de calzado para caballeros, sufre un pequeño incremento. Esto es,

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx}[10x + 10(25 - 2x^2)^{1/2}]$$

Con el objetivo de derivar el segundo término, debemos aplicar la regla de la cadena con *interior* $= (25 - 2x^2)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(25 - 2x^2)^{1/2} &= \tfrac{1}{2}(25 - 2x^2)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}(25 - 2x^2) \\ &= \tfrac{1}{2}(25 - 2x^2)^{-1/2}(-4x) \\ &= -2x(25 - 2x^2)^{-1/2}\end{aligned}$$

Respuesta El primer paso es:
Regla del cociente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)^3 \cdot 3(x-1)^2 - (x-1)^3 \cdot 3(x+1)^2}{[(x+1)^3]^2}$$

Regla del producto:

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)^{-3} \cdot 3(x-1)^2 + (x-1)^3 \cdot [-3(x+1)^{-4}]$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dx} &= 10 + 10\frac{d}{dx}(25 - 2x^2)^{1/2} \\ &= 10 + 10[-2x(25 - 2x^2)^{-1/2}] \\ &= 10 - 20x(25 - 2x^2)^{-1/2}\end{aligned}$$

Si $x = 2$, el valor de y es

$$y = \sqrt{25 - 2x^2} = \sqrt{25 - 2(4)} = 17 = 4.1$$

Por tanto, la empresa está produciendo 2000 pares de zapatos para caballero y 4100 pares de zapatos para dama por semana. Su utilidad semanal es

$$P = 10(x + y) = 10(2 + 4.1) = 61$$

(o \$61,000). La utilidad marginal es

$$\frac{dP}{dx} = 10 - 20(2)[25 - 2(4)]^{-1/2} = 10 - \frac{40}{\sqrt{17}} = 0.30$$

Así que un incremento de Δx miles de pares de zapatos para caballero produce un incremento aproximado de (0.30) Δx miles de dólares en la utilidad.

Tasas relacionadas

Sea $y = f(x)$ y supongamos que x varía como una función del tiempo t. Así, dado que y es una función de x, y también variará con el tiempo. Aplicando la regla de la cadena, es posible encontrar una expresión para la tasa en que y varía en términos de la tasa a la cual x varía. Debido a que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f'(x)\frac{dx}{dt}$$

tenemos una relación directa entre las dos tasas dy/dt y dx/dt. Ésta se denomina la ecuación de **tasas relacionadas**. ☛ **9**

☛ **9.** Suponga que $y = \sqrt{x + 2}$ Encuentre dy/dt si $x = 2$ y $dx/dt = 0.5$

EJEMPLO 6 (*Tasas relacionadas*) Una empresa tiene la función de costo $C(x) = 25 + 2x - \frac{1}{20}x^2$, en donde x es el nivel de producción. Si éste es igual a 5 actualmente y está creciendo a una tasa de 0.7 por año, calcule la tasa en que los costos de producción se están elevando.

Solución Sabemos que $dx/dt = 0.7$ (cuando el tiempo se mide en años). El costo marginal está dado por

$$\frac{dC}{dx} = 2 - \frac{x}{10}$$

Por consiguiente,

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dx}\frac{dx}{dt} = \left(2 - \frac{x}{10}\right)\frac{dx}{dt}$$

Respuesta 0.125

☛ **10.** Repita el ejemplo 6 para la función de costo $C(x) = 12 + 5\sqrt{x} + 3x$

Sustituyendo $x = 5$, el nivel de producción actual, obtenemos

$$\frac{dC}{dt} = \left(2 - \frac{5}{10}\right)(0.7) = 1.05$$

Así que los costos de producción se están incrementando a una tasa de 1.05 por año. ☛ **10**

DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE LA CADENA La demostración de la regla de la cadena, cuando se presenta en forma detallada, es un poco más complicada que la dada aquí. Por tanto, incluimos una demostración que, si bien cubre la mayoría de los casos que consideraremos, tiene algunas restricciones en su rango de aplicabilidad.

Sea Δx un incremento en x. Puesto que u y y son funciones de x, variarán siempre que x lo haga, de modo que denotaremos sus incrementos por Δu y Δy. Por tanto, a condición de que $\Delta u \neq 0$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Hacemos ahora que $\Delta x \to 0$. En este límite, también tenemos que $\Delta u \to 0$ y que $\Delta y \to 0$, y así

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\ &= \left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\ &= \left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)\\ &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

como se requería.

La razón de que esta demostración esté incompleta estriba en la suposición de que $\Delta u \neq 0$. Para la mayoría de las funciones $u(x)$, nunca se dará el caso de que Δu se haga cero si Δx es muy pequeño (pero $\Delta x \neq 0$). Sin embargo, es posible que una función $u(x)$ pueda tener la peculiaridad de que Δu se haga cero repetidas veces a medida que $\Delta x \to 0$. Cuando se presentan tales funciones, la demostración dada deja de ser válida. Es posible modificar la demostración con la finalidad de cubrir casos como éste, pero no lo haremos aquí.

Respuesta $(\frac{1}{2}\sqrt{5} + 3)(0.7) \approx 2.88$

EJERCICIOS 12-2

(1-36) Calcule las derivadas de las siguientes funciones con respecto a la variable independiente respectiva.

1. $y = (3x + 5)^7$

2. $y = \sqrt{5 - 2t}$

3. $u = (2x^2 + 1)^{3/2}$

4. $x = (y^3 + 7)^6$

5. $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 1)^4}$

6. $g(x) = \dfrac{1}{(x^2 + x + 1)^3}$

7. $h(t) = \sqrt{t^2 + a^2}$

8. $F(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x}$

9. $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{t^3 + 1}}$

10. $y = \left(t + \dfrac{1}{t}\right)^{10}$

11. $y = \left(t^2 + \dfrac{1}{t^2}\right)^5$

12. $y = \dfrac{1}{\sqrt{u^2 + 9}}$

13. $y = (x^2 + 1)^{0.6}$

14. $y = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^2}}$

15. $u = \sqrt[3]{t^3 - \dfrac{1}{t^3}}$

16. $y = \sqrt{1 + x \ln 2}$

17. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}$

18. $g(x) = (x^4 + 16)^{1/4}$

19. $G(u) = (u^2 + 1)^3(2u + 1)$

20. $H(y) = (2y^2 + 3)^6(5y + 2)$

21. $f(x) = (x + 1)^3(2x + 1)^4$

22. $g(x) = (3x - 1)^5(2x + 3)^4$

23. $f(x) = x^3(x^2 + 1)^7$

24. $u = x^2\sqrt{x^3 + a^3}$

25. $y = [(x + 1)(x + 2) + 3]^4$

26. $u = [(y - 1)(2y + 3) + 7]^5$

27. $y = \left(\dfrac{3x + 2}{x - 1}\right)^7$

28. $y = \left(\dfrac{t}{t + 1}\right)^6$

29. $y = \left(\dfrac{u^2 + 1}{u + 1}\right)^3$

30. $y = \sqrt{\dfrac{3x + 7}{5 + 2x}}$

31. $y = \dfrac{(x^2 + 1)^2}{x + 1}$

32. $x = \dfrac{t^2 + 1}{(t + 1)^3}$

33. $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

34. $y = \dfrac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$

35. $x = \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2 + 4}}$

36. $Z = \dfrac{\sqrt{2x + 1}}{x + 2}$

37. Encuentre $f'(0)$ si $f(x) = (2x + 1)^4(2 - 3x)^3$

38. Encuentre $f'(1)$ si $f(x) = (x - 1)^7(x^2 + 3)^4$

(39-42) Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de las siguientes funciones en el punto que se indica.

39. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ en $(4, 5)$

40. $f(x) = x\sqrt{x^2 - 16}$ en $x = 5$

41. $(x) = (x - 2/x)^4$ en $x = 2$

42. $y = \dfrac{5}{\sqrt{x^2 + 16}}$ en $x = -3$

(43-44) *(Costo marginal)* Determine el costo marginal para las siguientes funciones de costo.

43. $C(x) = \sqrt{100 + x^2}$

44. $C(x) = 20 + 2x - \sqrt{x^2 + 1}$

(45-46) *(Costo promedio marginal)* Calcule el costo promedio marginal de las funciones de costo de los ejercicios 43 y 44.

(47-48) *(Ingreso marginal)* Determine el ingreso marginal de las siguientes relaciones de demanda.

47. $p = \sqrt{100 - 0.1x - 10^{-4}x^2}$

48. $x = 1000(8 - p)^{1/3}$

49. *(Tasa de incremento del costo)* La función de costo de un fabricante es

$$C(x) = 2000 + 10x - 0.1x^2 + 0.002x^3$$

Si el nivel de producción actual es $x = 100$ y está creciendo a una tasa de 2 al mes, calcule la tasa en que los costos de producción están creciendo.

50. *(Tasa de incremento del ingreso)* El fabricante del ejercicio 49 tiene una función de ingreso dada por $R(x) = 65x - 0.05x^2$. Determine la tasa en que está creciendo el ingreso y la tasa en que la utilidad aumenta.

51. *(Tasa de cambio del ingreso)* La ecuación de demanda del producto de una compañía es $2p + x = 300$, en donde x unidades pueden venderse a un precio de $\$p$ cada una. Si la demanda cambia a una tasa de 2 unidades por año cuando la demanda alcanza 40 unidades, ¿a qué tasa está cambiando el ingreso si la compañía ajusta su precio a la demanda cambiante?

52. *(Tasa de cambio de la utilidad)* En el ejercicio 51, los costos de la compañía son de $(225 + 60x)$ dólares para producir x unidades. Cuando el nivel de demanda alcanzó las 40 unidades y la demanda se incrementa a una tasa de 2 unidades por año, determine la tasa en que está cambiando la utilidad.

53. *(Contaminación de petróleo)* El área de una mancha circular de petróleo, que proviene de la ruptura de un oleoducto, crece a razón de 30 kilómetros cuadrados por hora. ¿Con cuánta rapidez crece el radio cuando éste es de 5 kilómetros?

54. Se está inflando un balón esférico. Si el radio es de 10 pulgadas y está creciendo a razón de 2 pulgadas cada 5 segundos, ¿con qué razón crece el volumen?

55. *(Productividad)* La productividad laboral unitaria P (producción por hora de trabajo) es una función del capital invertido K en planta y maquinaria. Suponga que $P = 0.5K^2 + K - 5$, donde K está medido en millones de dólares y P en dólares por hora de trabajo. Si K es 10 y está creciendo a razón de 2 por año, ¿con qué rapidez está creciendo P?

***56.** *(Requerimiento laboral)* Una compañía observa que cuando el volumen de su producción semanal es x miles de unidades, el número de sus empleados es $N = 500(1 + 0.01x + 0.00005x^2)$. Si la producción semanal crece 5% al año, ¿a qué razón crece el número de empleados cuando se están produciendo 100,000 unidades semanales? ¿O cuando se producen 200,000 semanales?

57. *(Reacción química)* La razón R en la cual una reacción química progresa es igual a $\sqrt{T}$, donde T es la temperatura. Si T varía con el tiempo t de acuerdo con la fórmula $T = (3t + 1)/(t + 2)$, encuentre la razón de cambio de T con respecto a t.

58. *(Germinación de semillas)* La proporción P de semillas que germinan depende de la temperatura T del suelo. Supongamos que bajo ciertas condiciones $P = T^7$ y que T varía con respecto a la profundidad de x debajo de la superficie como $T = (x^2 + 3)/(x + 3)$. Encuentre la razón de cambio de P con respecto a la profundidad.

59. *(Nuevas viviendas)* El número de nuevas viviendas por año N (millones) depende de la tasa hipotecaria de interés anual r de acuerdo con la fórmula

$$N(r) = \frac{50}{100 + r^2}$$

a) Si actualmente r es 10 y se incrementa a una tasa de 0.25 por mes, ¿cuál es la tasa de cambio de N?

b) Si $r(t) = 12 - \dfrac{8t}{t + 24}$, en donde t es el tiempo en meses, calcule la tasa de cambio de N en $t = 6$.

■ 12-3 DERIVADAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

En la figura 1 aparece la gráfica de la función exponencial $f(x) = a^x$ en el caso típico en que $a > 1$. Cuando $x = 0$, $y = a^0 = 1$, de modo que la gráfica pasa por el punto (0, 1) para cualquier valor de a. La pendiente de la gráfica al cruzar el eje y en este punto varía, dependiendo de a: cuanto más grande sea el valor de a, mayor será la pendiente en $x = 0$.

Escojamos el valor particular de a tal que la pendiente de la gráfica en $x = 0$ sea igual a 1. Para este valor de a, la gráfica está inclinada hacia arriba y su pendiente forma un ángulo de 45° con la horizontal al cruzar el eje y. La condición que debe satisfacerse es que la derivada $f'(0)$ debe ser igual a 1. De esta manera, puesto que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

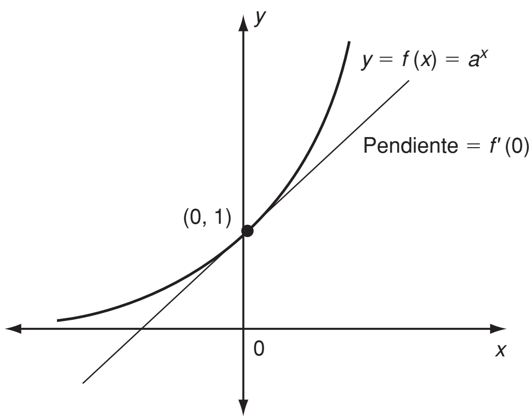


FIGURA 1

☛ **11.** Utilice su calculadora con $\Delta x = 0.001$ o 0.0001 para encontrar los valores aproximados del límite en la ecuación (1) cuando $a = 2$, cuando $a = 2.5$ y cuando $a = 3$

tenemos que

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - a^0}{\Delta x}$$

Ya que $a^0 = 1$, la condición $f'(0) = 1$ se reduce a

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1 \tag{1}$$

Esta condición determinará el valor de a para nosotros. Resulta que el valor de a que satisface esta condición es $a = e = 2.71828\ldots$, la base de las funciones exponencial y logaritmo naturales que se presentaron en el capítulo 6. La demostración de esta afirmación está más allá del alcance del libro; sin embargo, la tabla 1 nos convence bastante de su validez. Sabemos que $e = 2.7183$ hasta cuatro cifras decimales, y en la tabla calculamos los valores de la cantidad $[(2.7183)^{\Delta x} - 1]/\Delta x$ para una serie de valores de Δx empezando con $\Delta x = 1$ y decreciendo hasta $\Delta x = 0.0001$. Es claro que, a medida que Δx se hace más pequeño, la cantidad en cuestión está cada vez más cerca de 1. Por consiguiente, la ecuación (1) es casi exacta tomando $a = 2.7183$. Un cálculo más exacto demostraría que la cantidad $[(2.7183)\Delta^x - 1]/\Delta x$, en realidad se aproxima al valor límite 1.00000668 (hasta ocho cifras decimales) cuando $\Delta x \to 0$. ☛ **11**

En vez de tomar $a = 2.7183$, pudimos considerar aun una mejor aproximación del número irracional e (por ejemplo, $a = 2.718282$, que es correcto hasta siete cifras decimales). Así pues, al construir una tabla similar a la anterior, podríamos convencernos que el valor límite de $(a^{\Delta x} - 1)/\Delta x$ cuando $\Delta x \to 0$ está aún más cerca de 1. (De hecho, con $a = 2.718282$, este valor límite es igual a 1.0000000631 hasta diez cifras decimales). Por ello podemos estar seguros de que la condición (1) se cumple eligiendo como base de la expresión exponencial a e.

Calculemos ahora la derivada de la función e^x para cualquier x. Haciendo $y = e^x$, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

TABLA 1

Δx	$\dfrac{(2.7183)^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$
1	1.7183
0.1	1.0517
0.01	1.0050
0.001	1.0005
0.0001	1.000057

Respuesta 0.693, 0.916 y 1.099

Pero usando una propiedad básica de los exponentes, $e^{x+\Delta x} = e^x \cdot e^{\Delta x}$, y así

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x$$

después de usar la ecuación (1) (con e en vez de a).

Así, tenemos el importante resultado de que la derivada de la función e^x es la función misma.

$$\boxed{\text{Si} \quad y = e^x, \quad \text{entonces} \quad \frac{dy}{dx} = e^x}$$

La razón de que la función exponencial natural sea tan importante descansa en esta propiedad de que su derivada siempre es igual a la función misma. Es, excepto por un factor constante, la única función que posee esta propiedad. Es este hecho el que explica nuestro interés en el número e y en las expresiones exponenciales y logarítmicas que tienen a e como base.

EJEMPLO 1 Determine dy/dx si $y = xe^x$

Solución Para derivar la función xe^x, debemos aplicar la regla del producto dado que podemos escribir $y = uv$ con $u = x$ y $v = e^x$. Así,

$$\frac{du}{dx} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{dv}{dx} = e^x$$

☛ **12.** Derive

a) $y = x^3 e^x$ *b*) $y = \dfrac{e^x}{x+1}$

Por consiguiente,

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} = (x)(e^x) + (e^x)(1) = (x + 1)e^x$$ ☛ **12**

EJEMPLO 2 Determine dy/dx si $y = e^{x^2}$

Solución Aquí separamos a y como una función compuesta, $y = e^u$ en donde $u = x^2$. (Nuevamente, para ver esto, piense como evalúa y. Lo último que calcularía sería la función exponencial, de modo que ésta es la parte exterior). Entonces,

$$\frac{dy}{du} = e^u, \qquad \frac{du}{dx} = 2x$$

así, con base en la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = e^u \cdot 2x = 2xe^{x^2}$$

Por el mismo método que utilizamos en el ejemplo 2, la regla de la cadena nos permite derivar funciones compuestas del tipo $e^{u(x)}$, en donde $u(x)$ es cualquier función de x diferenciable. Obtenemos lo siguiente:

Respuesta *a*) $x^2(x + 3)e^x$

b) $\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$

$$\boxed{\text{Si} \quad y = e^{u(x)}, \quad \text{entonces} \quad \frac{dy}{dx} = e^{u(x)}u'(x)}$$

En forma verbal podemos decir

$$\frac{d}{dx}\, e^{interior} = e^{interior}\, \frac{d}{dx}\,(interior)$$

☛ **13.** Derive
a) $y = e^{3x}$ *b*) $y = e^{x^3 - 3x^2}$
c) $y = xe^{1/x}$

en donde *interior* es cualquier función de x diferenciable. ☛ **13**

Un caso particular que es bueno recordar es $u(x) = kx$, en donde k es una constante. Para esto tenemos

$$\text{Si} \quad y = e^{kx} \quad \text{entonces} \quad \frac{dy}{dx} = ke^{kx} \tag{2}$$

EJEMPLO 3 ***(Utilidades y publicidad)*** Cierto artículo puede fabricarse y venderse con una utilidad de \$10 cada uno. Si el fabricante gasta x dólares en la publicidad del artículo, el número de artículos que pueden venderse será igual a $1000(1 - e^{-0.001x})$. Si P denota la utilidad neta por las ventas, calcule dP/dx e interprete esta derivada. Evalúe dP/dx si $x = 1000$ y cuando $x = 3000$.

Solución Puesto que cada artículo produce una utilidad de \$10, la utilidad bruta total originada por las ventas se obtiene multiplicando el número de ventas por \$10. La utilidad neta se obtiene, entonces, restando los costos de publicidad:

$$P = 10{,}000(1 - e^{-0.001x}) - x$$

Por tanto,

$$\frac{dP}{dx} = -10{,}000\, \frac{d}{dx}\,(e^{-0.001x}) - 1 = -10{,}000(-0.001e^{-0.001x}) - 1$$

en donde hemos utilizado la ecuación (2) con k reemplazada por –0.001. Entonces,

$$\frac{dP}{dx} = 10e^{-0.001x} - 1$$

La interpretación de esta derivada es que mide la tasa de cambio de la utilidad neta con respecto a los gastos de publicidad. En otras palabras, dP/dx da el incremento en el número de dólares en la utilidad neta producida por un gasto adicional (en dólares) en publicidad.

Cuando $x = 1000$,

$$\frac{dP}{dx} = 10e^{-1} - 1 = 10(0.3679) - 1 = 2.679$$

De modo que si se gastan \$1000 en publicidad, cada dólar adicional produce un incremento de \$2.68 en la utilidad neta.

Si $x = 3000$,

$$\frac{dP}{dx} = 10(e^{-3}) - 1 = 10(0.0498) - 1 = -0.502$$

Respuesta *a*) $3e^{3x}$
b) $(3x^2 - 6x)e^{x^3 - 3x^2}$
c) $(1 - x^{-1})e^{1/x}$

Por tanto, cuando se gastan $3000 en publicidad, un gasto adicional en dólares produce de esta manera una disminución de $0.50 en la utilidad neta. En este caso, es claro que el fabricante no debería hacer más publicidad (el costo de publicidad extra incrementaría en exceso el valor de las ventas adicionales que se generarían). De hecho, cuando $x = 3000$, ya se está gastando de más en publicidad.

EJEMPLO 4 ***(Crecimiento de la población)*** Una población crece de acuerdo con el modelo logístico (véase la sección 6-4) tal que en el instante t su tamaño y está dado por

$$y = y_m(1 + Ce^{-kt})^{-1}$$

con y_m, C y k constantes. Calcule la tasa de crecimiento de la población en el instante t.

Solución La tasa de crecimiento requerida es dy/dt. Observemos que y es una función compuesta de t de la forma

$$y = y_m\,(interior)^{-1}, \qquad interior = 1 + Ce^{-kt}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= y_m\,(-1)(interior)^{-2}\,\frac{d}{dt}\,(interior)\\ &= -y_m(1 + Ce^{-kt})^{-2}\,\frac{d}{dt}\,(1 + Ce^{-kt})\\ &= -y_m(1 + Ce^{-kt})^{-2}(-kCe^{-kt})\\ &= \frac{ky_mCe^{-kt}}{(1 + Ce^{-kt})^2}\end{aligned}$$

Nuevamente la ecuación (2) se ha utilizado para derivar e^{-kt}

Calculemos ahora la derivada de la función $y = \ln x$, la función logaritmo natural.

Si $y = \ln x$, entonces $x = e^y$. Derivemos esta segunda ecuación con respecto a x.

$$\frac{d}{dx}(e^y) = \frac{d}{dx}(x) = 1$$

Pero, por la regla de la cadena, vemos que

$$\frac{d}{dx}(e^y) = \frac{d}{dx}(e^y)\cdot\frac{dy}{dx} = e^y\frac{dy}{dx},$$

puesto que $(d/dy)(e^y) = e^y$. Por tanto, $e^y(dy/dx) = 1$, y así

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

Concluyendo:

$$\boxed{\text{Si} \quad y = \ln x, \quad \text{entonces} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}}$$

EJEMPLO 5 Calcule dy/dx si $y = \ln(x + c)$ en donde c es una constante.

☛ **14.** Derive
a) $y = x \ln x$
b) $y = x \ln (x + 1)$
c) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

Solución Tenemos que y es una función compuesta, con $y = \ln u$ y $u = x + c$. Así que, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(\ln u) \cdot \frac{du}{dx} = \left(\frac{1}{u}\right) \cdot (1) = \frac{1}{x + c}$$ ☛ **14**

En general, la regla de la cadena nos permite derivar cualquier función compuesta de la forma $y = \ln u(x)$ de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(\ln u) \cdot u'(x) = \frac{1}{u}u'(x)$$

Así, si $y = \ln u(x)$, entonces $\dfrac{d}{dx} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

De manera alternativa, en forma verbal,

$$\frac{d}{dx} \ln (\textit{interior}) = \frac{1}{\textit{interior}} \frac{d}{dx} (\textit{interior})$$

en donde *interior* indica cualquier función de x diferenciable.

EJEMPLO 6 Derive $\ln (x^2 + x - 2)$

Solución Aquí tomamos *interior* $= (x^2 + x - 2)$

$$\frac{d}{dx} \ln (x^2 + x - 2) = \frac{1}{(x^2 + x - 2)} \frac{d}{dx}(x^2 + x - 2)$$

$$= \frac{1}{(x^2 + x - 2)}(2x + 1)$$

$$= \frac{2x + 1}{x^2 + x - 2}$$

EJEMPLO 7 Si $f(x) = \ln x/x^2$, determine $f'(1)$

Solución Escribimos $f(x) = u/v$ en donde $u = \ln x$ y $v = x^2$. Entonces, $u' = 1/x$ y $v' = 2x$. De la regla del cociente,

$$f'(x) = \frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{x^2(1/x) - (\ln x) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

Por tanto,

$$f'(1) = \frac{1 - 2 \ln 1}{1^3} = 1$$

ya que $\ln 1 = 0$

Respuesta *a*) $1 + \ln x$
b) $\dfrac{x}{x + 1} + \ln (x + 1)$
c) $\dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

☛ **15.** Derive
a) $y = \ln [(x + 1)^2]$
b) $y = [\ln (x + 1)]^2$
c) $y = \ln [\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}]$

Cuando requerimos derivar el logaritmo de un producto o cociente de varias expresiones, a menudo es de utilidad simplificar la función dada aplicando, en primer término, las propiedades de logaritmos. Si le gustaría revisar esto, regrese a la sección 6-3.

EJEMPLO 8 Calcule dy/dx cuando $y = \ln (e^x/\sqrt{x + 1})$

Solución Primero simplificamos y utilizando las propiedades de logaritmos

$$y = \ln\left(\frac{e^x}{\sqrt{x + 1}}\right) = \ln (e^x) - \ln (\sqrt{x + 1}) = x \ln e - \frac{1}{2} \ln (x + 1)$$

Por consiguiente (dado que $\ln e = 1$),

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{2}\frac{d}{dx} \ln (x + 1) = 1 - \frac{1}{2(x + 1)}$$

Una solución alterna a este problema es escribir $y = \ln u$, en donde $u = e^x/\sqrt{x + 1}$, y luego utilizar la regla de la cadena para escribir $y' = (1/u)u'$. Lo dejamos para que se convenza por usted mismo de que este enfoque conduce a cálculos *mucho* más difíciles que los que acabamos de hacer. ☛ **15**

Respuesta *a*) $\dfrac{2}{x + 1}$

b) $\dfrac{2 \ln(x + 1)}{x + 1}$

c) $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

EJEMPLO 9 Determine dy/dx si $y = \log x$.

Solución Para derivar los logaritmos comunes, los expresamos en términos de logaritmo natural por medio de la fórmula de cambio de base de la página 252.

$$y' = \log x = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Así pues,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln 10}\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x} = \frac{0.4343}{x}$$

puesto que $1/\ln (10) = 1/2.3026\ldots = 0.4343\ldots$

☛ **16.** Derive
a) $y = \log_2 x$
b) $y = \ln (2^x)$ *c*) $y = 2^x$

Observe que en este ejemplo tuvimos que expresar el logaritmo común en términos de logaritmo natural antes de derivarlo. Esto también debe hacerse con los logaritmos de cualquier otra base, tales como $\log_a x$. Estas funciones deben expresarse en primer término como logaritmos naturales. De manera similar, una función exponencial general a^x debe escribirse como e^{kx} ($k = \ln a$) antes de derivarla. ☛ **16**

Ahora que hemos presentado las derivadas de las funciones exponencial y logarítmica, resumimos las tres formas de la regla de la cadena que serán de mayor utilidad. En la tabla 2, *interior* representa cualquier función de x diferenciable.

Respuesta *a*) $\dfrac{1}{x \ln 2}$

b) $\ln 2$ *c*) $2^x \ln 2$

TABLA 2 *Resumen de la regla de la cadena*

$f(x)$	$f'(x)$
$[u(x)]^n$	$n[u(x)]^{n-1}\, u'(x)$
$e^{u(x)}$	$e^{u(x)}u'(x)$
$\ln u(x)$	$\frac{1}{u(x)}\, u'(x)$

o bien,

$f(x)$	$f'(x)$
$(interior)^n$	$n\,(interior)^{n-1}\,\frac{d}{dx}\,(interior)$
$e^{interior}$	$e^{interior}\,\frac{d}{dx}\,(interior)$
$\ln\,(interior)$	$\frac{1}{interior}\,\frac{d}{dx}\,(interior)$

EJERCICIOS 12-3

(1-66) Calcule dy/dx para cada una de las siguientes funciones.

1. $y = 7e^x$

2. $y = e^7$

3. $y = e^{3x}$

4. $y = \dfrac{1}{e^x}$

5. $y = e^{x^2}$

6. $y = e^{x^3+1}$

7. $y = e^{\sqrt{x}}$

8. $y = e^{1/x}$

9. $y = xe^x$

10. $y = xe^{-x^2}$

11. $y = x^2e^{-x}$

12. $y = \dfrac{e^x}{x}$

13. $y = \dfrac{x+1}{e^x}$

14. $y = \dfrac{e^{x^3}}{e^{x^2}}$

15. $y = \dfrac{e^{x^2}}{e^x}$

16. $y = e^{x^2} + (x^2)^e$

17. $y = \dfrac{e^x}{x+2}$

18. $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

19. $y = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

20. $y = 3 \ln x$

21. $y = \dfrac{\ln x}{7}$

22. $y = \ln 2$

23. $y = \ln 3 + \sqrt{\log 4}$

24. $y = (\ln 3)(\ln x)$

25. $y = \dfrac{\ln x}{\ln 7}$

26. $y = \ln(3x + 7)$

27. $y = \ln(x^2 + 5)$

28. $y = \ln(1 + e^x)$

29. $y = (\ln x)^5$

30. $y = \sqrt{\ln x}$

31. $y = \dfrac{1}{\ln x}$

32. $y = \dfrac{1}{1+\ln x}$

33. $y = \dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}$

34. $y = x^2 \ln x$

35. $y = x \ln x^2$

36. $y = x(\ln x - 1)$

37. $y = x^2 \ln (x^2 + 1)$

38. $y = x \ln (x + 1)$

39. $y = e^x \ln x$

40. $y = e^x \ln(x^2 + 1)$

41. $y = \dfrac{\ln x}{x}$

42. $y = \dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$

43. $y = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

44. $y = \dfrac{x+2}{\ln(x+2)}$

45. $y = \ln (3^{x^2})$

46. $y = \log (e^x)$

47. $y = x^2 \log(e^x)$

48. $y = \dfrac{\log (e^x)}{x}$

49. $y = \dfrac{x^2}{\ln 3^x}$

50. $y = \dfrac{\ln x}{e^x}$

51. $y = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$

52. $y = \ln\left[\dfrac{(x+2)e^{3x}}{x^2+1}\right]$

53. $y = \ln\left[\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+4}\right]$

54. $y = \dfrac{\ln x^3}{\ln x^2}$

(*Sugerencia:* Utilice la fórmula de cambio de base en los ejercicios 55-66).

55. $y = a^x$

56. $y = 3^{x^2+1}$

57. $y = \log_a x$

58. $y = \log_3(x + 1)$

59. $y = \dfrac{\ln x}{\log x}$

60. $y = \dfrac{\log_2 x}{\log_3 x}$

61. $y = (\log_3 x)(\log_x 2)$

62. $y = \log_x x^2$

63. $y = \log_x(x + 1)$

64. $y = xa^{x2}$

65. $y = x^2 \log x$

66. $y = \dfrac{\log x}{x}$

67. Encuentre $f'(1)$ si $f(x) = e^x \ln x$

68. Encuentre $f'(0)$ si $f(x) = e^{2x} \ln (x + 1)$

(69-72) Determine una ecuación de la recta tangente a las gráficas de las siguientes funciones en el punto indicado.

69. $y = \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$ en $(0, 0)$

70. $y = x \ln x$ en $x = 1$

71. $y = \ln (x^2 + 1)$ en $x = 0$

72. $y = \ln\left(\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$ en $x = 0$

(73-76) *(Ingreso marginal)* Calcule el ingreso marginal para las siguientes relaciones de demanda.

72. $p = 5 - e^{0.1x}$

74. $p = 4 + e^{-0.1x}$

75. $x = 1000(2 - e^p)$

76. $x = 100 \ln (16 - p^2)$

(77-78) *(Costos marginales)* Calcule el costo marginal y el costo promedio marginal para las siguientes funciones de costo.

77. $C(x) = 100 + x + e^{-0.5x}$

78. $C(x) = \sqrt{25 + x + \ln (x + 1)}$

79. *(Publicidad y ventas)* Para vender x unidades de su producto semanalmente, una compañía debe gastar A dólares semanales en publicidad, donde

$$A = 200 \ln\left(\frac{400}{500 - x}\right)$$

Los objetos se venden a \$5 cada uno. La utilidad neta es entonces $R = 5x - A$. Calcule la razón de cambio de R con respecto a A.

80. *(Utilidad marginal)* Una compañía encuentra que su utilidad está dada por $R = 2pe^{-0.1p}$ cuando su producto está cotizado en p dólares por unidad. Encuentre la utilidad marginal con respecto al precio cuando p es

a) \$5 *b)* \$10 *c)* \$15

81. *(Ley de difusión de Fick)* De acuerdo con la ley de Fick, la difusión de un soluto a través de la membrana de una célula está gobernada por la ecuación $c'(t) = k[c_s - c(t)]$, donde $c(t)$ es la concentración del soluto en la célula, c_s es la concentración en el medio que la rodea y k es la constante que depende del tamaño de la célula y de las propiedades de la membrana. Pruebe que la función

$$c(t) = c_s + Ce^{-kt}$$

satisface esta ecuación para cualquier constante C. Relacione C con la concentración inicial $c(0)$.

***82.** *(Función de supervivencia)* El porcentaje de abejas que mueren durante el invierno de cierto grupo de colmenas es una función de la temperatura promedio. Supongamos que $p = 100e^{-0.1e^{0.1T}}$ donde T es la temperatura (en grados Celsius) y p es el porcentaje de abejas muertas. Si T decrece a razón de 2°C por semana, calcule la razón en la cual cambia p cuando $t = -10$°C.

83. *(Acidez)* El pH de una solución está definido como

$$\text{pH} = -\log_{10}[\text{H}]$$

donde [H] es la concentración de iones de hidrógeno. Es una medida de acidez, con pH = 7 la solución es neutral. Calcule los valores de $d\text{pH}/d[\text{H}]$ cuando $[\text{H}] = 10^{-4}$, 10^{-7} y 10^{-10}.

84. *(Medicina)* Después de una inyección, la concentración de cierta droga en la sangre de un paciente, cambia de acuerdo con la fórmula $c = pt^2e^{-kt}$, donde p y k son constantes. Calcule la razón de crecimiento de la concentración en el tiempo t.

***85.** *(Crecimiento de una población)* Cierta población crece de acuerdo con la fórmula

$$y = y_m(1 - Ce^{-kt})^3$$

en donde y_m, C y k son constantes. Calcule la tasa de crecimiento en el instante t y pruebe que

$$\frac{dy}{dt} = 3ky^{2/3}(y_m^{1/3} - y^{1/3})$$

***86.** *(Difusión de información)* La proporción p de médicos que han oído algo acerca de una nueva droga t meses después de que salió a la venta satisface la ecuación

$$\ln p - \ln(1-p) = k(t - C)$$

en donde k y C son constantes. Exprese p como una función de t y calcule dp/dt. Demuestre que

$$\frac{dp}{dt} = kp(1-p)$$

***87.** Pruebe que $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$ para cualquier número real n y $x > 0$. (*Sugerencia*: Escriba $x^n = e^{n \ln x}$).

■ 12-4 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Si $y = f(t)$ es una función del tiempo t, entonces, como hemos visto, la derivada $dy/dt = f'(t)$ representa la tasa en que y cambia. Por ejemplo, si $s = f(t)$ es la distancia recorrida por un móvil, $ds/dt = f'(t)$ da la tasa de cambio de la distancia o, en otras palabras, la *velocidad* instantánea del móvil. Denotaremos esta velocidad con v. Así que v también es una función de t, y (por regla) puede derivarse y resultar así la derivada dv/dt.

Al incrementarse la velocidad de un móvil, decimos que se *acelera.* Por ejemplo, cuando presionamos el pedal de aceleración de un automóvil, provocamos que aumente su velocidad, esto es, que vaya más aprisa. Supongamos que en un periodo de 5 segundos, el automóvil acelera de una velocidad de 20 pies/segundo (que es alrededor de 14 millas por hora) a 80 pies/segundo (55 millas por hora). El incremento en la velocidad es $\Delta v = 60$ pies/segundo y el incremento de tiempo $\Delta t =$ 5 segundos, de modo que la aceleración promedio está dada por

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{60}{5} = 12 \text{ pies/segundo/segundo (o pies/segundo}^2\text{)}$$

Para un objeto en movimiento, a menudo nos interesa la *aceleración instantánea,* que se define como el límite de la aceleración promedio $\Delta v/\Delta t$ cuando $\Delta t \to 0$. En otras palabras, la aceleración instantánea es la derivada dv/dt. Nos da la tasa instantánea en que la velocidad está cambiando.

Así que, con la finalidad calcular la aceleración, debemos derivar s y luego derivar el resultado una vez más. Tenemos que

$$\text{Aceleración} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

La aceleración se denomina la *segunda derivada* de s con respecto a t y por lo regular se denota con $f''(t)$ o por d^2s/dt^2.

En problemas en que intervienen objetos móviles, la segunda derivada, la aceleración, es una cantidad de mucha importancia. Por ejemplo, el grado de seguridad del sistema de frenos de un automóvil depende de la desaceleración que pueda lograr (la desaceleración no es otra cosa que una aceleración negativa). O los efectos fisiológicos del lanzamiento de un cohete en un astronauta dependen del nivel de aceleración a que esté sujeto. De mayor importancia, una de las leyes básicas de la mecánica establece que cuando una fuerza actúa sobre un objeto, le produce una aceleración, y la magnitud de ésta es directamente proporcional al grado de la fuerza. Así pues, la aceleración interviene en las leyes básicas del movimiento de manera esencial.

Examinaremos las derivadas de orden superior en un contexto más abstracto. Sea $y = f(x)$ una función dada de x con derivada $dy/dx = f'(x)$. Con toda corrección, llamaremos a ésta la **primera derivada** de y con respecto a x. Si $f'(x)$ es una función de x diferenciable, su derivada se conoce como la **segunda derivada** de y con respecto a x. Si la segunda derivada es una función de x diferenciable, su derivada se denomina la **tercera derivada** de y, etcétera.

La primera y todas las derivadas de orden superior de y con respecto a x en general se denotan por uno de los tipos de notación siguientes:

$$\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad \frac{d^3y}{dx^3}, \qquad \dots, \qquad \frac{d^ny}{dx^n}$$

$$y', \qquad y'', \qquad y''', \qquad \dots, \qquad y^{(n)}$$

$$f'(x), \qquad f''(x), \qquad f'''(x), \qquad \dots, \qquad f^{(n)}(x)$$

De la definición de las derivadas de orden más alto, es claro que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right), \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

etcétera.

EJEMPLO 1 Calcule la primera derivada y las de orden superior de $3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1$

Solución Sea $y = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1$. Se sigue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1) = 12x^3 - 15x^2 + 14x$$

La segunda derivada de y se obtiene derivando la primera derivada.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(12x^3 - 15x^2 + 14x) = 36x^2 - 30x + 14$$

Derivando otra vez, obtenemos la tercera derivada.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}(36x^2 - 30x + 14) = 72x - 30$$

Continuando este proceso, tenemos

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \frac{d}{dx}(72x - 30) = 72$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = \frac{d}{dx}(72) = 0$$

☛ **17.** Calcule las derivadas hasta la de tercer orden:
a) $y = x^6$ *b*) $y = x^{-2}$
c) $y = x^2 \ln x$

Respuesta
a) $y' = 6x^5$, $y'' = 30x^4$, $y''' = 120x^3$
b) $y' = -2x^{-3}$, $y'' = 6x^{-4}$, $y''' = -24x^{-5}$
c) $y' = 2x \ln x + x$, $y'' = 2 \ln x + 3$, $y''' = 2x^{-1}$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right) = \frac{d}{dx}(0) = 0$$

etcétera. ☛ **17**

En este ejemplo particular, todas las derivadas de orden más alto que la cuarta derivada son cero. Esto ocurre porque la cuarta derivada es una constante.

EJEMPLO 2 Calcule la segunda derivada de $f(t) = e^{t^2+1}$

Solución Con el propósito de calcular la segunda derivada, usamos la regla de la cadena. Así que

$$f'(t) = e^{t^2+1} \cdot \frac{d}{dt}(t^2 + 1) = e^{t^2+1} \cdot 2t = 2te^{t^2+1}$$

Ahora $f'(t)$ es el producto de dos funciones $u = 2t$ y $v = e^{t^2+1}$. Con la finalidad de calcular $f''(t)$, aplicaremos la regla del producto.

$$f''(t) = 2t\frac{d}{dt}(e^{t^2+1}) + e^{t^2+1}\frac{d}{dt}(2t) = 2t\left[e^{t^2+1}\frac{d}{dt}(t^2 + 1)\right] + e^{t^2+1}(2)$$

en donde usamos la regla de la cadena para derivar $v = e^{t^2+1}$

En consecuencia,

$$f''(t) = 2t[e^{t^2+1} \cdot 2t] + 2e^{t^2+1} = 2e^{t^2+1}(2t^2 + 1)$$

EJEMPLO 3 ***(Caída libre)*** Un cuerpo cae bajo la acción de la gravedad desde una posición de reposo una distancia de $s = 16t^2$ a los t segundos. Calcule su aceleración.

Solución La velocidad después de t segundos es

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(16t^2) = 32t \text{ pies/segundo}$$

Obtenemos la aceleración derivando de nuevo:

$$\text{Aceleración} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}(32t) = 32 \text{ pies/segundo}^2$$

Observe que es independiente de t: un cuerpo que cae bajo la acción de la gravedad tiene una aceleración constante de 32 pies/segundo^2. ☛ **18**

☛ **18.** Si la distancia recorrida en t segundos es $s = 12t - t^3$, calcule la distancia, velocidad y aceleración cuando $t = 1$, $t = 2$, y $t = 3$

Respuesta
11, 9 y -6 en $t = 1$
16, 0 y -12 en $t = 2$
9, -15 y -18 en $t = 3$

Si $C(x)$ es la función de costo de un fabricante (el costo de producir x artículos), entonces, la primera derivada $C'(x)$ da el costo marginal, esto es, el costo por artículo adicional de un pequeño incremento en la producción. La segunda derivada $C''(x)$ representa la tasa de cambio del costo marginal con respecto al incremento de la producción. Tendremos más que decir sobre la interpretación de esta cantidad en el próximo capítulo; mientras tanto, el siguiente ejemplo ilustrará ciertos aspectos de su significado.

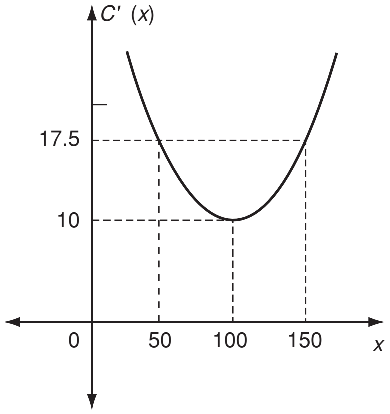


FIGURA 2

EJEMPLO 4 ***(Análisis de la función de costo)*** Para la función de costo

$$C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000$$

el costo marginal es

$$C'(x) = 0.003x^2 - 0.6x + 40$$

La segunda derivada es

$$C''(x) = 0.006x - 0.6 = 0.006(x - 100)$$

Si $x = 150$, el costo marginal es $C'(150) = 17.5$. Más aún,

$$C''(150) = 0.006(150 - 100) = 0.3$$

Podemos interpretar que este resultado significa que cada unidad adicional producida conduce a un incremento de 0.3 en el costo marginal.

Observe que en este ejemplo, $C''(x) < 0$ cuando $x < 100$. Esto significa que si $x < 100$, el incremento en la producción lleva a un decrecimiento en el costo marginal. La gráfica de $C'(x)$ es una función de x que se inclina hacia abajo cuando $x < 100$. (Véase la figura 2). Sin embargo, si $x > 100$, la gráfica de $C'(x)$ se inclina hacia arriba, de modo que su pendiente, $C''(x)$, es positiva. En este caso, el incremento en la producción causa un incremento en el costo marginal.

EJERCICIOS 12-4

(1-4) Calcule las derivadas primera y de orden superior de las siguientes funciones con respecto a la variable independiente correspondiente.

1. $y = 3x^5 + 7x^3 - 4x^2 + 12$

2. $u = (t^2 + 1)^2$

3. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 16$

4. $y(u) = (u^2 + 1)(3u - 2)$

5. Encuentre y'' si $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

6. Encuentre $f'''(t)$ si $f(t) = \dfrac{t - 1}{t + 1}$

7. Determine $g^{(4)}(u)$ si $g(u) = \dfrac{1}{3u + 1}$

8. Encuentre $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ si $y = \sqrt{t^2 + 1}$

9. Encuentre $\dfrac{d^2u}{dx^2}$ si $u = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

10. Encuentre $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ si $y = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$, $(x \neq 1)$

11. Encuentre y''' si $y = \ln x$

12. Encuentre $y^{(4)}$ si $y = x \ln x$

13. Determine $y^{(4)}$ si $y = xe^x$

14. Encuentre y'' si $y = e^{x^2}$

15. Determine y'' si $y = \ln [(x + 1)(x + 2)]$

16. Encuentre y''' si $y = x^3 + e^{2x}$

17. Encuentre y'' si $y = (x + 1)e^{-x}$

18. Encuentre y'' si $y = \dfrac{x^2 + 1}{e^x}$

19. Si $y = ae^{mx} + be^{-mx}$, donde a, b, m son constantes, entonces, pruebe que $d^2y/dx^2 = m^2y$

20. Si $y = x + 1/x$ entonces pruebe que $x^2y'' + xy' - 2 = 0$

21. *(Velocidad y aceleración)* Calcule la velocidad y la aceleración de un móvil para cada distancia dada s recorrida al tiempo t.

a) $s = 9t + 16t^2$

b) $s = 3t^3 + 7t^2 - 5t$

22. *(Velocidad y aceleración)* Suponga que la distancia s recorrida al tiempo t está dada por $s = t(3 - t)$.

a) ¿En qué instantes es cero la velocidad?

b) ¿Cuál es el valor de la aceleración cuando la velocidad es cero?

(23-24) *(Tasa de costo marginal)* Calcule el costo marginal y la tasa de cambio del costo marginal con respecto al volumen de producción en el caso de las siguientes funciones de costo.

23. $C(x) = 500 + 30x - 0.1x^2 + 0.002x^3$

24. $C(x) = 500 + 20x - 2x \ln x + 0.01x^2$

25. *(Tasa de costo promedio marginal)* Si $\overline{C}(x)$ es la función de costo promedio, demuestre que

$$\overline{C}''(x) = \frac{C'''(x)}{x} - \frac{2C'(x)}{x^2} + \frac{2C(x)}{x^3}$$

26. *(Tasa de ingreso marginal)* Si $R(x)$ es la función de ingreso, pruebe que

$$R''(x) = 2p'(x) + xp''(x)$$

en donde $p = p(x)$ es el precio como una función de la demanda.

***27.** *(Crecimiento de población)* Una población crece de acuerdo con la ecuación logística $y = y_m/(1 + Ce^{-kt})$, donde y_m, C y k son constantes. Calcule la razón con la cual cambia la razón de crecimiento de la población.

REPASO DEL CAPÍTULO 12

Términos, símbolos y conceptos clave

12.1 Regla del producto. Regla del cociente. Costo marginal promedio.

12.2 Regla de la cadena. Tasas relacionadas.

12.3 Derivadas de las funciones exponencial y logarítmica.

12.4 Segunda derivada; aceleración. Derivadas tercera, cuarta y de orden superior.

Fórmulas

Regla del producto:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \quad \text{o} \quad (uv)' = uv' + vu'$$

Regla del cociente:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2} \quad \text{o bien,} \quad \left(\frac{u}{v}\right)^1 = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Ingreso marginal:

$$\frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}(px) = p + x\frac{dp}{dx}$$

Costo marginal promedio:

$$\frac{d\overline{C}}{dx} = \frac{1}{x}[C'(x) - \overline{C}(x)], \quad \text{en donde} \quad \overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Regla de cadena: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

Tasas relacionadas: Si $y = f(x)$, entonces $\frac{dy}{dt} = f'(x)\frac{dx}{dt}$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Formas de la regla de la cadena:

Si $y = [u(x)]^n$, entonces $\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}$

Si $y = e^{kx}$, entonces $\frac{dy}{dx} = ke^{kx}$

Si $y = e^{u(x)}$, entonces $\frac{dy}{dx} = e^{u(x)}\frac{du}{dx}$

Si $y = \ln u(x)$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u(x)}\frac{du}{dx} = \frac{u'(x)}{u(x)}$

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) La derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones.

b) La derivada de un cociente de funciones, siempre que la función en el denominador no sea igual a cero, es el cociente de las derivadas.

c) La segunda derivada de una función lineal siempre es cero, sin importar en dónde se evalúe.

d) $\frac{d}{dx}(e^x) = xe^{x-1}$

e) $\frac{d}{dx}(x^e) = (e-1)x^e$

f) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3}$

g) Si la aceleración de un móvil es cero, entonces su velocidad también es cero.

h) Si $y = [u(x)]^n$, entonces $\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1}u'(x)$

i) Si $p(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $\frac{d^n}{dx^n}[p(x)]$ es una constante.

j) $\frac{d}{dx}(log(e)) = \frac{1}{e}$

k) Si $y = u(x)$, entonces $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{y^2}$

(2-25) Calcule $\frac{dy}{dx}$ para las siguientes funciones.

2. $y = (3x + 7)(5 - x^2)$

3. $y = (x^2 + 1)(x^2 - 3x^2)$

4. $y = \frac{3x^2 - 1}{1 + x}$

5. $y = \frac{e^x}{x - 1}$

6. $y = \frac{(x^2 + 1)^2}{(x - 1)^3}$

7. $y = \frac{\sqrt{4x + 1}}{\sqrt{x^2 + 3}}$

8. $y = \frac{\ln(x + 1)}{x + 1}$

9. $y = \frac{x^2 + 3x - 5}{\ln(x)}$

10. $y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$

***11.** $y = x^x$

***12.** $y = 2^x$

13. $y = x^3ex^2$

14. $y = x\sqrt{x^2 + 9}$

15. $y = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{e^x}$

16. $y = \sqrt{\frac{e^{x^2} - 1}{1 + x}}$

17. $y = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$

18. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

19. $y = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}$

20. $y = (x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 10x + 20)^3$

21. $y = x^3e^{-2x}$

22. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

23. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

24. $y = \frac{4x - 5}{6x^2 + 2x}$

25. $y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^3 - x}}$

(26-30) Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada una de las siguientes funciones en el punto que se indica.

26. $f(x) = e^{-x}$, en $x = 0$

27. $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{1 + 2x}}$, en $x = 4$

28. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, en $x = 1$

29. $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$, en $x = 0$

30. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{1 + x}}$, en $x = 3$

(31-34) Determine $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ para cada una de las siguientes funciones.

31. $y = e^{x^2}$

32. $y = (x^2 - 1)^3(x + 1)^2$

33. $y = \sqrt[3]{x^2 + 9}$

34. $y = \ln(\ln(x^2))$

(35-36) *(Ingreso marginal)* Calcule el ingreso marginal para cada una de las siguientes relaciones de demanda. a y b son constantes positivas.

35. $p = a - b \ln x$

36. $x = a - b \ln p$

(37-38) *(Costo marginal)* Calcule el costo marginal y el costo promedio marginal de las siguientes funciones de costo.

37. $C(x) = 50 + 0.2x + x \ln(x)$

38. $C(x) = 40 + 25x + 0.01x^2$

39. *(Precio marginal)* La ecuación de demanda de cierto artículo es $p = 250/(x^2 + 1)$. Calcule el precio marginal a un nivel de demanda de 3 unidades.

40. *(Precio marginal)* Si x unidades pueden venderse a un precio de $\$p$ cada una, en donde $\dfrac{x}{20} + \ln\left(\dfrac{p}{10} + 1\right) = 2$, $(0 \leq x \leq 40)$, calcule el precio marginal.

41. *(Demanda marginal)* Con la relación de demanda del problema anterior, calcule la demanda marginal a un nivel de precio de $p = 2$. Interprete su resultado.

42. *(Demanda marginal)* La demanda de cierto artículo está dada por la relación $2p^2 + x^2 = 3000$, en donde x unidades pueden venderse a un precio de $\$p$ cada una. Determine la demanda marginal a un nivel de precio de 20 dólares. Interprete su resultado.

43. *(Productividad física marginal)* La productividad física de cierta empresa está dada por $p = 500(3x + 2)^2 - 2000$, donde x es el número de máquinas en funcionamiento. Determine la productividad física marginal cuando están en funcionamiento 8 máquinas. Interprete el resultado.

44. *(Objeto en movimiento)* La distancia d recorrida por un objeto en movimiento, en el instante t, está dada por $d = (2t + 1)(t + 1)^{3/2}$. Determine la velocidad instantánea en el instante t.

45. *(Objeto en movimiento)* La distancia h recorrida por un objeto en movimiento, en el instante t, está dada por $h = 49t - 4.9t^2$

    a) Determine la velocidad instantánea en el instante t.

    b) Determine la aceleración del objeto en el instante t.

    c) ¿Para qué valores de t la velocidad del objeto es igual a cero.

46. *(Crecimiento de una población)* Si la población de cierta especie de zorros en un bosque se puede modelar mediante la función

$$P(t) = \frac{50,0000}{100 + 4900e^{-0.075t}}$$

donde t se mide en semestres. Determine la razón de cambio de la población con respecto al tiempo.

47. *(Crecimiento de una población)* Con respecto al problema anterior. Determine la razón de cambio al inicio del año 24 y al inicio del año 36; ¿al inicio de cuál de estos dos años, la población crece con mayor rapidez?

48. *(Epidemia)* Durante una epidemia el número de individuos afectados en el instante t, en semanas, está dado por $I(t) = 200t^6e^{-t} + 20$. Determine el valor de t para el cual $I'(t) = 0$. ¿Cuál es el número de individuos infectados para ese valor de t? Aproxime su respuesta al entero más cercano.

49. *(Epidemia)* Con respecto al problema anterior, responda las siguientes preguntas:

    a) Al inicio, $t = 0$, ¿cuántos individuos estaban enfermos?

    b) Determine la razón de cambio instantánea del número de individuos enfermos.

    c) ¿Cuál es la razón de cambio en la semana 5?

    d) ¿Cuál es la razón de cambio en la semana 7?

CASO DE ESTUDIO

PROPENSIÓN MARGINAL AL AHORRO

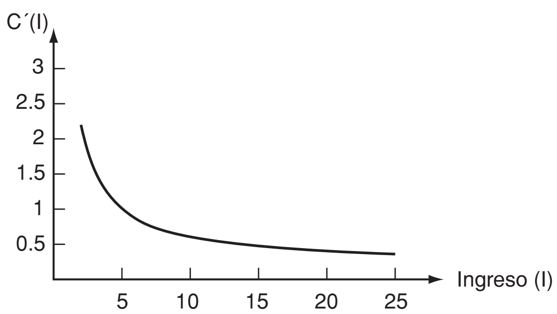
Al inicio del capítulo, para una población se analizaba la función de consumo cuya expresión está dada por

$$C(I) = 2.4 + 0.2I + 4\ln(0.25I), \text{ para } I \geq 2$$

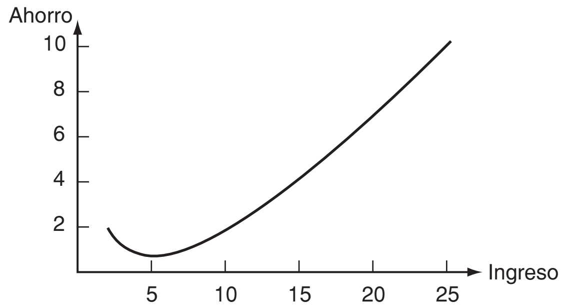
Si se observa la primera gráfica, del inicio de capítulo, el consumo aumenta conforme el ingreso aumenta. Esto se puede fundamentar si se considera la derivada $\dfrac{dC(I)}{dI}$, que proporciona el cambio del consumo con respecto del ingreso. De acuerdo con las fórmulas desarrolladas en este capítulo se tiene

$$\frac{dC(I)}{dI} = 0.2 + \frac{4}{I}, \text{ para } I \geq 2$$

Para $I \geq 2$ la derivada anterior es positiva, por lo que la función $C(I)$ es creciente, así que la pregunta ***a***), ¿qué tan rápido aumenta el consumo con respecto al aumento del ingreso?, tiene como respuesta la siguiente: el consumo aumenta de acuerdo con la función $0.2 + \dfrac{4}{I}$. A continuación se reproduce la gráfica.



Como puede observarse en la figura, el aumento en el consumo es cada vez menor conforme el ingreso aumenta. El ahorro, que está dado mediante la expresión $S = I - C$, tiene como gráfica:



De acuerdo con la gráfica, se tiene que el ahorro decrece conforme el ingreso aumenta y luego empieza a crecer nuevamente a partir de un ingreso de 5 mil millones. Esto se confirma si se analiza la función de ahorro $S(I)$

$$S(I) = I - C(I)$$
$$= I - [2.4 + 0.2I + 4\ln(0.25I)]$$

Así que,

$$\frac{dS(I)}{dI} = 0.8 - \frac{4}{I}$$

y

$$\frac{dS(I)}{dI} = 0, \text{ para } I = 5$$

Como $S'(I) < 0$ para $2 \leq I < 5$ y $S'(I) > 0$ para $5 \leq I$, se concluye que la función de ahorro es decreciente en el intervalo (2, 5) y creciente en el intervalo $(5, \infty)$, con lo que se responde la segunda pregunta. Finalmente, si el ingreso es de 25 mil millones, entonces, de acuerdo con la sección 11.5,

Propensión marginal al consumo:

$$\frac{dC}{dI} = 0.2 + \frac{4}{I}, \text{ para } I = 25$$

$$\frac{dC}{dI} = 0.2 + \frac{4}{25}$$

así que, la propensión marginal al consumo es igual a 0.36, mientras que la propensión marginal al ahorro es igual a $1 - 0.36 = 0.64$.

Reproduzca el análisis anterior si la función de consumo está dada por

$$0.02I^2 + 4e^{1-4/I} - 1.5, \text{ para } I \in [2, 25]$$

Compare los resultados obtenidos en ambos casos y comente sus observaciones con sus compañeros.

CAPÍTULO 13

Optimización y bosquejo de curvas

Optimización del costo de producción

Como se ha comentado en capítulos anteriores, el costo de producción de prácticamente cualquier artículo, se obtiene como resultado del valor de dos funciones. Por un lado está la función de *costos fijos*, que no depende de la cantidad de artículos que se producen; entre estos costos fijos están la renta del local, el costo de maquinaria y herramientas, etcétera. Mientras que por otro lado están, los llamados *costos variables*, que comprenden el costo de: mano de obra, materias primas, energía, etcétera. Este costo variable depende del número, x, de unidades producidas, en consecuencia, el costo total está dado por la función

$$C(x) = F + V(x)$$

donde F es el costo fijo, mientras que $V(x)$ es la función de costos variables. Ahora bien, para que la producción sea rentable, además de tener ganancias se busca reducir los costos lo más posible, es decir, se busca tener los costos totales mínimos. Intuitivamente, la función de costos variables es una función con valores positivos cuando se producen x unidades, entonces el costo mínimo sería no producir, a menos que se tengan restricciones adicionales, como por ejemplo tener que producir una cantidad mínima de unidades o alguna otra. En realidad, en muchos casos lo que se trata de minimizar es el *costo unitario* que es el costo por unidad producida, éste se obtiene mediante

$$U(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Ahora, suponga que Raúl García Espino es el administrador de una empresa que se dedica a la fabricación de muebles de cómputo, cada mes debe fabricar 50 muebles y al mes puede producir a lo más 450 muebles. Por otro lado, con base en estudios realizados, él determina que la función de costos variables, en este rango de valores de producción, está dada por

$$V(x) = 3x^3 - 15x^2 + 20x \text{ miles de dólares,}$$

cuando se producen *x cientos* de muebles y $V(x)$. Por otro lado, los costos fijos mensuales son de \$20,000. Determine

a) El costo mínimo total
b) El costo mínimo total unitario

Después de estudiar los temas de este capítulo, responda lo anterior y compare sus respuestas con las que se proporcionan al final del capítulo.

TEMARIO

■ 13-1 LA PRIMERA DERIVADA Y LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN

En esta sección, consideraremos el significado de la primera derivada de una función en relación con su gráfica.

DEFINICIÓN Se dice que una función $y = f(x)$ es una **función creciente** sobre un intervalo de valores de x si y crece al incrementarse la x. Esto es, si x_1 y x_2 son dos valores cualesquiera en el intervalo dado con $x_2 > x_1$, entonces $f(x_2) > f(x_1)$.

Una función $y = f(x)$ se dice que es una **función decreciente** sobre un intervalo de su dominio si y decrece al incrementarse la x. Es decir, si $x_2 > x_1$ son dos valores de x en el intervalo dado, entonces $f(x_2) < f(x_1)$.

Las partes *a*) y *b*) de la figura 1 ilustran una función creciente y otra decreciente, respectivamente. La gráfica sube o baja, respectivamente, al movernos de izquierda a derecha.

TEOREMA 1

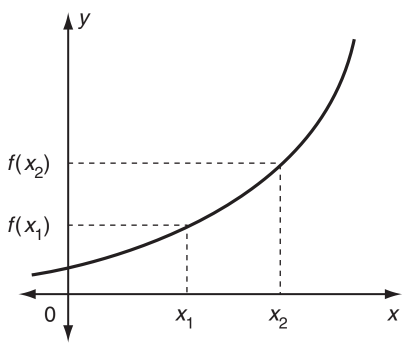
a) Si $f(x)$ es una función creciente que es diferenciable, entonces $f'(x) \geq 0$

b) Si $f(x)$ es una función decreciente que es diferenciable, entonces $f'(x) \leq 0$

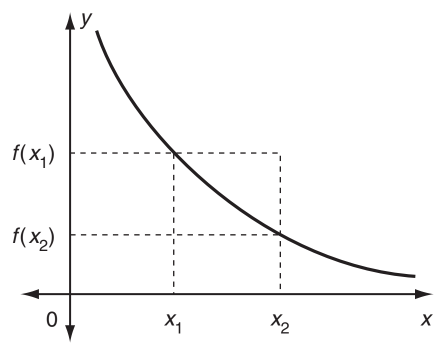
DEMOSTRACIÓN *a*) Sean x y $x + \Delta x$ dos valores de la variable independiente, con $y = f(x)$ y $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ los valores correspondientes de la variable dependiente. Se sigue que

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Debemos considerar dos casos, según que $\Delta x > 0$ o $\Delta x < 0$. Están ilustrados en las figuras 2 y 3.



a) $x_2 > x_1$; $f(x_2) > f(x_1)$



b) $x_2 > x_1$; $f(x_2) < f(x_1)$

FIGURA 1

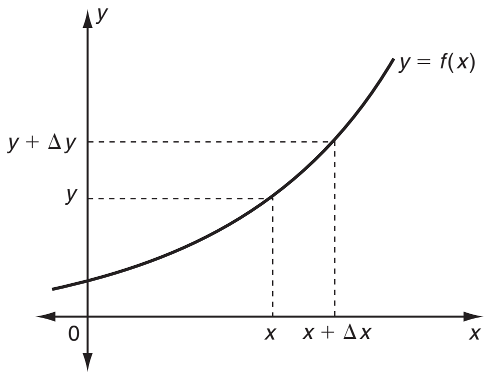


FIGURA 2

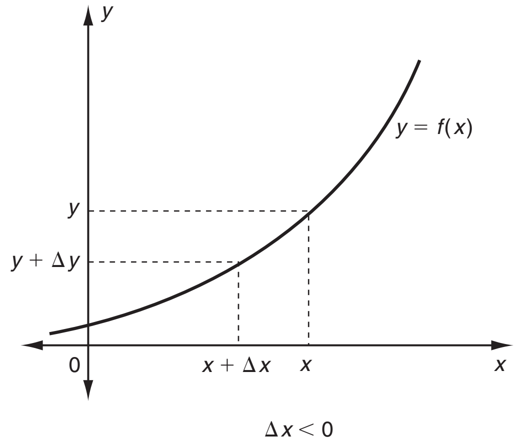


FIGURA 3

Si $\Delta x > 0$, entonces $x + \Delta x > x$. Por consiguiente, dado que $f(x)$ es una función creciente, $f(x + \Delta x) > f(x)$, y así que $\Delta y > 0$. En consecuencia, tanto Δx como Δy son positivos, de modo que $\Delta y/\Delta x > 0$.

La segunda posibilidad es que $\Delta x < 0$. Entonces, $x + \Delta x < x$ y así $f(x + \Delta x) < f(x)$. De aquí $\Delta y < 0$. En este caso, tanto Δx como Δy son negativos, de modo que otra vez $\Delta y/\Delta x > 0$.

Así que en ambos casos, $\Delta y/\Delta x$ es positiva. La derivada $f'(x)$ es el límite de $\Delta y/\Delta x$ cuando $\Delta x \to 0$, y dado que $\Delta y/\Delta x$ siempre es positiva, es claro que es imposible aproximarse a un número negativo como valor límite. En consecuencia, $f'(x) \geq 0$, como se establece en el teorema.

La demostración de la parte *b*), cuando $f(x)$ es una función decreciente, es muy similar y se deja como ejercicio.

Este teorema tiene una proposición recíproca, que puede establecerse de la siguiente manera.

TEOREMA 2

a) Si $f'(x) > 0$ para toda x en algún intervalo, entonces f es una función creciente de x sobre tal intervalo.

b) Si $f'(x) < 0$ para toda x en algún intervalo, entonces f es una función decreciente de x sobre tal intervalo.

Observación Observe que en el teorema 2, las desigualdades son estrictas.

La demostración de este teorema no se dará. Sin embargo, es un resultado intuitivamente evidente. En la parte *a*), por ejemplo, el hecho de que $f'(x) > 0$ significa, geométricamente, que la tangente a la gráfica en cualquier punto tiene pendiente positiva. Si la gráfica de $f(x)$ siempre está inclinada hacia arriba al movernos a la derecha, entonces es claro que y debe crecer a medida que x aumenta. En forma análoga, en la parte *b*), si $f'(x) < 0$, entonces la gráfica está inclinada hacia abajo y y decrece cuando x aumenta.

Estos teoremas se usan para determinar los intervalos en que una función crece o decrece (esto es, cuando la gráfica sube o baja).

EJEMPLO 1 Encuentre los valores de x en los cuales la función

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

crece o decrece.

☛ **1.** Por medio del examen del signo de f' decida para qué valores de x las funciones siguientes son crecientes o decrecientes
a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = x^2 + 4x$
c) $f(x) = x^3$

Solución Dado que $f(x) = x^2 - 2x + 1$, tenemos que $f'(x) = 2x - 2$. Ahora $f'(x) > 0$ implica que $2x - 2 > 0$, esto es, $x > 1$. En consecuencia, $f(x)$ es creciente en todos los valores de x dentro del intervalo definido por $x > 1$. De manera similar, $f'(x) < 0$ implica que $2x - 2 < 0$, esto es, $x < 1$. La función decrece si $x < 1$.

La gráfica de $y = f(x)$ aparece en la figura 4. (Observe que $f(1) = 0$, de modo que el punto (1, 0) está sobre la gráfica). Si $x < 1$, la gráfica está inclinada hacia abajo, y para $x > 1$, está inclinada hacia arriba. ☛ **1**

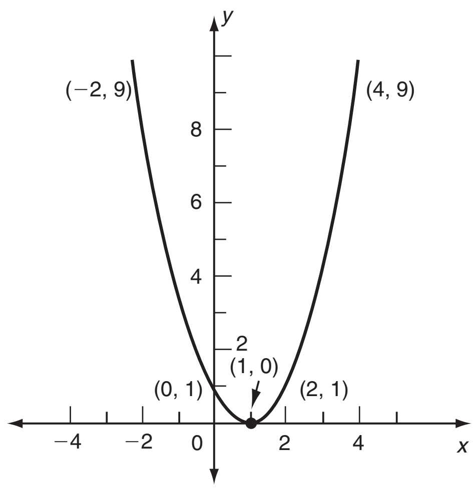


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Determine los valores de x en los cuales la función

$$f(x) = x^3 - 3x$$

crece o decrece.

Solución Tenemos que $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$. Con el objetivo de determinar el intervalo en que $f(x)$ crece, hacemos $f'(x) > 0$, esto es,

$$3(x - 1)(x + 1) > 0$$

Este tipo de desigualdad cuadrática se estudió en la sección 3-3. El procedimiento consiste en examinar los signos de los factores $(x - 1)$ y $(x + 1)$. Éstos se ilustran en la figura 5. El factor $(x - 1)$ es positivo si $x > 1$ y negativo en el caso de que $x < 1$. Mientras que $(x + 1)$ es positivo si $x > -1$ y negativo para $x < -1$.

Estos dos números dividen la recta real en tres intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$. En cada uno de estos intervalos, $f'(x)$ tiene signo constante y sólo cambia de signo en $x = \pm 1$, en donde es cero. Así que sólo seleccionamos un punto de prueba en cada intervalo y calculamos el signo de $f'(x)$ en cada punto de prueba. Los resultados se dan en la tabla 1.

Respuesta *a*) Creciente para $x > 0$, decreciente para $x < 0$ *b*) creciente para $x > -2$, decreciente para $x < -2$ *c*) creciente para $x < 0$ y para $x > 0$

TABLA 1

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Punto de prueba	-2	0	2
$f'(x) = 3x^2 - 3$	$3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$	$3(0)^2 - 3 = -3 < 0$	$3(2)^2 - 3 = 9 > 0$
f	Creciente	Decreciente	Creciente

☛ **2.** ¿Para qué valores de x las siguientes funciones son crecientes o decrecientes?
a) $f(x) = x^3 - 3x^2$
b) $f(x) = x^{-1} + x$
c) $f(x) = 2 \ln x - x^2$

Vemos que $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -1)$ y en $(1, \infty)$, así que f es una función creciente de x en cada uno de esos intervalos. En $(-1, 1)$, $f'(x) < 0$, así f es una función decreciente en ese intervalo. La gráfica de f se muestra en la figura 5. ☛ **2**

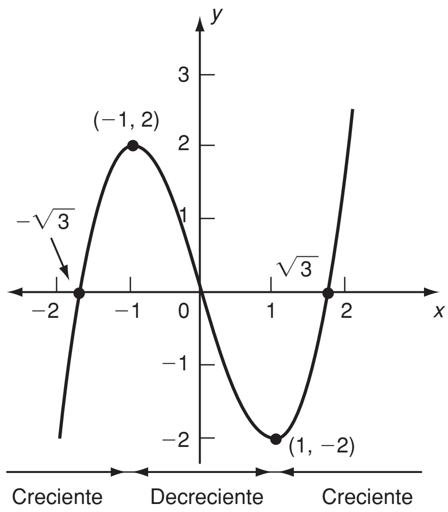


FIGURA 5

EJEMPLO 3 ***(Análisis de las funciones de costo, ingreso y utilidad)*** En el caso de la función de costo $C(x) = 500 + 20x$ y la relación de demanda $p = 100 - x$, determine las regiones en que la función de costo, la función de ingreso y la función de utilidad son funciones crecientes o decrecientes de x.

Solución Puesto que $C(x) = 500 + 20x$, $C'(x) = 20$ siempre es positiva. De ahí que la función de costo sea una función creciente de x para todos los valores de x. La función de ingreso es

$$R(x) = xp = x(100 - x) = 100x - x^2$$

Así pues, el ingreso marginal es

$$R'(x) = 100 - 2x$$

De modo que $R'(x) > 0$ si $100 - 2x > 0$, esto es, cuando $x < 50$. En el caso de que $x > 50$, $R'(x) < 0$. Así que la función de ingreso es una función creciente de x si $x < 50$ y es una función decreciente de x para $x > 50$.

La función de utilidad es

$$P(x) = R(x) - C(x) = 100x - x^2 - (500 + 20x) = 80x - x^2 - 500$$

Respuesta *a*) Creciente para $x < 0$ y $x > 2$, decreciente para $0 < x < 2$
b) creciente para $x < -1$ y $x > 1$, decreciente para $-1 < x < 0$ y $0 < x < 1$
c) creciente para $0 < x < 1$ y decreciente para $x > 1$
(El dominio sólo es $x > 0$).

☛ **3.** Vuelva a resolver el ejemplo 3, si la ecuación de demanda se cambia a $p = 120 - 2x$

Por consiguiente, $P'(x) = 80 - 2x$ y $P'(x) > 0$ cuando $80 - 2x > 0$ o $x < 40$; en forma alternativa, $P'(x) < 0$ si $x > 40$. De modo que la función de utilidad es una función creciente de x si $x < 40$, y es una función decreciente de x para $x > 40$. Las gráficas de las tres funciones aparecen en la figura 7. ☛ **3**

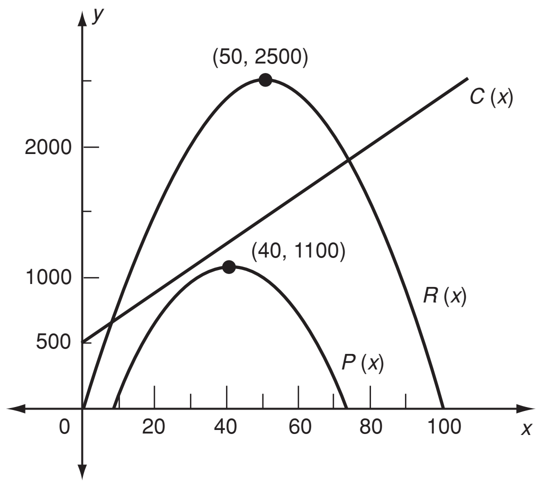


FIGURA 6

El tipo de comportamiento que estas tres funciones presentan es bastante típico de las funciones generales de costo, ingreso y utilidad. La función de costo por lo regular es una función creciente de la cantidad de bienes producidos (casi siempre cuesta más producir más, si bien ocurren excepciones con ciertas políticas de precios en el caso de materias primas). De manera similar, la función de ingreso es, en general, una función creciente para pequeños volúmenes de ventas pero, por lo regular, se transforma en una función decreciente cuando consideramos grandes volúmenes de ventas. La función de utilidad tiene este mismo comportamiento de crecimiento para x pequeña y decrece en el caso de que x sea grande.

Respuesta R crece para $0 < x < 30$, decrece para $x > 30$. P crece para $0 < x < 25$, decrece para $x > 25$

EJERCICIOS 13-1

(1-24) Determine los valores de x en los cuales las funciones siguientes son: *a*) crecientes; *b*) decrecientes.

1. $y = x^2 - 6x + 7$

2. $y = x^3 - 12x + 10$

3. $f(x) = x^3 - 3x + 4$

4. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 20$

5. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

6. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

7. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

8. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

9. $y = x + \ln x$

10. $y = x - e^x$

11. $y = x \ln x$

12. $y = xe^{-x}$

13. $y = x^5 - 5x^4 + 1$

14. $y = x^7 - 7x^6$

15. $y = x^2 - 4x + 5$

16. $y = x^3 - 3x + 2$

17. $y = 5x^6 - 6x^5 + 1$

18. $y = x^4 - 2x^2$

19. $y = x^{2/3}$

20. $y = x^{1/5}$

21. $y = \ln x$

22. $y = e^{-2x}$

23. $y = \dfrac{2}{x}$

24. $y = \dfrac{-1}{x}$

(25-28) *(Análisis de funciones de costo, ingreso y utilidad)* Para las siguientes funciones de costo y relaciones de demanda, determine las regiones en que *a*) la función de costo, *b*) la función de ingreso y *c*) la función de utilidad son crecientes o decrecientes.

25. $C(x) = 2000 + 10x$; $p = 100 - \frac{1}{2}x$

26. $C(x) = 4000 + x^2$; $p = 300 - 2x$

27. $C(x) = C_0 + kx$; $p = a - bx$ (a, b, k y C_0 son constantes positivas).

28. $C(x) = \sqrt{100 + x^2}$; $p = a - (b/x)\sqrt{100 + x^2}$. (Suponga que $b > a > 0$).

29. *(Análisis del costo marginal)* El costo de producir x miles de unidades de cierto producto está dado por $C(x) = 2500 + 9x - 3x^2 + 2x^3$. ¿En qué nivel de producción el costo marginal es

a) creciente? *b*) decreciente?

30. Repita el ejercicio 29 si $C(x) = 2000 + 15x - 6x^2 + x^3$

31. *(Análisis del ingreso marginal)* Dada la relación de demanda $p = 600 - x^2$, donde x unidades pueden venderse a un precio de p cada una. Encuentre cuándo el ingreso marginal sea:

a) creciente. *b*) decreciente.

32. Repita el ejercicio 31 para la relación de demanda $P = 50e^{-x/20}$

33. *(Costo marginal y promedio)* Para la función de costo $C(x) = 6 + 2x(x + 4)/(x + 1)$, pruebe que los costos marginal y promedio siempre son decrecientes para $x > 0$.

34. *(Ingreso marginal)* Para la relación de demanda $p = 50 - \ln(x + 1)$, pruebe que el ingreso marginal siempre es decreciente para $x > 0$.

35. *(Costo promedio creciente)* Demuestre que la función de costo promedio $\bar{C}(x)$ es una función creciente cuando el costo marginal excede al costo promedio.

36. *(Felicidad material)* Sea $H(x)$ la cantidad de felicidad que un individuo obtiene por poseer x unidades de algún bien. Un modelo usado a veces para esta cantidad es $H(x) = A \ln(1 + x) - Bx$, donde A y B son constantes positivas con $A > B$. Calcule $H(0)$. Pruebe que $H(x)$ es una función creciente para valores pequeños de x pero eventualmente se convierte en una función decreciente. Encuentre el valor de x en el cual $H(x)$ sea máxima.

■ 13-2 MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Muchas de las aplicaciones importantes de derivadas incluyen encontrar los valores máximo y mínimo de una función particular. Por ejemplo, la utilidad que obtiene un fabricante depende del precio que cobra por el producto y el fabricante está interesado en conocer el precio que hace que su ganancia sea máxima. El precio **óptimo** (o **mejor** precio) se obtiene por medio de un proceso llamado **maximización** u **optimización** de la función de utilidad. De una manera similar, una compañía de bienes raíces puede estar interesada en generar el ingreso máximo por renta; una compañía ferroviaria puede necesitar conocer la velocidad promedio a la cual los trenes deben viajar para minimizar el costo por milla de operación; o un economista puede desear conocer el nivel de impuestos en un país que promoverá la tasa máxima de crecimiento de la economía. Sin embargo, antes de ver las aplicaciones tales como éstas, analizaremos la teoría de máximos y mínimos.

DEFINICIONES *a*) Se dice que una función $f(x)$ tiene un **máximo local** en $x = c$ si $f(c) > f(x)$ para toda x suficientemente cerca de c.

Así los puntos P y Q en las gráficas en la figura 7 corresponden a máximos locales de las funciones correspondientes.

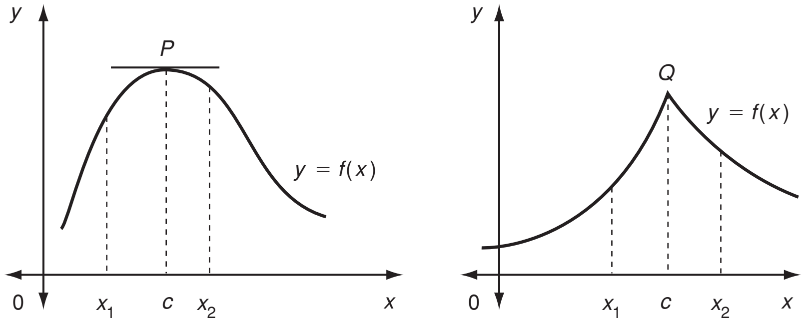


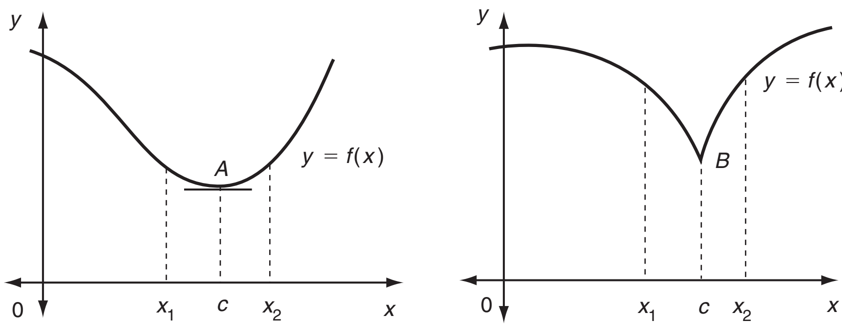
FIGURA 7

b) Se dice que una función $f(x)$ tiene un **mínimo local** en $x = c$ si $f(c) < f(x)$ para toda x suficientemente cerca de c.

Los puntos A y B en las gráficas de la figura 8 corresponden a mínimos locales.

c) El término **extremo** se utiliza para denotar a un máximo local o bien a un mínimo local.

Una función puede tener más de un máximo local y más de un mínimo local, como se muestra en la figura 9. Los puntos A, C y E en la gráfica corresponden a



a) *b*)

FIGURA 8

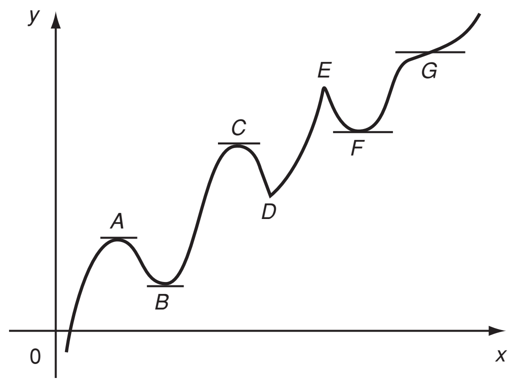
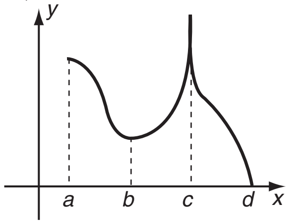


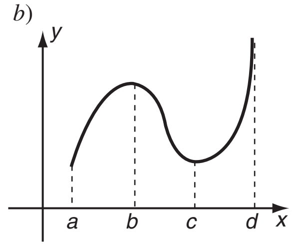
FIGURA 9

☛ **4.** Proporcione los valores de x en los que las gráficas siguientes tienen máximos o mínimos locales.

a)



b)



Respuesta *a*) Máximo local en a y c, mínimo local en b; *b*) mínimo local en a, máximo local en b.

☛ **5.** ¿Cuáles son los puntos críticos de la función f si
a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = |x - 1|$?

Respuesta *a*) $x = 0$ *b*) $x = 1$

puntos en donde la función tiene máximos locales, y los puntos B, D y F corresponden a puntos en donde la función tiene mínimos locales. ☛ **4.**

Un *valor máximo o mínimo* (locales) de una función es la ordenada (coordenada y) del punto en el que la gráfica tiene un máximo o mínimo local. *Un valor mínimo local de una función puede ser mayor que un valor máximo local*. Esto puede verse fácilmente de la gráfica anterior, en donde la ordenada en F es mayor que la ordenada en A.

DEFINICIÓN El valor $x = c$ se denomina **punto crítico** para una función continua f si $f(c)$ está bien definida y si o $f'(c) = 0$ o $f'(x)$ no existe en $x = c$.

En el caso cuando $f'(c) = 0$, la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ es horizontal en $x = c$. Esta posibilidad se ilustra en la parte *a*) de la figura 10. El segundo caso, cuando $f'(c)$ no existe, ocurre cuando la gráfica tiene una esquina en $x = c$ (véase la parte *b*) de la figura 10) o cuando la tangente a la gráfica se vuelve vertical en $x = c$ (de modo que $f'(x)$ se hace infinitamente grande cuando $x \to c$). (Véase la parte *c*) de la figura 10). ☛ **5**

Enfatizamos el hecho de que para que c sea punto crítico, $f(c)$ debe estar bien definida. Por ejemplo, considere $f(x) = x^{-1}$, cuya derivada es $f'(x) = -x^{-2}$.

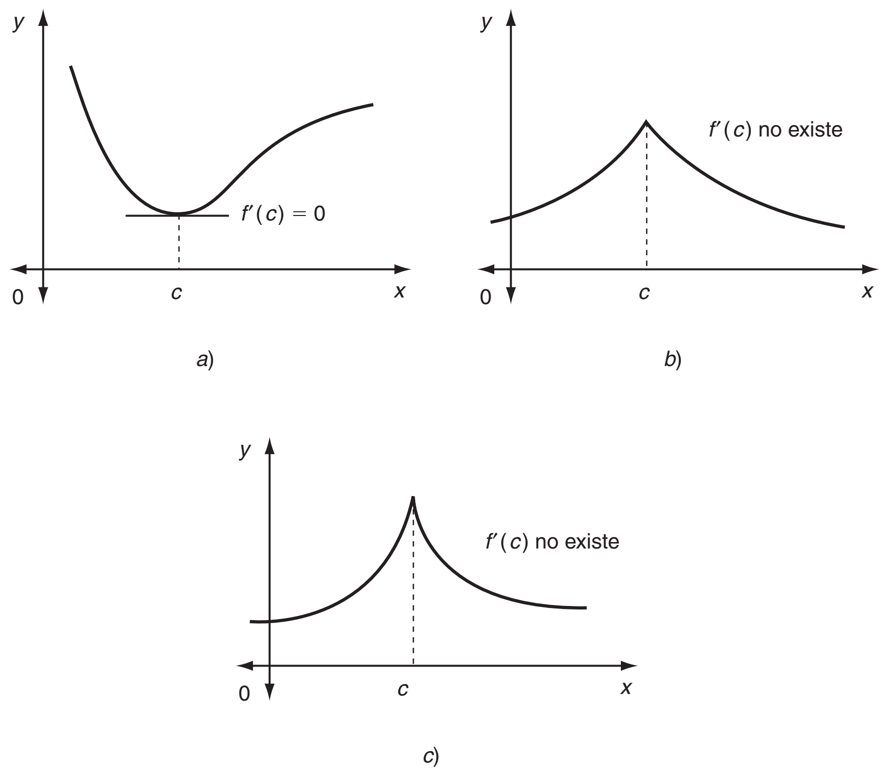


FIGURA 10

Claramente, $f'(x)$ no está acotada cuando $x \to 0$. Sin embargo, $x = 0$ no es un punto crítico para esta función ya que $f(0)$ no existe.

Es claro de las gráficas de la figura 10 que los extremos locales de una función ocurren sólo en puntos críticos. Pero no todo punto crítico de una función corresponde a un mínimo local o a un máximo local. El punto P en la parte *a*) de la figura 11, en donde la tangente es horizontal, es un punto crítico pero no es punto máximo local ni punto mínimo local. Los puntos Q y R en las partes *b*) y *c*) son puntos críticos en los que $f'(c)$ no existe, pero no son extremos de $f(x)$.

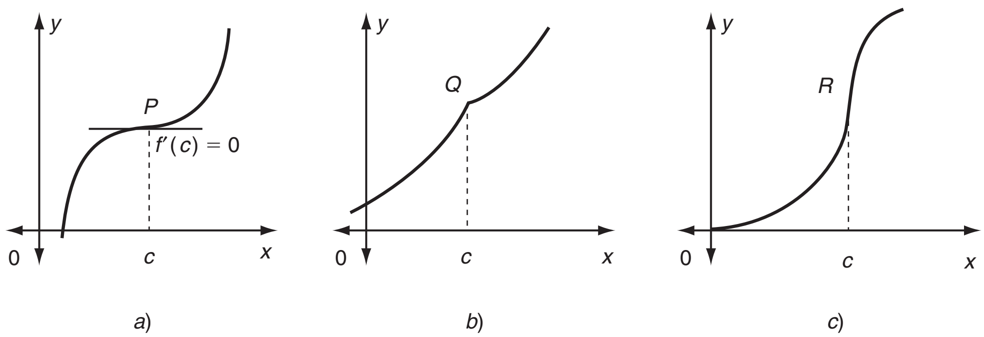


FIGURA 11

Dentro de poco, desarrollaremos ciertas pruebas que nos permitirán distinguir aquellos puntos críticos que son extremos locales de aquellos que no lo son. Primero examinaremos los puntos críticos por medio de algunos ejemplos.

EJEMPLO 1 Determine los puntos críticos de la función

$$f(x) = x^3(2x^3 - 3x)$$

Solución Tenemos $f(x) = 2x^6 - 3x^4$. Diferenciando, obtenemos

$$f'(x) = 12x^5 - 12x^3 = 12x^3(x^2 - 1)$$

Es claro que $f'(x)$ existe para toda x, de modo que los únicos puntos críticos son aquellos en los que $f'(x)$ se hace cero:

$$f'(x) = 12x^3(x^2 - 1) = 0$$

así que

$$x^3 = 0 \qquad \text{o bien} \qquad x^2 - 1 = 0$$

De modo que los puntos críticos son $x = 0, \pm 1$

EJEMPLO 2 Determine los puntos críticos de la función

$$f(x) = x^4(x - 1)^{4/5}$$

Solución Diferenciando, por medio de la regla del producto,

$$f(x) = 4x^3(x - 1)^{4/5} + x^4(\tfrac{4}{5})(x - 1)^{-1/5}$$

$$= \tfrac{4}{5} x^3(x-1)^{-1/5} [5(x-1) + x]$$
$$= \tfrac{4}{5} x^3(x-1)^{-1/5} (6x-5)$$

Ahora $f'(x) = 0$ cuando $x^3 = 0$ o $6x - 5 = 0$, así tenemos puntos críticos en $x = 0$ y $x = \frac{5}{6}$. Sin embargo, observe que $f'(x)$ se hace infinitamente grande cuando $x \to 1$ como consecuencia de la potencia negativa. Como $f(1)$ está bien definida (de hecho $f(1) = 0$), $x = 1$ debe ser un punto crítico del tipo en el que $f'(x)$ no existe.

EJEMPLO 3 Determine los puntos críticos de la función

$$f(x) = x^3 e^{-x^2}$$

Solución Utilizamos la regla del producto.

$$f(x) = 3x^2e^{-x^2} + x^3(-2xe^{-x^2})$$
$$= x^2 e^{-x^2}(3 - 2x^2)$$

☛ **6.** ¿Cuáles son los puntos críticos de la función f, si
a) $f(x) = x^3 + 3x^2$
b) $f(x) = x^4 - 8x^2$
c) $f(x) = x(x-4)^{1/3}$?

Respuesta *a*) $x = 0, -2$
b) $x = 0, 2, -2$ *c*) $x = 3, 4$

El factor e^{-x^2} nunca es cero. Por tanto, $f'(x) = 0$ cuando $x^2 = 0$ o cuando $3 - 2x^2 = 0$; esto es, cuando $x = 0$ o cuando $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. De modo que la función dada tiene tres puntos críticos: $x = 0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ ☛ **6**

Prueba de la primera derivada

No todos los puntos críticos son extremos locales; varios ejemplos de puntos críticos que no son extremos locales se ilustraron en la figura 11. El siguiente teorema proporciona la primera de las dos pruebas que pueden utilizarse para decidir si un punto crítico dado es un máximo local o mínimo local, o ninguno de éstos.

TEOREMA 1 (PRUEBA DE LA PRIMERA DERIVADA) Sea $x = c$ un punto crítico de la función f. Entonces:

a) Si $f'(x) > 0$ para x justo antes de c y $f'(x) < 0$ justo después de c, entonces c es un máximo local de f. (Véase la parte *a*) de la figura 12. Los símbolos $(+)$, $(-)$ o (0) junto a cada parte de la gráfica indica el signo de f').

b) Si $f'(x) < 0$ para x justo antes de c y $f'(x) > 0$ justo después de c, entonces c es un mínimo local de f. (Véase la parte *b*) de la figura 12).

c) Si $f'(x)$ tiene el mismo signo para x justo antes de c y para x justo después de c, entonces c no es un extremo local de f. (Véase la parte *c*) de la figura 12).

☛ **7.** Las siguientes funciones tienen un punto crítico en $x = 0$. Aplique la prueba de la primera derivada para determinar la naturaleza de este punto.
a) $f(x) = x^3$
b) $f(x) = x^4$
c) $f(x) = x^{1/3}$
d) $f(x) = x^{4/3}$

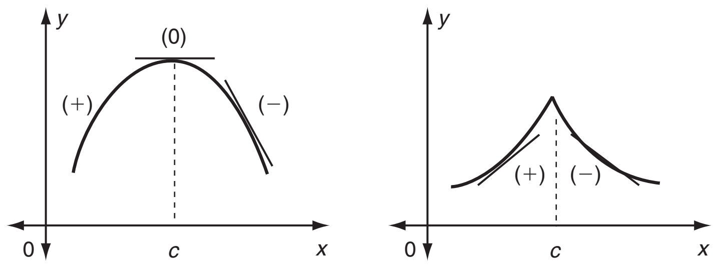
Respuesta *a*) No es un extremo local
b) mínimo local
c) no es un extremo local
d) mínimo local

Observación En la parte *a*) del teorema, f cambia de creciente a decreciente cuando x se mueve a la derecha pasando por c. En la parte *b*), f cambia de decreciente a creciente cuando pasa por c. En la parte *c*), f es creciente en ambos lados de c o decreciente en ambos lados. ☛ **7**

EJEMPLO 4 Determine los extremos locales de f, en donde $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7$

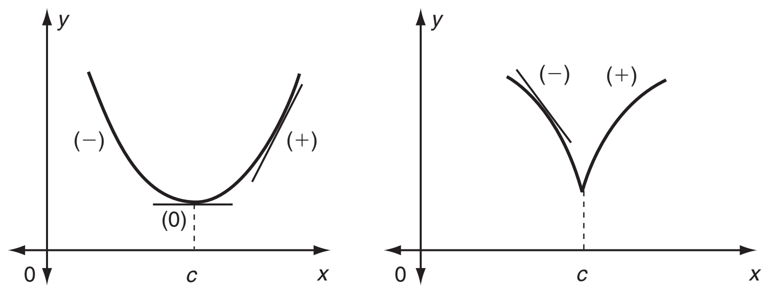
Solución En este caso,

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$$



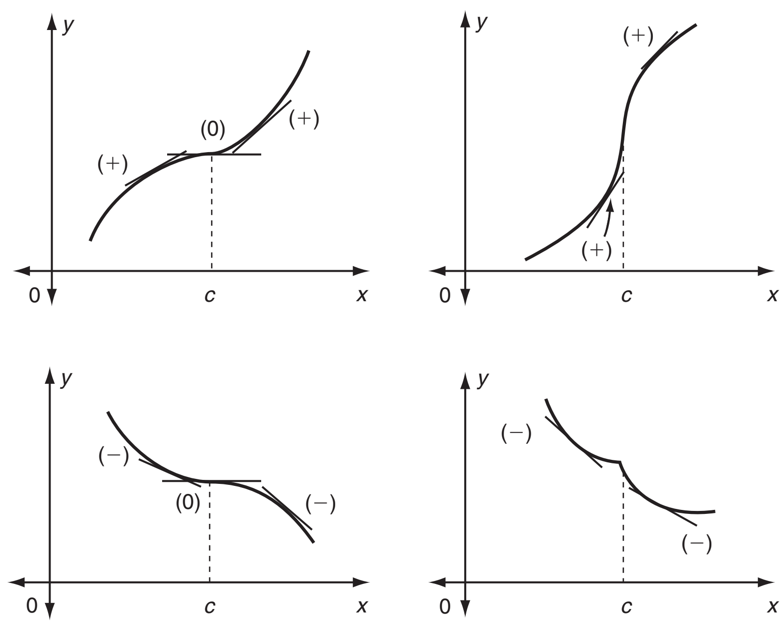
Máximo local en $x = c$

a)



Mínimo local en $x = c$

b)



$x = c$ no es un extremo local

c)

FIGURA 12

f' existe para toda x, así los puntos críticos están dados por $f'(x) = 0$. Esto es, $4x^2(x - 3) = 0$, o $x = 0$ y $x = 3$. Estos puntos críticos dividen la recta real en los tres intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$ y $(3, \infty)$. Como de costumbre, determinamos el signo de f' en cada intervalo eligiendo un punto de prueba. Los resultados están en la tabla 2.

TABLA 2

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
Punto de prueba	-1	1	4
$f'(x) = 4x^2(x - 3)$	$4(-1)^2(-1 - 3)$ $= -16 < 0$	$4(1)^2(1 - 3)$ $= -8 < 0$	$4(4)^2(4 - 3)$ $= 64 > 0$
f	Decreciente	Decreciente	Creciente

En $x = 0$, f' es negativa en ambos lados, de modo que $x = 0$ no es un extremo local. Para $x = 3$, f' es negativa a la izquierda (f es decreciente) y positiva a la derecha (f es creciente). Por tanto, por la parte *b*) del teorema 1, $x = 3$ es un mínimo local de f.

EJEMPLO 5 Determine los máximos y mínimos locales de la función $f(x) = x^{2/3}(x - 5)$.

Solución Primero encontramos los puntos críticos. Con base en la regla del producto tenemos

$$f(x) = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}(x - 5) + x^{2/3} \cdot 1 = \tfrac{5}{3}x^{-1/3}(x - 2)$$

$f' = 0$ cuando $x = 2$ y f' está indefinida cuando $x = 0$. Así existen dos puntos críticos; a saber, $x = 0$ y $x = 2$. Estos puntos dividen la recta real en los tres intervalos, $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, \infty)$. Seleccionando un punto de prueba, como de costumbre, en cada uno de estos intervalos, obtenemos los resultados que se muestran en la tabla 3.

TABLA 3

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Punto de prueba	-1	1	8
$f(x) = \frac{5}{3}x^{-1/3}(x - 2)$	$\frac{5}{3}(-1)^{-1/3}(-3) = 5 > 0$	$\frac{5}{3}(1)^{-1/3}(-1) = -\frac{5}{3} < 0$	$\frac{5}{3}(8)^{-1/3}(6) = 5 > 0$
f	Creciente	Decreciente	Creciente

Así, justo antes de $x = 0$, f' es positiva, mientras que justo después de $x = 0$ es negativa. Por tanto, por la parte *a*) del teorema 1, $x = 0$ es un máximo local de f. Justo antes de $x = 2$, f' es negativa, mientras que justo después de $x = 2$ es positiva. Por tanto, por la parte *b*) del teorema 1, $x = 2$ es un mínimo local de f.

EJEMPLO 6 Determine los máximos y mínimos locales de la función $f(x) = x^4/(x - 1)$.

Solución Primero encontramos los puntos críticos. De la regla del cociente tenemos

$$f(x) = \frac{(x - 1) \cdot 4x^3 - x^4 \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^3(3x - 4)}{(x - 1)^2}$$

Para un punto crítico, $f'(x) = 0$; por lo que $x = 0$ o $\frac{4}{3}$. (Observe que $x = 1$ no es un punto crítico ya que $f(1)$ no está definida).

En este caso, debemos tener un poco de cuidado ya que el dominio de la función no es toda la recta real. Debemos considerar los cuatro intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \frac{4}{3})$ y $(\frac{4}{3}, \infty)$, puesto que $x = 1$ no pertenece al dominio. Seleccionando un punto de prueba como es usual en cada uno de estos intervalos, obtenemos el resultado que se muestra en la tabla 4.

TABLA 4

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \frac{4}{3})$	$(\frac{4}{3}, \infty)$
Punto de prueba	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{6}$	2
$f'(x)$	$\frac{(-1)^3(-7)}{(-2)^2} > 0$	$\frac{(\frac{1}{2})^3(-\frac{5}{2})}{(-\frac{1}{2})^2} < 0$	$\frac{(\frac{7}{6})^3(-\frac{3}{6})}{(\frac{1}{6})^2} < 0$	$\frac{(2)^3(2)}{(1)^2} > 0$
f	Creciente	Decreciente	Decreciente	Creciente

Así, justo antes de $x = 0$, f' es positiva, mientras que poco después de $x = 0$ es negativa. Por tanto, por la parte *a*) del teorema 1, $x = 0$ es un máximo local de f. Justo antes de $x = \frac{4}{3}$, f' es negativa mientras que justo después de $x = \frac{4}{3}$ es positiva. Por tanto, por la parte *b*) del teorema 1, $x = \frac{4}{3}$ es un mínimo local de f.

Es muy importante en este tipo de ejemplo utilizar diferentes puntos de prueba para examinar f' después de 0 y antes de $\frac{4}{3}$ ya que el intervalo completo entre estos dos puntos críticos no está en el dominio de la función. ☛ **8**

☛ **8.** Determine los extremos locales de
a) $f(x) = 12x - x^3$
b) $f(x) = 2x^4 - x^2$
c) $f(x) = x^{2/3}(x - 10)$

Respuesta *a*) Mínimo local en –2, máximo local en $x = 2$
b) mínimos locales en $x = \pm\frac{1}{2}$, máximo local en $x = 0$
c) máximo local en $x = 0$, mínimo local en $x = 4$

Resumen para la determinación de extremos locales por medio de la prueba de la primera derivada

Paso 1. Encuentre $f'(x)$ y determine los puntos críticos, esto es, los puntos en donde $f'(x)$ es cero o no existe.

Paso 2. Los puntos críticos dividen al dominio de f en varios intervalos. En cada intervalo seleccione un punto de prueba y calcule $f'(x)$ en ese punto. Si el valor es positivo, entonces f es una función creciente en todo el intervalo correspondiente. Si el valor de $f'(x)$ en el punto de prueba es negativo, entonces f es decreciente en el intervalo entero.

Paso 3. Si f' es positiva a la izquierda y negativa a la derecha de un punto crítico, entonces ese punto es un máximo local. Si f' es negativa a la izquierda y positiva a la derecha de un punto crítico, entonces ese punto es un mínimo local. Si f' tiene el mismo signo en ambos lados de un punto crítico, entonces ese punto no es un extremo local.

EJERCICIOS 13-2

(1-20) Determine los puntos críticos para las siguientes funciones.

1. $x^2 - 3x + 7$

2. $3x + 5$

3. $2x^3 - 6x$

4. $2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$

5. $x^4 - 2x^2$

6. $x^4 - 4x^3 + 5$

7. $x^2(x - 1)^3$

8. $(x - 1)^2(x - 2)^3$

9. $\dfrac{3x + 1}{3x}$

10. $x^2 + x^{-2}$

11. $\dfrac{x^2}{x-1}$

12. $x^{2/3} - x^{1/3}$

13. $x^{4/5} - 2x^{2/5}$

14. $x(x-1)^{1/3}$

15. $\dfrac{(x-1)^{1/5}}{x+1}$

16. xe^{-3x}

17. $x^3 \ln x$

18. $\dfrac{\ln x}{x}$

19. $2 + |x-3|$

20. $|x^2 - 3x + 2|$

(21-36) Determine los valores de x en los máximos y mínimos locales de las siguientes funciones.

21. $f(x) = x^2 - 12x + 10$

22. $f(x) = 1 + 2x - x^2$

23. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$

24. $f(x) = x^3 - 3x + 4$

25. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6$

26. $y = 4x^3 + 9x^2 - 12x + 5$

27. $y = x^3 - 18x^2 + 96x$

28. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$

29. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 10$

30. $y = x^4 - 4x^3 + 3$

31. $f(x) = x^3(x-1)^2$

32. $f(x) = x^4(x+2)^2$

33. $f(x) = x^{4/3}$

34. $f(x) = x^{1/3}$

35. $f(x) = x \ln x$

36. $f(x) = xe^{-x}$

(37-52) Determine los valores máximo y mínimo locales de las siguientes funciones.

37. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 15$

38. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 3ax^2 \ (a > 0)$

39. $f(x) = xe^x$

40. $f(x) = xe^{-2x}$

41. $f(x) = x^3(x-1)^{2/3}$

42. $f(x) = x^4(x-1)^{4/5}$

43. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

44. $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

45. $f(x) = |x-1|$

46. $f(x) = 2 - |x|$

47. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$

48. $f(x) = |6 + x - x^2|$

49. $f(x) = e^{|x|}$

50. $f(x) = e^{x-|x|}$

51. $f(x) = (x-2)^{4/3}$

52. $f(x) = (x+1)^{7/5} + 3$

53. Demuestre que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$ no tiene máximo ni mínimo locales en $x = 1$.

54. Demuestre que $f(x) = x + 1/x$ tiene un valor máximo local y un valor mínimo local, pero que el valor máximo es menor que el valor mínimo.

■ 13-3 LA SEGUNDA DERIVADA Y LA CONCAVIDAD

En las secciones anteriores vimos que el signo de la primera derivada tiene un significado geométrico, que es de gran utilidad cuando necesitamos obtener una idea cualitativa de la gráfica de una función. Se abordará ahora la segunda derivada, la cual, como veremos, también tiene una importante interpretación geométrica.

Considere una función $f(x)$ cuya gráfica tiene la forma general que se aprecia en la figura 13. La pendiente de la gráfica es positiva, $f'(x) > 0$, de modo que f es una función creciente. Más aún, la gráfica tiene la propiedad de que al movernos hacia la derecha (esto es, cuando x crece), la pendiente de la gráfica se hace más pronunciada. Es decir, la derivada $f'(x)$ también es una función creciente de x. La gráfica de $f'(x)$ debe tener la forma indicada cualitativamente en la figura 14.

Ahora, por el teorema 2 de la sección 13-1, f' es una función creciente de x, si su derivada es positiva, esto es, si $f''(x) > 0$. Así, si $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$, enton-

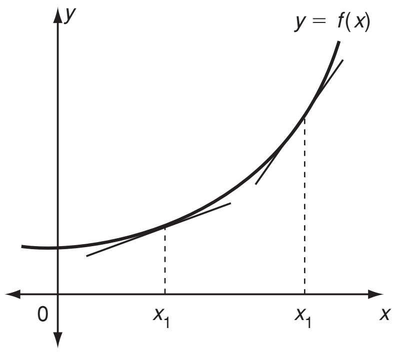


FIGURA 13

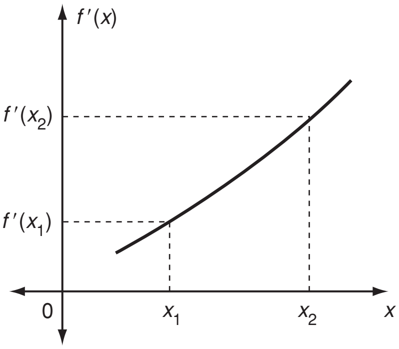


FIGURA 14

ces la gráfica de f debe tener la forma general que se muestra en la figura 13. Tiene que ascender hacia la derecha y la pendiente se hace cada vez más pronunciada conforme aumenta x.

Analicemos ahora una función f cuya gráfica tiene la forma que se observa en la figura 15. La pendiente de la gráfica es negativa, $f'(x) < 0$, por lo que f es una función decreciente. Además, la gráfica que se muestra tiene la propiedad de que cuando nos movemos hacia la derecha la pendiente se hace menos pronunciada. Esto es, conforme x aumenta, la derivada f' aumenta a partir de valores negativos grandes hacia cero, como se indica en la figura 16.

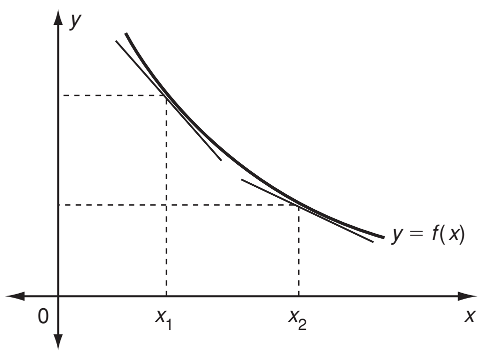


FIGURA 15

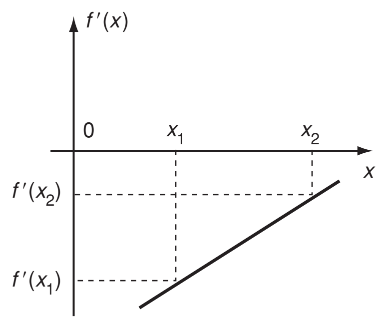


FIGURA 16

Nuevamente, f', aunque negativa, es una función creciente de x y esto garantiza si $f''(x) > 0$. Así pues, si $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$, entonces la gráfica de f debe tener la forma general que se muestra en la figura 15. Debe inclinarse hacia abajo a la derecha y la pendiente se hace menos pronunciada conforme x aumenta.

La propiedad geométrica que caracteriza ambos tipos de gráficas es que son **cóncavas hacia arriba**.* Concluimos, por tanto, que si $f''(x) > 0$ en algún intervalo, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en ese intervalo.

---

*Una curva es *cóncava hacia arriba* si dados dos puntos sobre la curva el segmento rectilíneo que los une queda por completo por encima de la curva. Una curva es cóncava hacia abajo si tal segmento rectilíneo siempre queda por debajo de la curva.

Ahora consideremos la posibilidad alternativa, esto es, que la gráfica de $f(x)$ sea **cóncava hacia abajo**. Los casos que corresponden a los dos tipos ya considerados se observan en la figura 17. La parte *a*) ilustra el caso en que $f'(x) > 0$ pero la pendiente se hace menos pronunciada a medida que x aumenta. La parte *b*) ejemplifica el caso en donde $f'(x) < 0$ y la pendiente se hace cada vez más pronunciada (más negativa) cuando x aumenta.

En cada caso, $f'(x)$ es una función decreciente de x. Por el teorema 2 de la sección 13-1, f' es decreciente si $f''(x) < 0$ y ésta es, por lo tanto, una condición suficiente para que la gráfica de f sea cóncava hacia abajo. ☛ **9**

☛ **9.** Determine los intervalos en donde $f''(x)$ es positiva y aquellos en donde es negativa en los siguientes casos:
a) $f(x) = x^3$
b) $f(x) = x^4$
c) $f(x) = x^3 + 3x^2$

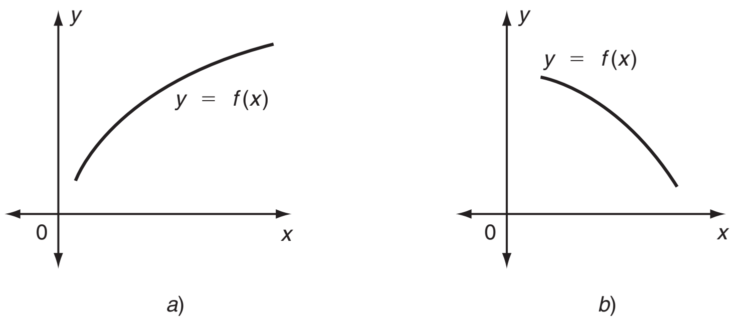


FIGURA 17

EJEMPLO 1 Encuentre los valores de x en los cuales la gráfica de

$$y = \tfrac{1}{6}x^4 - x^3 + 2x^2$$

es cóncava hacia abajo o cóncava hacia arriba.

Solución

$$y = \tfrac{1}{6}x^4 - x^3 + 2x^2$$
$$y' = \tfrac{4}{6}x^3 - 3x^2 + 4x$$
$$y'' = 2x^2 - 6x + 4 = 2(x^2 - 3x + 2) = 2(x - 1)(x - 2)$$

Debemos determinar los puntos en donde $y'' > 0$ (cóncava hacia arriba) y $y'' < 0$ (cóncava hacia abajo). Primero, haciendo $y'' = 0$, obtenemos $2(x - 1)(x - 2) = 0$ obteniendo $x = 1$ y $x = 2$. Estos puntos dividen la recta numérica en tres intervalos $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, \infty)$. En cada uno de estos intervalos y'' tiene signo constante, así que elegimos un punto de prueba conveniente y calculamos el signo de y'' en ese punto. Esto determina el signo de y'' en todo el intervalo. Los resultados están en la tabla 5.

TABLA 5

Intervalo	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
Punto de prueba	0	$\frac{3}{2}$	3
$y'' = 2(x - 1)(x - 2)$	$2(-1)(-2) > 0$	$2(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) < 0$	$2(2)(1) > 0$
Concavidad	Hacia arriba	Hacia abajo	Hacia arriba

Respuesta *a*) $f''(x)$ es positiva para $x > 0$, negativa para $x < 0$
b) positiva para toda $x \neq 0$
c) Positiva para $x > -1$, negativa para $x < -1$

☛ **10.** Determine los intervalos en donde las siguientes funciones son cóncavas hacia arriba y en donde son cóncavas hacia abajo.

a) $f(x) = 24x^2 - x^4$

b) $f(x) = e^{-2x^2}$

Así que la función dada es cóncava hacia arriba si $x < 1$ o $x > 2$ y cóncava hacia abajo en el caso de que $1 < x < 2$. Estas propiedades se observan en la gráfica de la figura 18.

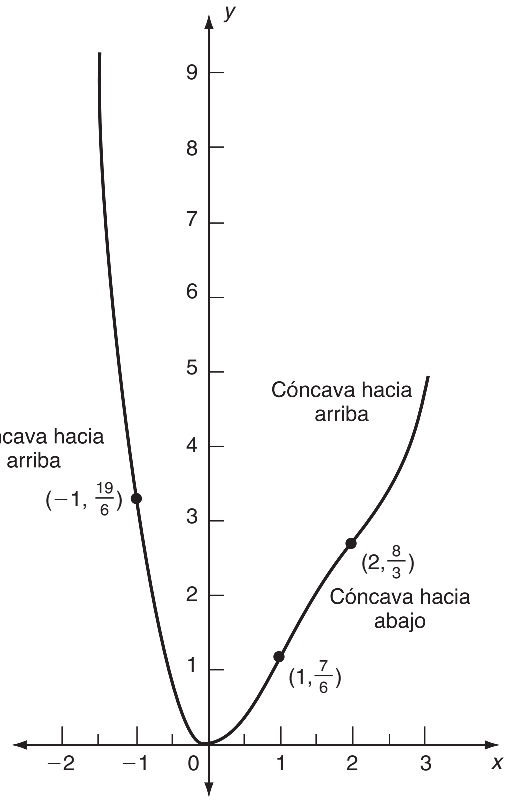


FIGURA 18

EJEMPLO 2 Examine la concavidad de la función de costo

$$C(x) = 2000 + 10x - 0.03x^2 + 10^{-4}x^3$$

Solución

$$C'(x) = 10 - 0.06x + (3 \times 10^{-4})x^2$$

$$C''(x) = -0.06 + (6 \times 10^{-4})x = (6 \times 10^{-4})(x - 100)$$

Observemos que si $x < 100$, $C''(x)$ es negativa, lo cual significa que la gráfica de la función de costo es cóncava hacia abajo. Cuando $x > 100$, $C''(x) > 0$ y la gráfica es en consecuencia cóncava hacia arriba. La gráfica de $C(x)$ tiene la forma que se advierte en la figura 19. ☛ **10**

Respuesta *a*) Cóncava hacia arriba para $-2 < x < 2$, cóncava hacia abajo para $x < -2$ o $x > 2$
b) cóncava hacia arriba para $x < -\frac{1}{2}$ o $x > \frac{1}{2}$, cóncava hacia abajo para $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

La función de costo del ejemplo 2 tiene una forma cualitativa que es bastante típica en tales funciones. Para valores pequeños de x, la función de costo por lo regular es cóncava hacia abajo. Esta propiedad se debe al hecho de que el incremen-

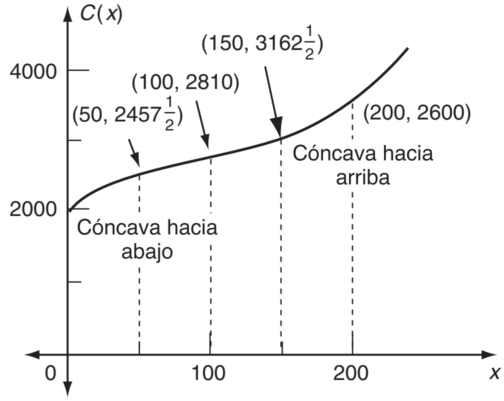


FIGURA 19

to de la producción introduce economías de escalas, de modo que el costo marginal $C'(x)$ decrece. Sin embargo, después de cierto nivel de producción se hace cada vez más costoso incrementar la producción porque, por ejemplo, debe adquirirse nueva maquinaria y pagar tiempo extra a los trabajadores. En esta etapa, el costo marginal empieza a incrementarse y la función de costo se hace cóncava hacia arriba.

Observe que la gráfica de $C(x)$ siempre se inclina hacia arriba al movernos a la derecha ($C'(x) > 0$).

EJEMPLO 3 Encuentre los valores de x para los cuales la función

$$f(x) = xe^{2x}$$

crece o decrece y es cóncava hacia arriba o es cóncava hacia abajo.

Solución

$$f(x) = xe^{2x}$$

$$f'(x) = (2x + 1)e^{2x}$$

$$f''(x) = 4(x + 1)e^{2x}$$

Puesto que e^{2x} siempre es positivo, el signo de $f'(x)$ es el mismo que el de $(2x + 1)$. Así que, $f(x)$ crece si $2x + 1 > 0$, esto es, cuando $x > -\frac{1}{2}$, y $f(x)$ decrece si $2x + 1 < 0$, esto es, cuando $x < -\frac{1}{2}$.

De manera similar, el signo de $f''(x)$ es el mismo que el de $(x + 1)$. Por lo que $f(x)$ es cóncava hacia arriba si $x > -1$ y cóncava hacia abajo si $x < -1$.

DEFINICIÓN Un **punto de inflexión** de una curva es un punto en donde la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa.

Si $x = x_1$ es un punto de inflexión de la gráfica de $y = f(x)$, entonces, a un lado de x_1 la gráfica es cóncava hacia arriba, esto es, $f''(x) > 0$; y del otro lado de x_1, la gráfica es cóncava hacia abajo, es decir, $f''(x) < 0$. Así que al pasar de un lado al otro de $x = x_1$, $f''(x)$ cambia de signo. En $x = x_1$ mismo, es necesario que $f''(x_1) = 0$ o que $f''(x_1)$ no exista ($f''(x)$ podría tender a infinito cuando $x \to x_1$).

En el ejemplo 1, la gráfica de $y = \frac{1}{6}x^4 - x^3 + 2x^2$ tiene puntos de inflexión en $x = 1$ y $x = 2$. Por ejemplo, si $x < 1$, la gráfica es cóncava hacia arriba; mientras que cuando x es poco mayor a 1, la gráfica es cóncava hacia abajo. De modo que $x = 1$ es un punto en donde la concavidad cambia, es decir, un punto de inflexión. Esto también se aplica a $x = 2$.

En el ejemplo 1 los puntos de inflexión están dados por $y'' = 0$. El ejemplo 4 ilustra la posibilidad alternativa.

EJEMPLO 4 Determine los puntos de inflexión de $y = x^{1/3}$

Solución Tenemos que

$$y' = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

$$y'' = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-5/3} = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$$

☛ **11.** Para las funciones siguientes, ¿$x = 0$ es un punto de inflexión?

a) $f(x) = x^5$
b) $f(x) = x^6$
c) $f(x) = x^{1/5}$
d) $f(x) = x^{4/3}$

Ahora, si $x > 0$, $x^{5/3}$ es positiva, de modo que $y'' < 0$. Cuando $x < 0$, $x^{5/3}$ es negativa, por lo que $y'' > 0$. Así pues, la gráfica es cóncava hacia arriba si $x < 0$ y cóncava hacia abajo para $x > 0$. El valor $x = 0$, en el cual y también es cero, es por tanto un punto de inflexión. (Véase la figura 20). En este caso, y'' se hace indefinidamente grande cuando $x \to 0$, de modo que tenemos un punto de inflexión en el cual la segunda derivada no existe. (Obsérvese también que cuando $x \to 0$, y' tiende a infinito, por lo que la pendiente de la gráfica tiende a ser vertical en el origen para esta función particular). ☛ **11**

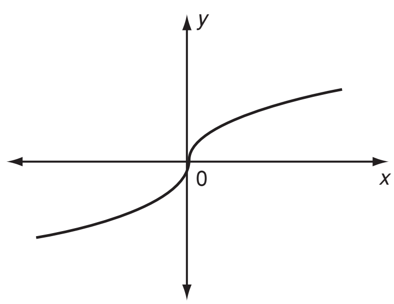


FIGURA 20

Respuesta *a*) Sí
b) no
c) sí
d) no

Observe que la tangente a la gráfica en un punto de inflexión siempre corta a ésta en tal punto. Se trata de una propiedad poco común de una tangente (por regla, la gráfica está situada por completo a un lado de la línea tangente cerca del punto de tangencia).

Prueba de la segunda derivada

En la sección 13-2, introdujimos la prueba de la primera derivada para distinguir entre aquellos puntos críticos que son máximos o mínimos locales, o ninguno de éstos. La segunda derivada proporciona una prueba alterna que puede utilizarse en ciertos casos. Cuando puede usarse, con frecuencia esta prueba es mucho más sencilla que la prueba de la primera derivada.

Considere el caso cuando aparece un extremo local en un punto crítico dado por $f'(x) = 0$, esto es, cuando la recta tangente es horizontal en el punto de la gráfica de f que corresponde al extremo. Entonces, si el punto es un máximo local, la gráfica es cóncava hacia abajo, y si el punto es un mínimo local, la gráfica es cóncava hacia arriba. Pero sabemos que siempre que $f''(x) < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo, y siempre que $f''(x) > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba. Esto conduce al siguiente teorema.

TEOREMA 1 (PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA) Sea $f(x)$ dos veces diferenciable en el punto crítico $x = c$. Entonces,

a) $x = c$ es un máximo local de f siempre que $f'(c) = 0$ y $f''(x) < 0$

b) $x = c$ es un mínimo local de f siempre que $f'(c) = 0$ y $f''(x) > 0$

EJEMPLO 5 Determine los valores máximo y mínimo locales de

$$x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

Solución Sea $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$$

Para determinar los puntos críticos, hacemos $f'(x) = 0$:

$$3x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$(3x - 2)(x + 2) = 0$$

Esto da $x = \frac{2}{3}$ o -2. Así,

$$f''(x) = 6x + 4$$

En $x = \frac{2}{3}$,

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 6\left(\frac{2}{3}\right) + 4 = 8 > 0$$

Por tanto, como $f''(x)$ es positiva cuando $x = \frac{2}{3}$, $f(x)$ tiene un mínimo local cuando $x = \frac{2}{3}$. El valor mínimo local está dado por

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{3}\right) - 8 = -\frac{256}{27}$$

Cuando $x = -2$, $f''(-2) = 6(-2) + 4 = -8 < 0$. Por tanto, como $f''(x)$ es negativa cuando $x = -2$, $f(x)$ tiene un máximo local cuando $x = -2$. El valor máximo local está dado por

$$f(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 4(-2) - 8 = 0$$

Así el único valor máximo local de $f(x)$ es 0, y ocurre cuando $x = -2$, el único valor mínimo local es $-\frac{256}{27}$, y aparece cuando $x = \frac{2}{3}$

EJEMPLO 6 Determine los máximos y mínimos locales para $f(x) = (\ln x)/x$.

Solución Utilizando la regla del cociente, tenemos

$$f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Para un punto crítico, $f'(x) = 0$, o bien,

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$$

Esto es, $1 - \ln x = 0$. Por lo que, $\ln x = 1 = \ln e$ y así $x = e$.

En este caso, sólo tenemos un punto crítico, $x = e$. (Observe que $f'(x)$ se hace infinito cuando $x \to 0$. Sin embargo, $x = 0$ no es un punto crítico ya que $f(0)$ no está definida).

Otra vez, utilizamos la regla del cociente:

$$f''(x) = \frac{x^2(1 - \ln x)' - (1 - \ln x) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{x^2(-1/x) - (1 - \ln x)(2x)}{x^4} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

Cuando $x = e$,

$$f''(e) = \frac{2 \ln e - 3}{e^3} = \frac{2 - 3}{e^3} = -\frac{1}{e^3} < 0$$

en donde hemos utilizado el hecho de que $\ln e = 1$. De aquí que $f(x)$ tiene un máximo local cuando $x = e$. En este caso, no existen mínimos locales. ☛ **12**

☛ **12.** Utilice la prueba de la segunda derivada para determinar los extremos locales:
a) $f(x) = 1 - 2x^2 + x^4$
b) $f(x) = x \ln x$
c) $f(x) = x^2 - 6x^{4/3}$

La prueba de la segunda derivada puede utilizarse para todos los extremos locales en los que $f'(c) = 0$ y $f''(c)$ sea distinta de cero. Cuando $f''(x) = 0$ en un punto crítico $x = c$, o cuando $f''(c)$ no exista, entonces, no se puede utilizar la prueba de la segunda derivada para asegurar si $x = c$ es un máximo o mínimo local. En tales casos, debemos utilizar la prueba de la primera derivada. La prueba de la primera derivada también debe utilizarse para todos los puntos críticos en donde $f'(c)$ no exista.

El siguiente ejemplo ilustra varios casos sencillos en donde la prueba de la segunda derivada no funciona.

Respuesta *a*) Mínimos locales en ±1, máximo local en 0
b) mínimo local en $x = e^{-1}$
c) mínimos locales en $x = \pm 8$ la prueba de la segunda derivada falla para $x = 0$

EJEMPLO 7

a) Considere $f(x) = x^3$. Entonces, $f'(x) = 3x^2$ y $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$. El único punto crítico es $x = 0$. Ahora, $f''(x) = 6x$, de modo que $f''(0) = 0$ y la prueba falla. (En efecto, $f'(x) > 0$ para toda $x \neq 0$, así que la función es creciente para toda $x \neq 0$, y $x = 0$ no es un extremo local).

b) Considere $f(x) = x^{6/5}$. Entonces $f'(x) = \frac{6}{5}x^{1/5}$ y $f'(x) = 0$ en $x = 0$. Éste es el único punto crítico. Ahora $f''(x) = \frac{6}{25}x^{-4/5}$, de modo que $f''(0)$ no está definida. No funciona la prueba de la segunda derivada. (De hecho, la prueba de la primera derivada, muestra que $x = 0$ es un mínimo local).

c) Considere $f(x) = x^{2/5}$. Entonces $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-3/5}$ y existe un punto crítico en $x = 0$ en el que f' no está definida. La prueba de la segunda derivada no puede aplicarse a este tipo de punto crítico. (En realidad, $x = 0$ es un mínimo local).

d) En el ejemplo 4 de la sección 13-2, $f'(x) = 4x^2(x - 3)$ con puntos críticos en $x = 0$ y $x = 3$. Entonces $f''(x) = 12x^2 - 24x$. Tenemos $f''(0) = 0$ y $f''(3) = 12(3)^2 - 24(3) = 36 > 0$. Así que la prueba de la segunda derivada muestra que $x = 3$ es un mínimo local, pero esta prueba falla en $x = 0$. ☛ **13**

☛ **13.** Para cada una de las siguientes funciones y en el punto $x = 1$, ¿tiene éxito o fracasa la prueba de la segunda derivada?
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
b) $f(x) = (x - 1)^{4/7}$
c) $f(x) = x(x - \frac{4}{3})^{1/3}$
d) $f(x) = x(x - 1)^{1/3}$

Respuesta *a*) Falla
b) falla
c) tiene éxito (mínimo)
d) falla

Resumen de la determinación de extremos locales por medio de la prueba de la segunda derivada:

Paso 1. Encontrar $f'(x)$ y determinar los puntos críticos. Sea $x = c$ un punto crítico en el que $f'(c) = 0$. La prueba de la segunda derivada no puede utilizarse para un punto en donde $f'(x)$ no exista.
Paso 2. Encontrar $f''(x)$ y evaluarla cuando $x = c$.
Paso 3. Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en $x = c$. Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en $x = c$. Si $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no está definida, entonces la prueba falla.

EJERCICIOS 13-3

(1-12) Encuentre los valores de x para los cuales las siguientes funciones son *a*) cóncavas hacia arriba o *b*) cóncavas hacia abajo. También determine los puntos de inflexión, si los hay.

1. $x^2 - 4x + 7$
2. $5 + 3x - x^2$
3. $x^3 - 3x + 4$
4. $x^3 + 3x^2 - 9x + 1$
5. $x^4 - 18x^2 + 5$
6. $x^7 - 7x^6 + 2$
7. $x + \dfrac{1}{x}$
8. $\dfrac{1}{x - 2}$
9. $(x - 5)^{3/4}$
10. xe^{-x}
11. $\dfrac{x}{e^{x/2}}$
12. $x - 2 \ln x$

(13-20) Determine los valores de x para los cuales las siguientes funciones son *a*) crecientes; *b*) decrecientes; *c*) cóncavas hacia arriba; *d*) cóncavas hacia abajo. También, determine los puntos de inflexión, si los hay.

13. $3x^2 - 15x + 2$
14. $x^3 - 6x^2 - 15x + 7$
15. $x^4 - 4x^3$
16. $(x - 1)^{1/5}$
17. $x - \ln x$
18. $\dfrac{x^2}{e^x}$
19. $x^2 - 18 \ln x$
***20.** $|x^2 - 5x - 6|$

(21-24) (*Funciones de costo*) Analice la concavidad de las siguientes funciones de costo.

21. $C(x) = a + bx$
22. $C(x) = \sqrt{100 + x^2}$

23. $C(x) = 1500 + 25x - 0.1x^2 + 0.004x^3$

24. $C(x) = 1000 + 40\sqrt{x} - x + 0.02x^{3/2}$

(25-45) Utilice la prueba de la segunda derivada para determinar los valores máximo y mínimo locales de las siguientes funciones. Si falla la prueba de la segunda derivada, utilice la prueba de la primera derivada.

25. $x^2 - 10x + 3$ **26.** $x^3 - 27x + 5$

27. $2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ **28.** $x^4 - 8x^2 + 15$

29. $x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 3$ **30.** $1 + 3x^2 - x^6$

31. xe^x **32.** x^2/e^{2x}

33. e^{-x^2} **34.** $x^2 \ln x$

35. $x^2 - \ln x$ **36.** $x^5 - 15x^3 + 2$

37. $x \ln x$ **38.** $x \ln x - x$

39. $(x - 1)^3(x - 2)^4$ **40.** $(x + 1)^2(x - 2)^3$

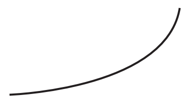
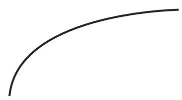
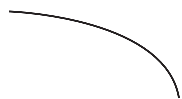
41. $(x - 1)^{4/3}$ ***42.** $x^2(x - 1)^{2/3}$

■ 13-4 BOSQUEJO DE CURVAS POLINOMIALES

A menudo ocurre que nos gustaría obtener un dibujo cualitativo aproximado de cómo la gráfica de una función dada se vería sin necesidad de tabular un gran número de puntos. La primera y segunda derivadas son herramientas efectivas para este fin. En esta sección, estudiaremos su uso aplicado a funciones polinomiales. Las gráficas que aparecen en las figuras 5 y 18 se obtuvieron por los métodos que a continuación se describen. En la sección 13-7 estos métodos se extienden a otros tipos de funciones.

Las propiedades básicas que necesitamos ya se han formulado y se resumen en la tabla 6.

TABLA 6

Signo de $f'(x)$ y $f''(x)$	Propiedades de la gráfica de f	Forma de la gráfica
$f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$	Creciente y cóncava hacia arriba	
$f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$	Creciente y cóncava hacia abajo	
$f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$	Decreciente y cóncava hacia arriba	
$f'(x) < 0$ y $f''(x) < 0$	Decreciente y cóncava hacia abajo	

EJEMPLO 1 Bosqueje la gráfica de la función $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$

Solución En primer término determinamos en dónde la función es creciente o decreciente:

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x - 1)(x - 2)$$

☛ **14.** Determine los intervalos en los que la gráfica de cada una de las siguientes funciones pertenece a cada uno de los cuatro tipos.
a) $f(x) = 2x - x^2$
b) $f(x) = 2x^2 - \frac{2}{3}x^3$

Analizando el signo de y' como en la sección 13-1, encontramos que $y' > 0$ para $x < 1$ y para $x > 2$; mientras que $y' < 0$ para $1 < x < 2$. Así la gráfica es creciente para $x < 1$, decreciente para $1 < x < 2$ y nuevamente creciente para $x > 2$. (Véase la parte *a*) de la figura 21).

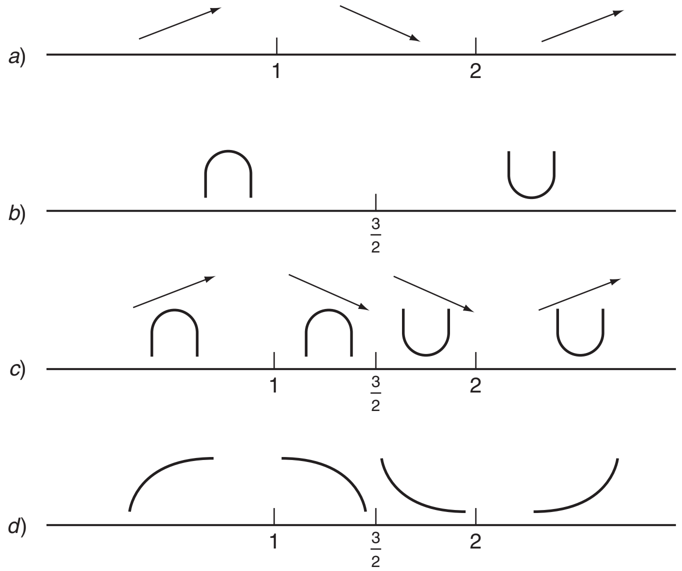


FIGURA 21

Por medio de la prueba de la primera derivada, y tiene un máximo local cuando $x = 1$ y un mínimo local cuando $x = 2$. Con facilidad se encuentra que cuando $x = 1$, $y = 3$ y cuando $x = 2$, $y = 2$. Así las coordenadas de los extremos locales son (1, 3) y (2, 2).

Ahora examinemos la concavidad de la función. Encontramos

$$y'' = 12x - 18 = 12(x - \tfrac{3}{2})$$

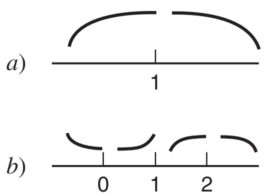
y así $y'' > 0$ cuando $x > \frac{3}{2}$ (cóncava hacia arriba); mientras que $y'' < 0$ cuando $x < \frac{3}{2}$ (cóncava hacia abajo). Esta información se esquematiza en la parte *b*) de la figura 21. Cuando $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{5}{2}$, de modo que el punto $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ es un punto de inflexión en la gráfica.

Combinando la información de las partes *a*) y *b*), podemos resumirla como se advierte en la parte *c*) de la figura 21; esto es, si $x < 1$, y es creciente y cóncava hacia abajo; cuando $1 < x < \frac{3}{2}$, y decrece y es cóncava hacia abajo; etcétera. Esta información se traduce en una forma cualitativa para la gráfica en la parte *d*) de la figura 21.

Por último, calculamos las coordenadas del punto en que la gráfica corta al eje y. Si $x = 0$, $y = -2$, de modo que el punto es $(0, -2)$.

A fin de bosquejar la gráfica, graficamos primero los puntos (1, 3), $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$, (2, 2), en donde $f(x)$ cambia su naturaleza (de creciente a decreciente o de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo) y el punto $(0, -2)$ en que la gráfica corta al eje y. Entonces, usando la información de la figura 21, dibujamos curvas del tipo apropiado que unan estos puntos. Esto da la gráfica como se aprecia en la figura 22. ☛ **14**

Respuesta



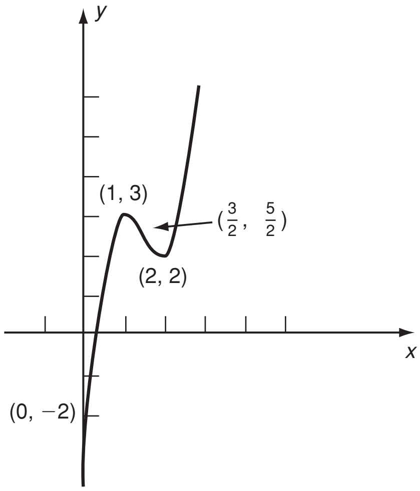


FIGURA 22

Los pasos necesarios en el bosquejo de la gráfica de una función polinomial se resumen en el siguiente procedimiento.

> ***Paso 1: Calcular $f'(x)$*** Determine los intervalos en que $f'(x)$ es positiva o negativa: éstos dan los intervalos en que $f(x)$ crece o decrece, respectivamente. Calcule las coordenadas de los puntos que dividen estos intervalos.
>
> ***Paso 2: Calcular $f''(x)$*** Determine los intervalos en que $f''(x)$ es positiva o negativa: éstos dan los intervalos en que $f(x)$ es cóncava hacia arriba o hacia abajo, respectivamente. Calcule las coordenadas de los puntos que separan estos intervalos.
>
> ***Paso 3: Combinar*** Combine la información de los pasos 1 y 2 como en la figura 21.
>
> ***Paso 4: Encontrar algunos puntos explícitos*** Por ejemplo, la intersección con el eje y se obtiene haciendo $x = 0$, de modo que $y = f(0)$. La intersección con el eje x se obtiene haciendo $y = 0$. Esto da la ecuación $f(x) = 0$ que debe resolverse para los valores de x en los puntos de intersección. Algunas veces esta ecuación resulta ser demasiado complicada de resolver y debemos prescindir de la información que proporciona.

Los métodos que se acaban de dar pueden usarse en lugar de aquellos de la sección 5-2 relativos a funciones cuadráticas.

EJEMPLO 2 Bosqueje la gráfica de $y = 3 + 5x - 2x^2$

Solución

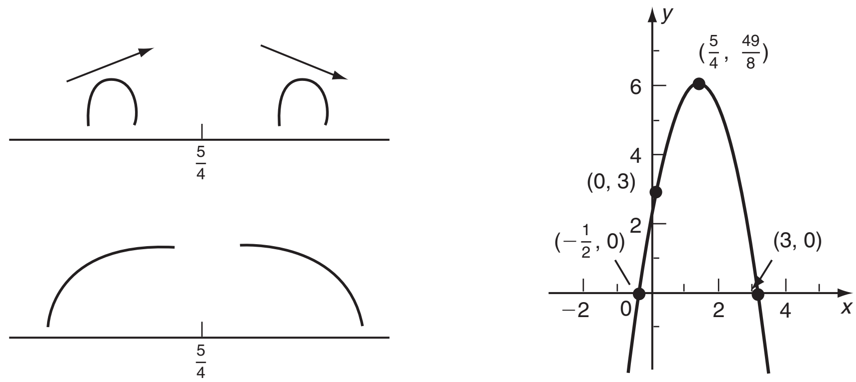
Paso 1 $y' = 5 - 4x$. Así que, $y' > 0$ si $x < \frac{5}{4}$ y $y' < 0$ cuando $x > \frac{5}{4}$. Si $x = \frac{5}{4}$

$$y = 3 + 5(\tfrac{5}{4}) - 2(\tfrac{5}{4})^2 = \tfrac{49}{8}$$

En consecuencia, la gráfica es creciente si $x < \frac{5}{4}$ y decreciente para $x > \frac{5}{4}$, y el punto divisorio de la gráfica es $(\frac{5}{4}, \frac{49}{8})$. Este punto es un máximo local.

Paso 2 $y'' = -4$. Así que la gráfica es cóncava hacia abajo para toda x.

Paso 3 Combinando la información de los pasos 1 y 2, tenemos la figura 23(a).



a) *b*)

FIGURA 23

☛ **15.** Haga un bosquejo de las gráficas de

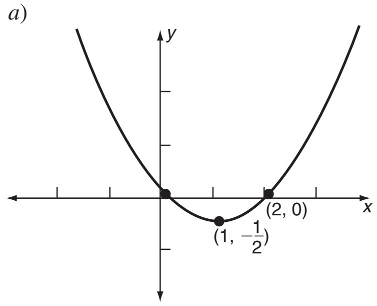
a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$

b) $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^3$

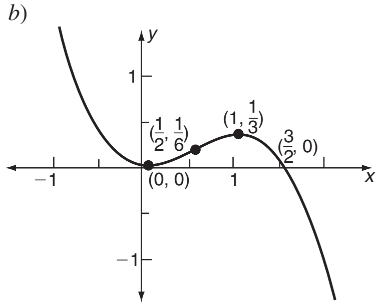
c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x^{4/3}$

Respuesta

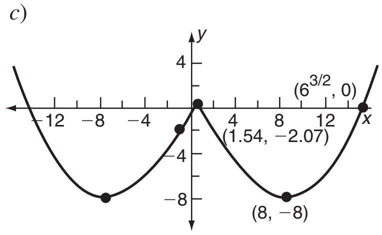
a)



b)



c)



Paso 4 Cuando $x = 0$, $y = 3$ lo que da el punto (0, 3). Si $y = 0$ obtenemos la ecuación $2x^2 - 5x - 3 = 0$. Esta función cuadrática puede factorizarse:

$$(2x + 1)(x - 3) = 0$$

y las raíces son $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 3$. En consecuencia, la gráfica corta el eje x en $(-\frac{1}{2}, 0)$ y $(3, 0)$.

Integrando toda esta información, podemos dibujar un bosquejo razonablemente preciso de la gráfica, como se observa en la figura 23(b). ☛ **15**

EJEMPLO 3 Si el número de artículos producidos por semana es x (medidos en miles), la función de costo de un fabricante es

$$C = 2 + x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3$$

(en miles de dólares). Bosqueje la gráfica de C como una función de x.

Solución Por razones evidentes sólo estamos interesados en la región $x \geq 0$.

Paso 1 $C'(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2$. Antes que nada, hacemos $C'(x) = 0$ con el objetivo de obtener los puntos en que la gráfica tiene tangentes horizontales.

$$1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 8 = 0$$

Por la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

y debido al número negativo que está dentro del radical, x no es un número real. Concluimos que $C'(x)$ nunca es cero. Así, $C'(x)$ o es positiva para toda x o negativa para toda x. Pero $C'(0) = 1 > 0$, por lo que $C'(x) > 0$ para toda x. Por tanto, C es una función creciente para toda x.

Paso 2 $C''(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x = \frac{1}{4}(x - 2)$. Por tanto, cuando $x > 2$, $C''(x) > 0$ y la gráfica es cóncava hacia arriba. Si $x < 2$, $C''(x) < 0$ y la gráfica es cóncava hacia abajo.

Si $x = 2$,

$$C(2) = 2 + 2 - \frac{1}{4}(2)^2 + \frac{1}{24}(2)^3 = \frac{10}{3}$$

$$C'(2) = 1 - \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{8}(2)^2 = \frac{1}{2}$$

De modo que el punto divisorio es $(2, \frac{10}{3})$ (punto de inflexión).

Paso 3 Combinando la información de los pasos 1 y 2, tenemos la figura 24(a).

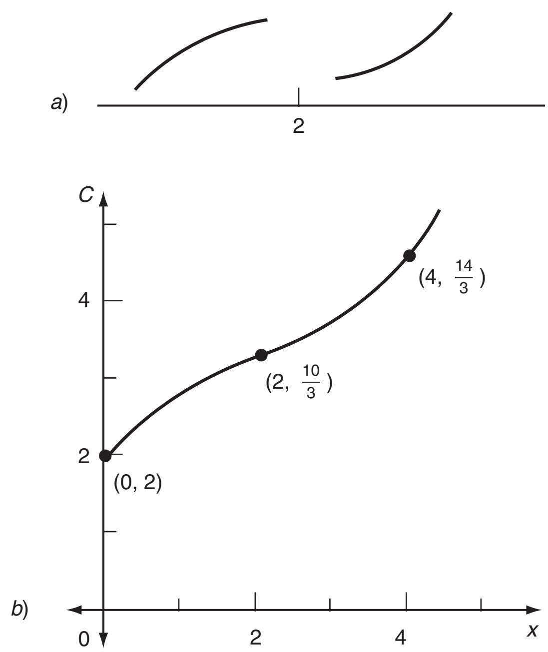


FIGURA 24

Paso 4 Cuando $x = 0$, $C = 2$, dando el punto (0, 2). Haciendo $C = 0$ obtenemos una ecuación cúbica en x, que no estamos en posibilidades de resolver. En consecuencia, debemos prescindir de esta información.

Es útil tener un punto más sobre la gráfica a la derecha de $x = 2$, de modo que calculamos el valor de C para $x = 4$ y encontramos el punto $(4, \frac{14}{3})$.

Integrando toda esta información, obtenemos la gráfica que se observa en la figura 24(b).

EJERCICIOS 13-4

(1-12) Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones.

1. $y = x^2 - 6x + 7$

2. $y = x^2 - 4x + 5$

3. $y = x^3 - 3x + 4$

4. $y = x^3 - 12x + 10$

5. $y = x^3 - 3x + 2$

6. $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 20$

7. $y = x^4 - 2x^2$

8. $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$

9. $y = x^5 - 5x^4 + 1$

10. $y = x^7 - 7x^6$

11. $y = 5x^6 - 6x^5 + 1$

12. $y = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2$

(13-14) Dibuje las gráficas de las dos funciones de costo de los ejercicios 23 y 24 de la sección 13-3 (sólo considere $x \geq 0$).

■ 13-5 APLICACIONES DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

En la práctica surgen muchas situaciones en que deseamos maximizar o minimizar cierta cantidad. El siguiente ejemplo representa un caso común del asunto.

EJEMPLO 1 ***(Conservación óptima)*** Un ecólogo cultiva peces en un lago. Cuanto más peces introduzca, habrá más competencia por el alimento disponible y el pez ganará peso en forma más lenta. De hecho, se sabe por experimentos previos que cuando hay n peces por unidad de área del lago, la cantidad promedio en peso que cada pez gana durante una temporada está dada por $w = 600 - 30n$ gramos. ¿Qué valor de n conduce a la producción total máxima en el peso de los peces?

Solución La ganancia en peso de cada pez es $w = 600 - 30n$. Puesto que hay n peces por unidad de área, la producción total por unidad de área, P, es igual a nw. Por consiguiente,

$$P = n(600 - 30n) = 600n - 30n^2$$

Con el propósito de encontrar el valor de n para P máxima, derivamos y hacemos igual a cero la derivada dP/dn:

$$\frac{dP}{dn} = 600 - 60n$$

y $dP/dn = 0$ cuando $600 - 60n = 0$, esto es, si $n = 10$. Así que la densidad de 10 peces por unidad de área da la producción total máxima. El valor máximo de P es

$$\mathrm{P} = 600(10) - 30(10)^2 = 3000$$

es decir, 3000 gramos por unidad de área. Podemos verificar que esto es un máximo local usando la regla de la segunda derivada:

$$\frac{d^2P}{dn^2} = -60$$

La segunda derivada es negativa (de hecho, para todos los valores de n) por lo que el valor crítico $n = 10$ corresponde a un máximo de P.

La gráfica de P contra n aparece en la figura 25. P es cero cuando n es cero ya que en ese momento no hay peces. A medida que n aumenta, P se incrementa hasta un valor máximo, luego decrece hasta cero otra vez cuando $n = 20$. Si n sigue creciendo, P decrece porque para valores grandes de n los peces ganarán muy poco peso y algunos de ellos morirán, de modo que la producción total será pequeña. ☛ **16**

☛ **16.** Vuelva a resolver el ejemplo 1, si el peso promedio que gana cada pez es $w = 800 - 25n$

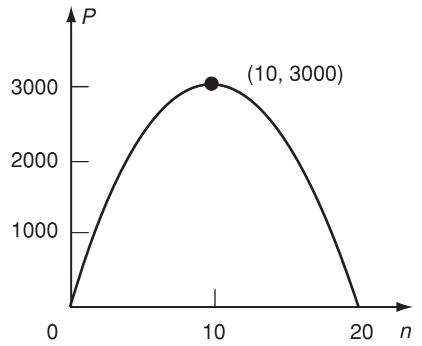


FIGURA 25

Respuesta $n = 16$

Consideremos otro ejemplo de naturaleza puramente matemática.

EJEMPLO 2 Determine dos números cuya suma sea 16, de tal forma que su producto sea tan grande como sea posible.

Solución Sean los dos números x y y, de modo que $x + y = 16$. Si $P = xy$ denota su producto, entonces necesitamos determinar los valores de x y y que produzcan que P sea máximo.

☛ **17.** Encuentre dos números cuyo producto sea 64 y su suma sea mínima.

No podemos derivar P de inmediato, puesto que es una función de dos variables, x y y. Sin embargo, estas dos variables no son independientes, sino que están relacionadas por la condición $x + y = 16$. Debemos usar esta condición para eliminar una de las variables de P, dejando a P como función de una sola variable. Tenemos que $y = 16 - x$, y así

$$P = xy = x(16 - x) = 16x - x^2$$

Debemos encontrar el valor de x que haga a P máximo.

$$\frac{dP}{dx} = 16 - 2x$$

Así que $dP/dx = 0$ cuando $16 - 2x = 0$, esto es, si $x = 8$. La segunda derivada $d^2P/dx^2 = -2 < 0$, y $x = 8$ corresponde a un máximo de P.

Cuando $x = 8$, también $y = 8$, de modo que el valor máximo de P es igual a 64. ☛ **17**

Respuesta 8 y 8

La solución de problemas de optimización del tipo anterior con frecuencia es una de las áreas más difíciles del cálculo diferencial. La principal dificultad surge cuando es necesario escribir en ecuaciones el problema dado en palabras. Una vez que las ecuaciones se han construido, por lo regular es rutinario completar la solución usando un poco de cálculo. Esta tarea de expresar problemas en palabras como términos de ecuaciones matemáticas ocurre a menudo en todas las ramas de las matemáticas aplicadas y es algo que el estudiante interesado en las aplicaciones deberá dominar en sus cursos de cálculo para que sean de utilidad.

Por desgracia, no es posible dar rápidas y contundentes reglas por medio de las cuales cualquier problema verbal pueda reescribirse en ecuaciones. Sin embargo, existen algunos principios directores que conviene tener en mente.*

Paso 1 Identifique todas las variables implicadas en el problema y denote cada una de ellas mediante un símbolo.

En el ejemplo 1, las variables eran n, el número de peces por unidad de área; w, la ganancia promedio en peso por pez, y P, la producción total de peso de los peces por unidad de área. En el ejemplo 2, las variables eran los dos números x y y, y P, su producto.

Paso 2 Destaque la variable que tiene que maximizarse o minimizarse y exprésela en términos de las otras variables del problema.

Volviendo al ejemplo 1, la producción total P se maximizó, y escribimos $P = nw$, que expresa a P en términos de n y w. En el ejemplo 2, el producto P de x y y se maximizó y por supuesto $P = xy$.

Paso 3 Determine todas las relaciones entre las variables. Exprese estas relaciones matemáticamente.

En el primer ejemplo, se daba la relación $w = 600 - 3n$. En el segundo, la relación entre x y y es que su suma debía ser igual a 16, de modo que escribimos la ecuación matemática $x + y = 16$.

Paso 4 Exprese la cantidad por maximizar o minimizar en términos de una sola de las variables. Con el objetivo de hacer esto, se utilizan las relaciones obtenidas en el paso 3 para eliminar todas las variables excepto una.

Recurriendo de nuevo al ejemplo 1, tenemos que $P = nw$ y $w = 600 - 3n$, de modo que, eliminando w, se obtiene P en términos de n: $P = n(600\ 3n)$. En el ejemplo 2, tenemos que $P = xy$ y $x + y = 16$, por lo que, eliminando y, obtenemos $P = x(16 - x)$.

Paso 5 Una vez que se ha expresado la cantidad requerida como una función de una variable, determine sus puntos críticos e investigue si son máximos o mínimos locales.

*Los pasos 1 y 3 no sólo se aplican a problemas de optimización sino a problemas verbales en general.

Seguiremos estos pasos en otro ejemplo.

EJEMPLO 3 ***(Costo mínimo)*** Se debe construir un tanque con una base cuadrada horizontal y lados rectangulares verticales. No tendrá tapa. El tanque necesita una capacidad de 4 metros cúbicos de agua. El material con que se construirá el tanque tiene un costo de $10 por metro cuadrado. ¿Qué dimensiones del tanque minimizan el costo del material?

Solución

Paso 1 Las variables en el problema son las dimensiones del tanque y el costo de los materiales de construcción. El costo depende del área total de la base y de los lados, los cuales determinan la cantidad de material usado en la construcción. Denotemos con x la longitud de un lado de la base y con y la altura del tanque. (Véase la figura 26). La cantidad que debe minimizarse es el costo total de materiales, que denotamos con C.

Paso 2 C es igual al área del tanque multiplicada por $10, que es el costo por unidad de área. La base es un cuadrado con lado x, de modo que tiene un área igual a x^2. Cada lado es un rectángulo con dimensiones x y y, y tiene un área xy. El área total de la base más los cuatro lados es por tanto $x^2 + 4xy$. En consecuencia, escribimos

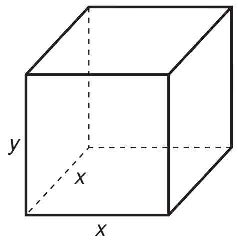


FIGURA 26

$$C = 10(x^2 + 4xy)$$

Paso 3 Observe que la cantidad por minimizar está expresada como una función de dos variables, de modo que necesitamos una relación entre x y y para eliminar una de éstas. Esta relación se obtiene del requerimiento (establecido en el problema) de que el volumen del tanque debe ser de 4 metros cúbicos. El volumen es igual al área de la base por la altura, esto es, x^2y, y así tenemos la condición

$$x^2y = 4$$

☛ **18.** Vuelva a resolver el ejemplo 3, si el tanque tiene una tapa que cuesta $30 por metro cuadrado.

Paso 4 Por el paso 3, $y = 4/x^2$, y así

$$C = 10\left[x^2 + 4x\left(\frac{4}{x^2}\right)\right] = 10\left[x^2 + \frac{16}{x}\right]$$

Paso 5 Podemos derivar la última expresión y determinar los puntos críticos de C.

$$\frac{dC}{dx} = 10\left(2x - \frac{16}{x^2}\right) = 20\left(x - \frac{8}{x^2}\right) = 0$$

Así, $x - 8/x^2 = 0$ y por tanto $x^3 = 8$; es decir, $x = 2$.

La base del tanque debería tener en consecuencia un lado de 2 metros de longitud. La altura del tanque ahora está dada por

$$y = \frac{4}{x^2} = 4/(2)^2 = 1$$

Respuesta $x = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$, $y = \sqrt[3]{16} \approx 2.52$

Es fácil verificar que $d^2C/dx^2 > 0$ cuando $x = 2$, de modo que este valor de x representa un mínimo local de C. ☛ **18**

Una de las aplicaciones más importantes de la teoría de máximos y mínimos es en las operaciones de empresas comerciales. Esto ocurre por una razón simple, una empresa selecciona su estrategia y nivel de operación en tal forma que maximice su utilidad. Así pues, si la administración de la empresa sabe cómo depende la utilidad de alguna variable que puede ajustarse, entonces elegirán el valor de tal variable de modo que produzca la máxima utilidad posible.

Consideremos el caso en que la variable a ajustar es el nivel de producción x (el número de unidades del producto de la empresa elaboradas por semana o por mes). Si cada unidad se vende a un precio p, el ingreso es $R(x) = px$. El costo de producir x artículos depende de x y se denota por $C(x)$, la función de costo. Se sigue que la utilidad es una función de x dada por

$$P(x) = R(x) - C(x) = px - C(x)$$

Deseamos elegir el valor de x que haga a P máxima.

En primer término, abordemos el caso en que una pequeña empresa vende su producto en un mercado de libre competencia. En esta situación, el volumen de ventas x de esta empresa particular no afectará el precio del mercado para el artículo en cuestión. Podemos suponer que el precio p es constante, independiente de x, determinado por fuerzas económicas fuera del control de nuestra pequeña empresa. El siguiente ejemplo ilustra un problema de esta clase.

EJEMPLO 4 ***(Maximización de utilidades)*** Una pequeña empresa manufacturera puede vender todos los artículos que produce a un precio de \$6 cada uno. El costo de producir x artículos a la semana (en dólares) es

$$C(x) = 1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3$$

¿Qué valor de x debemos seleccionar con objeto de maximizar las utilidades?

Solución El ingreso producido por la venta de x artículos a \$6 cada uno es $R(x) = 6x$ dólares. Por consiguiente, la utilidad por semana es

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 6x - (1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3) \\ &= -1000 + 0.003x^2 - 10^{-6}x^3 \end{aligned}$$

A fin de encontrar el valor máximo de P, buscamos los puntos críticos en la forma usual y luego investigamos su naturaleza. Derivando obtenemos

$$P'(x) = 0.006x - (3 \times 10^{-6})x^2$$

y haciendo $P'(x) = 0$, encontramos que $x = 0$ o $x = 2000$. Podemos aplicar a cada uno de estos valores el criterio de la segunda derivada:

$$P''(x) = 0.006 - (6 \times 10^{-6})x$$

de modo que

$$P''(0) = 0.006 > 0 \qquad \text{y} \qquad P''(2000) = -0.006 < 0$$

Así que $x = 0$ es un mínimo local de $P(x)$, mientras que $x = 2000$ es un máximo local.

Este último valor representa el nivel de producción en que la utilidad es máxima. La utilidad está dada por

$$P(2000) = -1000 + 0.003(2000)^2 - 10^{-6}(2000)^3 = 3000$$

o \$3000 por semana.

Se presenta una situación distinta en el caso de una gran empresa que en esencia es el único proveedor de un producto particular. En tal caso, la empresa controla o monopoliza el mercado, y puede elegir el precio de venta que desee para el producto. El volumen de ventas está determinado ahora por el precio a que se ofrece el producto (a través de la ecuación de demanda). Si escribimos la ecuación de demanda en la forma $p = f(x)$, se sigue que la función de ingreso es $R = xp = xf(x)$. Luego, la función de utilidad es

$$P(x) = \text{Ingreso} - \text{Costo} = x\,f(x) - C(x)$$

y x debe elegirse de modo que maximice esta función.

EJEMPLO 5 **(*Decisiones sobre fijación de precios*)** El costo de producir x artículos por semana es

$$C(x) = 1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3$$

En el caso del artículo en cuestión, el precio en que x artículos pueden venderse por semana está dado por la ecuación de demanda

$$p = 12 - 0.0015x$$

Determine el precio y el volumen de ventas en que la utilidad es máxima.

Solución El ingreso por semana es

$$R(x) = px = (12 - 0.0015x)x$$

Luego, la utilidad está dada por

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= (12x - 0.0015x^2) - (1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3) \\ &= -1000 + 6x + 0.0015x^2 - 10^{-6}x^3 \end{aligned}$$

Con la finalidad de encontrar el valor máximo de $P(x)$, hacemos $P'(x) = 0$

$$P'(x) = 6 + 0.003x - (3 \times 10^{-6})x^2 = 0$$

Cambiando signos, dividiendo entre 3 y multiplicando por 10^6 la ecuación completa, obtenemos $x^2 - 1000x - 2 \times 10^6 = 0$. Podemos factorizar el lado izquierdo como

$$(x - 2000)(x + 1000) = 0$$

y así las soluciones son $x = 2000$ o -1000. (Estas soluciones pudieron obtenerse también por medio de la fórmula cuadrática).

La raíz negativa no tiene importancia práctica, de modo que sólo necesitamos considerar $x = 2000$. Con el objetivo de verificar que ésta en realidad representa un máximo local de la función de utilidad, podemos comprobar que $P''(2000) < 0$. Esto es fácil.

☛ **19.** Determine el valor de x que maximiza la ganancia y la ganancia máxima, si la función de costo es $C(x) = (1 + x)^2$ y la ecuación de demanda es $p = 10 - x$.

$$P''(x) = 0.003 - (6 \times 10^{-6})x$$

$$P''(2000) = 0.003 - (6 \times 10^{-6})(2000) = -0.009$$

Por tanto, el volumen de ventas de 2000 artículos por semana nos da la utilidad máxima. El precio por artículo que corresponde a este valor de x es

$$p = 12 - 0.0015x = 12 - 0.0015(2000) = 9$$ ☛ **19**

Para cualquier empresa, la utilidad es la diferencia entre el ingreso y los costos:

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

En consecuencia, suponiendo que todas las funciones son diferenciables,

$$P'(x) = R'(x) - C'(x)$$

Cuando la utilidad es máxima, $P'(x) = 0$, y se sigue que $R'(x) = C'(x)$.

Este resultado representa una importante conclusión general con respecto a la operación de cualquier empresa: *en el nivel de producción en que la utilidad es máxima, el ingreso marginal es igual al costo marginal*.

En un mercado de libre competencia, en que muchas empresas elaboran productos similares a casi el mismo precio, el volumen de ventas puede incrementarse mediante la publicidad. Sin embargo, si se gasta demasiado dinero en publicidad, el gasto excederá la ganancia en el ingreso por el incremento de las ventas. De nuevo, el criterio que debe usarse para decidir cuánto emplear en publicidad es que la ganancia debería ser máxima.

EJEMPLO 6 ***(Publicidad y ganancias)*** Una compañía obtiene una utilidad de \$5 por cada artículo de su producto que vende. Si gasta A dólares por semana en publicidad, el número de artículos que vende por semana está dado por

$$x = 2000(1 - e^{-kA})$$

en donde $k = 0.001$. Determine el valor de A que maximiza la utilidad neta.

Solución La utilidad bruta por la venta de x artículos es de $5x$ dólares, y de ésta restamos el costo de la publicidad. Esto nos deja una utilidad neta dada por

$$P = 5x - A = 10{,}000(1 - e^{-kA}) - A \tag{1}$$

Derivamos con la finalidad de encontrar el valor máximo de P.

$$\frac{dP}{dA} = 10{,}000(ke^{-kA}) - 1 = 10e^{-kA} - 1$$

dado que $k = 0.001$. Haciendo esto igual a cero, obtenemos

$$10e^{-kA} = 1 \qquad \text{o bien} \qquad e^{kA} = 10$$

y tomando logaritmos naturales, resulta que

Respuesta $x = 2, P_{\text{máx}} = 7$

$$kA = \ln 10 = 2.30$$

con tres cifras significativas. En consecuencia,

$$A = \frac{2.30}{k} = \frac{2.30}{0.001} = 2300$$

La cantidad óptima que debe gastarse en publicidad es en consecuencia de \$2300 por semana.

La utilidad máxima se encuentra sustituyendo este valor de A en la ecuación (1). Ya que $e^{-kA} = \frac{1}{10}$, se sigue que la utilidad semanal máxima es

$$P_{\text{máx}} = 10{,}000(1 - \tfrac{1}{10}) - 2300 = 6700 \text{ dólares}$$

EJEMPLO 7 ***(Máxima utilidad e impuesto sobre la renta)*** Las funciones de costo y de demanda de una empresa son $C(x) = 5x$ y $p = 25 - 2x$, respectivamente.

a) Encuentre el nivel de producción que maximizará las utilidades de la empresa. ¿Cuál es la máxima utilidad?

b) Si se impone un impuesto de t por cada unidad y la empresa lo carga en su costo, encuentre el nivel de producción que maximiza las utilidades de la empresa. ¿Cuál es la máxima utilidad?

c) Determine el impuesto por unidad t que debe imponerse para obtener un máximo impuesto sobre la renta.

Solución Tenemos:

$$\text{Ingreso} = \text{precio} \times \text{cantidad}$$

o

$$R = px = x(25 - 2x) = 25x - 2x^2$$

a) Si P denota la función de utilidad, entonces,

$$P = R - C = 25x - 2x^2 - 5x = 20x - 2x^2, \qquad \frac{dP}{dx} = 20 - 4x$$

Para encontrar la utilidad máxima, $dP/dx = 0$, o $20 - 4x = 0$, o $x = 5$. También, $d^2P/dx^2 = -4 < 0$. Así que las utilidades son máximas en el nivel de producción de $x = 5$ unidades. $P_{\text{máx}} = 20(5) - 2(5^2) = 50$.

b) Si se impone un impuesto t por cada unidad, la nueva función de costo será

$$C_N = 5x + tx$$

y las ganancias estarían dadas por

$$P = R - C_N = 25x - 2x^2 - (5x + tx) = (20 - t)x - 2x^2$$

$$\frac{dP}{dx} = 20 - t - 4x \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2P}{dx^2} = -4$$

Para optimizar las ganancias, $dP/dx = 0$, que da

$$x = \frac{20 - t}{4} = 5 - \frac{t}{4}$$

La utilidad máxima es

$$P_{\text{máx}} = (20 - t)\left(\frac{20 - t}{4}\right) - 2\left(\frac{20 - t}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}(20 - t)^2$$

(Nótese que cualquier impuesto t positivo disminuye las utilidades de la empresa; mientras que un impuesto negativo t, es decir, un subsidio, incrementa las utilidades).

c) Si T denota el impuesto total obtenido, entonces,

$$T = tx = t\left(\frac{5 - t}{4}\right) = 5t - \frac{t^2}{4}$$

Deseamos maximizar T. Ahora,

$$\frac{dT}{dt} = 5 - \frac{t}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2T}{dt^2} = -\frac{1}{2}$$

☛ **20.** Repita las partes *b*) y *c*) del ejemplo 7, si la función de costo es $C(x) = (1 + x)^2$ y la ecuación de demanda es $p = 10 - x$.

Para maximizar T debemos tener $dT/dt = 0$ y $d^2T/dt^2 < 0$. $dT/dt = 0$ que da $t = 10$. Por tanto, una tasa de impuesto de 10 por unidad producirá un impuesto máximo sobre la renta. ☛ **20**

Concluimos esta sección describiendo la aplicación de máximos y mínimos a un **modelo de costo de inventarios**. Consideremos un ejemplo particular. Supongamos que un fabricante produce 50,000 unidades de cierto artículo durante un año. Puede elegir entre varios programas de producción diferentes. Todas las unidades requeridas podrían fabricarse al inicio del año en una sola serie de producción. Debido a las economías de producción masiva, esto minimizaría el costo de producción. Sin embargo, significaría que grandes cantidades de artículos tendrían que mantenerse almacenados hasta que tuvieran que venderse, y los costos de almacenamiento podrían ser altos y aun exceder las ventajas de los bajos costos de producción.

Supongamos que tiene un costo de \$400 preparar la planta manufacturera en cada serie de producción, que cada artículo cuesta \$4 fabricarlo y que tiene un costo de 40¢ por año mantener un artículo almacenado. Supongamos que en cada serie de producción se produce el mismo número de artículos, y denotemos este número por x. Supongamos también que después de producir un lote, las x unidades se almacenan y se venden en una tasa uniforme de modo que las unidades almacenadas se agotan cuando ya está lista la próxima serie de producción. Así, el número de unidades almacenadas como una función del tiempo se ilustra en la figura 27. En cada serie de producción, el número salta de 0 a x, luego decrece progresivamente a una tasa constante hasta cero. Al alcanzar el cero, el próximo lote se produce y el número almacenado es de nuevo igual a x.

A partir de la figura 27 es claro que el número promedio de unidades almacenadas es $x/2$. Puesto que cuesta \$0.40 almacenar cada artículo por año, los costos de almacenamiento en el año serán de $(0.4)(x/2)$ dólares o $x/5$ dólares.

Respuesta *b*) $x = 2 - \frac{1}{4}t$, $P_{\text{máx}}\ 2(2 - \frac{1}{4}t)^2 - 1$
c) $t = 4$, $T_{\text{máx}} = 4$

Dado que los 50,000 artículos necesarios se producen en lotes de tamaño x, el número de series de producción por año debe ser $50{,}000/x$. Por consiguiente, el cos-

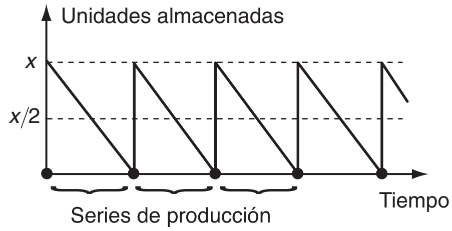


FIGURA 27

☛ **21.** Suponga que cuesta \$200 preparar cada serie de producción, \$2 por artículo a fabricar y \$4 anuales por almacenar cada artículo. Escriba la función de costo anual, si se requieren N artículos cada año y determine el tamaño de lote que la minimiza.

to de preparar la planta para estas series de $(400)(50{,}000/x) = (2 \times 10^7/x)$ dólares. El costo de producir 50,000 artículos a \$4 cada uno es \$200,000. En consecuencia, los costos totales de fabricación y de almacenamiento a lo largo de un año (en dólares) están dados por

$$C = \frac{2 \times 10^7}{x} + 200{,}000 + \frac{x}{5}$$

Deseamos encontrar el valor de x que haga a C mínimo. Derivando resulta

$$\frac{dC}{dx} = -\frac{2 \times 10^7}{x^2} + \frac{1}{5}$$

Haciendo esta derivada igual a cero, obtenemos el siguiente resultado:

$$\frac{2 \times 10^7}{x^2} = \frac{1}{5}$$

$$x^2 = (2 \times 10^7)(5) = 10^8$$

$$x = 10^4 = 10{,}000$$

(La raíz negativa no tiene importancia práctica). Más aún, advertimos que

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{4 \times 10^7}{x^3}$$

que es positiva cuando $x = 10{,}000$. De modo que este valor de x representa un mínimo local de C.

Por tanto, el costo mínimo se obtiene haciendo

$$50{,}000/10{,}000 = 5$$

series de producción por año, cada una de ellas con una producción de 10,000 unidades. ☛ **21**

Este tipo de modelo de costo de inventarios también se aplica a negocios tales como bodegas o mercados de venta al menudeo que mantienen existencias de artículos que han de venderse al público o a otras empresas. La pregunta es qué tan grande debe ser cada vez la cantidad de algún artículo que se ordena con destino a ser realmacenado. Si se ordena una cantidad muy grande, la empresa se enfrentará con sustanciales costos de almacenamiento, si bien no tendrá la desventaja de reordenar por un buen tiempo. Por otro lado, si sólo se ordena una pequeña cantidad ca-

Respuesta $C = \frac{200N}{x} + 2N + 2x$, $x = 10\sqrt{N}$

da vez, los costos de almacenamiento serán bajos pero los costos de acomodar las órdenes serán altos, dado que las órdenes deberán realizarse con frecuencia. Entre estos extremos podemos esperar encontrar un tamaño óptimo de cada orden que haga el costo total de almacenamiento más el de acomodo un mínimo. Este óptimo se denomina el *tamaño del lote económico*. Puede determinarse, al menos en el caso de un modelo simple, mediante un método similar al que se dio. (Véase el ejercicio 29 de esta sección y el número 31 de los problemas de repaso).

EJERCICIOS 13-5

1. *(Teoría de números)* Determine dos números cuya suma sea 10 y tales que su producto sea máximo.

2. *(Teoría de números)* Encuentre dos números con suma igual a 8, de modo que la suma de sus cuadrados sea un mínimo.

3. *(Teoría de números)* Determine dos números positivos cuya suma sea 75, tales que el producto de uno por el cuadrado del otro sea máximo.

4. *(Teoría de números)* Determine dos números positivos con suma igual a 12 de modo que la suma de sus cubos sea un mínimo.

5. *(Geometría)* Demuestre que entre todos los rectángulos de área igual a 100 centímetros cuadrados, el que tiene perímetro más pequeño es el cuadrado de lado igual a 10 centímetros.

6. *(Geometría)* ¿Cuál es el área del máximo rectángulo que puede inscribirse en un círculo de radio a?

7. *(Geometría)* ¿Cuál es el área del máximo rectángulo que puede inscribirse en un semicírculo de radio a?

8. *(Costos de cercas)* Un granjero desea delimitar una parcela rectangular de área 900 metros cuadrados. La cerca tiene un costo de $15 por metro. ¿Cuáles deberían ser las dimensiones de la parcela de modo que se minimice el costo del cercado? ¿Cómo cambia su respuesta si el costo de cercado sube a $20 por metro?

9. *(Costos de cercas)* Repita el ejercicio 8 en el caso de que uno de los lados de la parcela es común a una cerca ya existente y sólo es necesario cercar tres lados.

10. *(Diseño de un folleto impreso)* Un folleto impreso debe contener 48 pulgadas cuadradas de espacio impreso con márgenes de 3 pulgadas en la parte superior e inferior, y márgenes laterales de 1 pulgada. ¿Qué dimensiones del folleto consumirán la mínima cantidad de papel?

11. *(Diseño de una cisterna)* Se construirá una cisterna con capacidad de 324 pies cúbicos de agua. Deberá tener una base cuadrada con cuatro lados verticales, todos fabricados con concreto, y una tapa superior de acero. Si la unidad de área de acero cuesta el doble que la correspondiente al concreto, determine las dimensiones de la cisterna que minimizan el costo total de construcción.

12. *(Diseño de una cisterna)* Repita el ejercicio 11 si la forma de la cisterna es un cilindro con base y tapas circulares.

13. *(Costo promedio mínimo)* El costo promedio de fabricar cierto artículo es

$$\overline{C} = 5 + \frac{48}{x} + 3x^2$$

en donde x es el número de artículos producidos. Encuentre el valor mínimo de $\overline{C}$.

14. *(Modelo de control de inventarios)* El costo de la producción anual de un artículo es

$$C = 5000 + \frac{80{,}000{,}000}{x} + \frac{x}{20}$$

en donde x es el tamaño promedio del lote por serie de producción. Encuentre el valor de x que hace mínimo a C.

15. *(Costo promedio mínimo)* El costo de producir x artículos de cierto producto es

$$C(x) = 4000 + 3x + 10^{-3}x^2 \text{ (dólares)}$$

Determine el valor de x que hace del costo promedio por artículo un mínimo.

16. *(Costo promedio mínimo)* Repita el ejercicio 15 en el caso de la función de costo $C(x) = 16{,}000 + 3x + 10^{-6}x^3$ (dólares).

17. *(Costo marginal y costo promedio mínimos)* La función de costo para una empresa, está dada por

$$C(x) = 300x - 10x^2 + x^3/3$$

Calcule la producción x en la cual

a) el costo marginal es mínimo.

b) el costo promedio es mínimo.

18. *(Costo marginal mínimo)* Una empresa produce mensualmente x toneladas de un metal precioso con un costo total C dado por $C(x) = 10 + 75x - 5x^2 + x^3/3$ dólares. Encuentre el nivel de producción x donde el costo marginal alcanza su mínimo.

19. *(Ingreso máximo)* La función de demanda para cierto bien está dado por $p = 15e^{-x/3}$ para $0 \le x \le 8$, donde p es el precio por unidad y x el número de unidades pedidas. Determine el precio p y la cantidad x para los cuales el ingreso es máximo.

20. *(Ingreso máximo)* Repita el ejercicio 19 para la ley de demanda $p = 10e^{-x^2/32}$ para $0 \le x \le 6$.

21. *(Utilidad máxima)* Una empresa vende todas las unidades que produce a \$4 cada una. El costo total de la empresa C por producir x unidades está dado en dólares por

$$C = 50 + 1.3x + 0.001x^2$$

a) Escriba la expresión para la utilidad total P como una función de x.

b) Determine el volumen de producción x de modo que la utilidad P sea máxima.

c) ¿Cuál es el valor de la utilidad máxima?

22. *(Utilidad máxima)* Una compañía advierte que puede vender toda la existencia de cierto producto que elabora a una tasa de \$2 por unidad. Si estima la función de costo del producto como $(1000 + \frac{1}{2}(x/50)^2)$ dólares por x unidades producidas:

a) Encuentre una expresión para la utilidad total si se producen y venden x unidades.

b) Determine el número de unidades producidas que maximizarían la utilidad.

c) ¿Cuál es la cantidad de utilidad máxima?

d) ¿Cuál sería la utilidad si se produjeran 6000 unidades?

23. *(Utilidad máxima)* En el ejercicio 15, los artículos en cuestión se venden a \$8 cada uno. Encuentre el valor de x que maximiza la utilidad y calcule la utilidad máxima.

24. *(Utilidad máxima)* En el ejercicio 16, cada uno de los artículos se vende a \$30. Determine el valor de x que maximiza la utilidad y calcule la utilidad máxima.

25. *(Utilidad máxima)* Para cierto artículo, la ecuación de demanda es $p = 5 - 0.001x$. ¿Qué valor de x maximiza el ingreso? Si la función de costo es $C = 2800 + x$, encuentre el valor de x que maximiza la utilidad. Calcule la utilidad máxima.

26. *(Utilidad máxima)* Repita el ejercicio 25 para la ecuación de demanda $p = 8 - 0.02x$ y la función de costo $C = 200 + 2x$.

27. *(Efecto del impuesto en la producción)* La función de costo total de una fábrica está dada por

$$C(x) = 10 + 28x - 5x^2 + \frac{x^3}{3}$$

y la demanda del producto está dada por $p = 2750 - 5x$, donde p y x denotan el precio en dólares y la cantidad respectiva se grava con \$222 de impuesto por cada unidad producida, que el fabricante añade a su costo. Determine el nivel de producción (después de creado el impuesto) necesario para maximizar las utilidades. Muestre que la producción después del impuesto es menor que la producción antes del impuesto que maximiza las utilidades.

28. *(Efecto del impuesto en la productividad)* Repita el ejercicio 27 para

$$C(x) = 30 + 12x - 0.5x^2 \quad \text{y} \quad p = 60 - 2x$$

donde el impuesto es de \$3 por unidad gravada.

29. *(Tamaño del lote económico)* Un material se demanda a una tasa de 10,000 unidades por año; el precio del material es de \$2 por unidad; el costo de volver a surtir el almacén del material por orden, sin importar el tamaño de la orden (x), es de \$40 por orden; el costo de almacenar el material por un año es del 10% del valor de las existencias promedio ($x/2$). C es el costo anual de pedir y tener almacenado el material.

a) Demuestre que

$$C = 20{,}000 + \frac{400{,}000}{x} + \frac{x}{10}$$

b) Encuentre el tamaño económico del lote.

30. *(Modelo de control de inventarios)* Una fábrica tiene que producir 96,000 unidades de un artículo al año. El costo del material es de \$2 por unidad y el costo de volver a surtir la existencia de material por orden sin importar el tamaño x de la orden es de \$25 por orden. El costo de tener almacenado el material es de 30¢ por artículo por año sobre las existencias ($x/2$). Pruebe que el costo total C está dado por

$$C = 192{,}000 + \frac{2{,}400{,}000}{x} + \frac{3x}{20}$$

Determine también el tamaño del lote económico (esto es, el valor de x para el que C es mínimo).

31. *(Modelo de costo de inventarios)* Un distribuidor de automóviles vende 100,000 autos al año y los pide a la fábrica en lotes de tamaño x. Cuesta \$1000 colocar cada pedido y los costos de almacenaje por automóvil son de \$200 al año. Calcule el tamaño óptimo de cada lote para minimizar la suma del costo del pedido y el costo de almacenaje.

32. *(Modelo de costo de inventarios)* Un fabricante requiere N de ciertas partes por año. Cuesta K dólares colocar cada pedido de partes nuevas, sin importar el tamaño del pedido y cuesta I dólares anuales almacenar cada artículo inventariado. Pruebe que el tamaño de pedido óptimo es igual a $\sqrt{2NK/I}$. Calcule el costo mínimo total del pedido más el almacenaje.

33. *(Costo de la tierra)* Una compañía está buscando un terreno rectangular en el cual pueda construir un almacén nuevo. El área del almacén debe ser 6400 metros cuadrados. Debe tener en un lado del edificio 40 metros de ancho para la zona de carga y al frente 10 metros de ancho para estacionamiento. ¿Cuál es el área mínima de terreno que la compañía debe buscar?

34. *(Máximo ingreso)* Un restaurante especializado en carnes determina que al precio de \$5 por platillo de carne tendrán en promedio 200 clientes por noche, mientras que si lo vende a \$7 el número promedio de clientes bajará a 100. Determine la relación de demanda suponiendo que es lineal. Encuentre el precio que maximiza el ingreso.

35. *(Utilidad y satisfacción del cliente)* Un banco quiere recortar sus costos laborales reduciendo el número de sus cajeros, aunque espera una pérdida de negocios debido al descontento de los clientes por el tiempo de esperar. Supongamos que el salario de los cajeros es de \$80 diarios y la pérdida de utilidad por tener únicamente n cajeros es $5000/(n + 1)$ dólares diarios. Determine el valor de n que minimiza la suma de sus pérdidas más el costo del salario.

36. *(Máximo volumen)* Se corta un cuadrado de tamaño x de cada esquina de una cartulina rectangular que mide 12×18 pulgadas y las cuatro aristas se doblan para formar una caja de profundidad x. Encuentre el valor de x que da la caja de volumen máximo.

***37.** *(Mínima área)* Se corta un cuadrado de tamaño x de cada esquina de una cartulina cuadrada de tamaño $y \times y$, las cuatro aristas se doblan para formar una caja de profundidad x. Se requiere que la caja tenga un volumen de 128 centímetros cúbicos. Encuentre los valores de x y y que minimizan el área de la cartulina original.

38. *(Forma óptima de una lata)* Se desea fabricar latas cilíndricas con un volumen V dado. Pruebe que la forma de una lata que minimiza la cantidad de material utilizado (es decir, minimiza el área total de los lados, la base y la tapa), es tal que el radio es igual a dos veces la altura. (¿Por qué la mayoría de las latas no se hacen así?).

39. *(Producción máxima de madera)* Una compañía forestal planea desmontar cierta área de pinos después de cierto número de años. El número promedio de pies que se obtienen por árbol en un periodo dado de tiempo se sabe que es igual a $50 - 0.5x$, en donde x es el número de árboles por acre, con x entre 35 y 80. ¿Qué densidad de árboles debe conservarse para maximizar la cantidad de madera por acre?

40. *(Producción de cultivos)* La producción y (en toneladas por hectárea) de cierto cultivo de trigo está dada por $y = a(1 - e^{-kx}) + b$, donde a, b y k son constantes y x es el número de kilos de fertilizante por hectárea. La utilidad generada por la venta de trigo está dada por $P = py - c_0 - cx$ en donde p es la utilidad por tonelada, c es el costo por kilo de fertilizante y c_0 es un costo fijo. Determine cuánto fertilizante debe usarse para maximizar la utilidad P.

41. *(Rendimiento máximo de impuestos sobre las ventas)* La cantidad x de un artículo que puede venderse al mes a un precio p está dada por $x = 100(5 - p)$. La cantidad que los proveedores ofrecerán a un precio p_1 es $x = 200(p_1 - 1)$. Si existe un impuesto t por cada artículo (de modo que $p_1 = p - t$), determine la cantidad x que se vende al mes si el mercado está en equilibrio. Encuentre el valor de t que da el máximo impuesto total por mes al gobierno.

42. *(Rendimiento máximo de impuestos sobre las ventas)* Repita el ejercicio 41 si la ecuación de demanda es $x = 400(15 - p)$ y la ecuación de la oferta es $x = 400(2p_1 - 3)$. Calcule el rendimiento mensual del impuesto al gobierno.

43. *(Costos de construcción)* El costo de levantar un edificio con n pisos a menudo puede suponerse que tiene la forma $a + bn + cn^2$, en donde a, b y c son constantes. (Aquí a representa costos fijos como costos del terreno, b representa un costo que es el mismo para cada piso, tales como paredes interiores, ventanas, recubrimiento de pisos, y cn^2 representa costos como elementos estructurales, que se incrementan con el cuadrado del número de pisos). Calcule el valor de n que hace que el costo promedio por piso sea un mínimo. Demuestre que cuando el costo del terreno se incrementa, este valor óptimo de n crece.

44. *(Costos de calefacción)* Un individuo está planeando aislar una casa. Actualmente el costo anual de calefacción es \$3000 pero si se añaden x pulgadas de aislante el costo se reducirá a $3000e^{-0.1x}$ dólares. Por cada pulgada de aislante, el propietario debe pedir \$1000 al banco a una tasa de interés de 10%. ¿Cuántas pulgadas debe añadir para minimizar el total del costo de calefacción más el interés?

45. *(Tiempo óptimo de ventas)* Un especulador compra un lote de vino raro cuyo valor aumenta de acuerdo con la fórmula $V(t) = S(1 + 0.2t)$, donde t es el tiempo medido en años. Si el vino se vende al cabo de t años, se deben descontar los réditos para obtener un valor presente de $P(t) =$

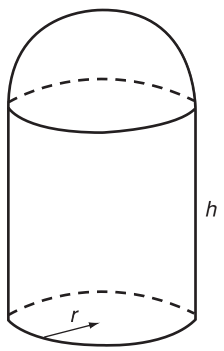
$V(t)e^{-rt}$, donde $r = R/100$ y R es la tasa nominal de descuento. ¿A los cuántos años debe venderse el vino para optimizar su valor presente?

***46.** *(Plaga de plantas)* El porcentaje de árboles frutales de una plantación que han sido infectados con cierta plaga está dado por

$$P(t) = \frac{100}{1 + 50e^{-0.1t}}$$

donde t es el tiempo en días. Calcule el tiempo en el cual $P'(t)$ es máximo. ¿Qué significa este tiempo?

47. *(Diseño de un granero)* Se va a construir un granero con la forma de un cilindro vertical con un techo semiesférico. El granero debe ser capaz de contener 10,000 pies cúbicos de grano. (Suponga que el grano se guarda únicamente en la parte cilíndrica y no en el techo). El techo semiesférico cuesta el doble por unidad de área que la parte cilíndrica. ¿Qué dimensiones debe tener el granero para minimizar el costo total?



48. *(Viajes de grupos)* Un agente de viajes ofrece un plan de vacaciones a grupos sobre las siguientes bases: para grupos de tamaño hasta 50, la tarifa es de \$400 por persona, mientras que en el caso de grupos más grandes, la tarifa por persona se reduce en \$2 por cada viajero que exceda a 50. Determine el tamaño del grupo que maximice el ingreso del agente de viajes.

***49.** *(Ingreso y utilidad máximas)* Un fabricante fija el precio de un producto en \$10 cada uno para órdenes menores de 200 unidades y ofrece una reducción en el precio de 2¢ por cada artículo ordenado que exceda a 200; la reducción se aplica a la orden completa. Calcule el tamaño de la orden que maximiza el ingreso del fabricante. Si el costo de producción de cada artículo es de \$5, determine el tamaño de la orden que maximiza la utilidad del fabricante. ¿Cómo se modifica este último resultado si los costos del fabricante se incrementan a \$7 por artículo?

50. *(Costo de instalación de una línea telefónica)* Se desea construir una línea telefónica entre dos torres A y B situadas en orillas opuestas de un río. El ancho del río es de 1 kilómetro, y B está situada 2 kilómetros río abajo de A. Tiene un costo de \$$c$ por kilómetro tender una línea sobre tierra y de \$$2c$ por kilómetro abajo del agua. La línea telefónica seguirá la orilla del río a partir de A una distancia x (en kilómetros) y luego cruzará diagonalmente el río en línea recta directamente hasta B. Determine el valor de x que minimiza el costo total.

51. *(Refinería costera)* Una compañía de petróleo requiere un oleoducto de una torre de perforación situada mar adentro a una refinería que se construye en la costa cercana. La distancia de la torre de perforación al punto más cercano P sobre la costa es de 20 kilómetros y la distancia a lo largo de la costa de P a la refinería es de 50 kilómetros. A partir de la refinería, el oleoducto recorrerá una distancia x a lo largo de la costa, después seguirá una línea recta hasta la torre de perforación. El costo por kilómetro de oleoducto bajo el agua es de tres veces el correspondiente a la sección sobre tierra. Encuentre el valor de x que minimiza el costo total del oleoducto.

52. *(Epidemia)* En el transcurso de una epidemia, la proporción de población infectada después de un tiempo t es igual a

$$\frac{t^2}{5(1 + t^2)^2}$$

(t está medido en meses, y la epidemia empieza en $t = 0$). Encuentre la máxima proporción de población que llega a infectarse, así como el tiempo en el cual la proporción de individuos infectados crece más rápidamente.

53. *(Reacción a una droga)* La reacción a dos drogas como función del tiempo (medido en horas) está dada por

$$R_1(t) = te^{-t}, \quad R_2(t) = te^{-2t^2}$$

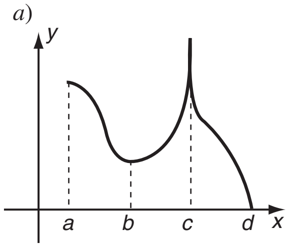
¿Qué droga tiene la reacción máxima mayor?

54. *(Reacción a una droga)* La reacción a una droga en el tiempo t después de haber sido administrada está dada por $R(t) = t^2e^{-t}$. ¿En qué momento la reacción es máxima?

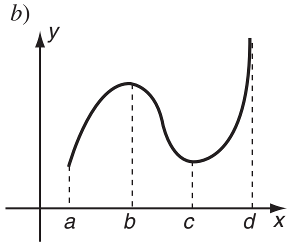
■ 13-6 MÁXIMOS Y MÍNIMOS ABSOLUTOS

☛ **22.** Por inspección de las siguientes gráficas, proporcione los valores de x en los que cada función toma sus valores máximo absoluto y mínimo absoluto en el intervalo dado.

a)



b)



Respuesta *a*) Máximo absoluto *c*, mínimo absoluto *d*.
b) Máximo absoluto en *d*, mínimo absoluto en *a* y en *c*.

☛ **23.** Determine los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de las siguientes funciones en los intervalos dados:
a) $f(x) = 3 + 4x - x^2$ en [0, 3];
b) $f(x) = x^3 - 12x + 5$ en $[-3, 4]$

Respuesta *a*) Máximo absoluto 7 en $x = 2$, mínimo absoluto 3 en $x = 0$
b) máximo absoluto 21 en $x = -2$ y $x = 4$, mínimo absoluto -11 en $x = 2$

En algunos problemas, ocurre que la variable independiente x se restringe a algún intervalo de valores, digamos $a \leq x \leq b$, y necesitamos encontrar el valor máximo o mínimo de una función $f(x)$ sobre este conjunto de valores de x. De hecho, la mayoría de nuestros problemas de la última sección eran de este tipo, si bien no enfatizamos esto allí. Por ejemplo, si x es el nivel de producción de alguna empresa, x está restringida al intervalo $x \geq 0$ y nos interesa el valor máximo de la función de utilidad en este intervalo. Cualquier máximo local que pueda ocurrir en algún valor negativo de x no tiene importancia. Esta restricción sobre x no afecta ninguno de los resultados que hemos obtenido, pero surgen casos en que restricciones similares pueden afectar las conclusiones con respecto al óptimo.

DEFINICIÓN El valor **máximo absoluto** de $f(x)$ sobre un intervalo $a \leq x \leq b$ de su dominio es el valor más grande de $f(x)$ cuando x asume todos los valores entre a y b. De manera similar, el valor **mínimo absoluto** de $f(x)$ es el valor más pequeño de $f(x)$ a medida que x varía entre a y b.

Es evidente que si $f(x)$ es continua en $a \leq x \leq b$, el punto en que $f(x)$ alcanza su máximo absoluto debe ser un máximo local de $f(x)$ o uno de los puntos extremos a o b. Una proposición similar es válida en el caso del mínimo absoluto. Con el objetivo de encontrar los valores máximos o mínimos absolutos de $f(x)$ sobre $a \leq x \leq b$, sólo tenemos que seleccionar los valores más grande y más pequeño entre los valores de $f(x)$ en los puntos críticos situados en $a \leq x \leq b$ y en los puntos extremos a y b. Esto se ilustra en el ejemplo 1. ☛ **22**

EJEMPLO 1 Determine los valores máximo y mínimo absolutos de

$$f(x) = 1 + 12x - x^3 \quad \text{en } 1 \leq x \leq 3$$

Solución Tenemos que $f'(x) = 12 - 3x^2$

Puesto que $f'(x)$ está definida para toda x, los puntos críticos de f están dados por $f'(x) = 0$ o $x^2 = 4$; esto es, $x = \pm 2$. Pero $x = -2$ *no* está dentro del intervalo $1 \leq x \leq 3$. Así, sólo consideremos el punto crítico $x = 2$, más los puntos extremos $x = 1$ y $x = 3$. Los valores de $f(x)$ en estos puntos son

$$f(1) = 1 + 12 - 1 = 12$$
$$f(2) = 1 + 24 - 8 = 17$$
$$f(3) = 1 + 36 - 27 = 10$$

En consecuencia, el valor máximo absoluto de $f(x)$ es 17, que ocurre en $x = 2$, y el mínimo absoluto es 10, que coincide con el punto extremo $x = 3$. La gráfica de $y = 1 + 12x - x^3$ aparece en la figura 28. Dentro del intervalo $1 \leq x \leq 3$, la gráfica tiene un solo máximo local en $x = 2$. El valor mínimo absoluto coincide con el punto extremo $x = 3$. ☛ **23**

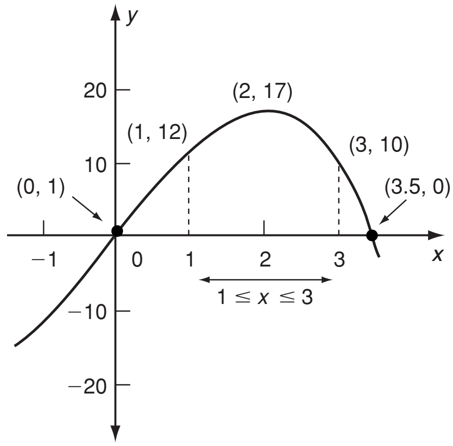


FIGURA 28

EJEMPLO 2 ***(Costo mínimo)*** Tiene que construirse una cisterna subterránea con la finalidad de albergar 100 pies cúbicos de desechos radiactivos. La cisterna tendrá forma cilíndrica. La base circular y la cara lateral, todos bajo tierra, tienen un costo de \$100 por pie cuadrado y la tapa, al nivel del suelo tiene un costo de \$300 por pie cuadrado debido a la necesidad de protección. Más aún, la profundidad del tanque no puede exceder los 6 pies porque una capa de dura roca está por debajo de la superficie, lo que incrementaría el costo de la excavación enormemente si se penetrara. Por último, el radio del tanque no puede exceder 4 pies por limitaciones de espacio. ¿Qué dimensiones del tanque hacen del costo un mínimo?

Solución Sea el radio de r pies y la profundidad de x pies. (Véase la figura 29). Se sigue que el volumen es $\pi r^2 x$, que debe ser igual a los 100 pies cúbicos requeridos:

$$\pi r^2 x = 100 \tag{1}$$

El área de la cara vertical es $2\pi rx$ y la correspondiente a la base es πr^2, y todas éstas tienen un costo de \$100 por pie cuadrado. De modo que

$$\text{Costo (en dólares) de la base y la cara lateral} = (2\pi rx + \pi r^2)(100)$$

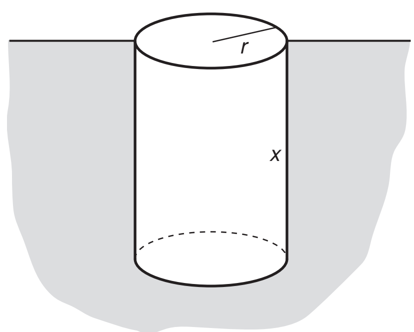


FIGURA 29

La tapa cuesta $(\pi r^2)(300)$ dólares. Por consiguiente, el costo total C (en dólares) es

$$C = (2\pi rx + \pi r^2)(100) + (\pi r^2)(300) = 200\pi rx + 400\pi r^2$$

Pero por la ecuación (1), $x = 100/\pi r^2$, de modo que sustituyendo x encontramos que

$$C = \frac{20{,}000}{r} + 400\pi r^2$$

Con el objetivo de encontrar el valor mínimo de C hacemos $dC/dr = 0$ y despejamos r.

$$\frac{dC}{dr} = -\frac{20{,}000}{r^2} + 800\pi r = 0$$

$$800\pi r = \frac{20{,}000}{r^2}$$

$$r^3 = \frac{20{,}000}{80\pi} = \frac{25}{\pi}$$

Por tanto, $r = \sqrt[3]{25/\pi} \approx 2.00$

El valor correspondiente de x es

$$x = \frac{100}{\pi r^2} \approx \frac{100}{\pi(2.00)^2} = 7.96$$

Por tanto, las dimensiones que corresponden a la construcción más barata son un radio de 2 pies y una profundidad de 7.96 pies. Sin embargo, no teníamos permitido un valor de x que excediera los 6 pies. De modo que si bien el valor $x = 7.96$ da el costo mínimo de C, no ofrece la solución al problema tal como se planteó.

Calculemos el intervalo de valores permisibles de r. El mayor valor de r está dado como 4. El más pequeño ocurre cuando la profundidad es la mayor, esto es, cuando $x = 6$. En ese caso, $r^2 = 100/\pi x = 100/6\pi$, así

$$r = \sqrt{100/6\pi} \approx 2.30$$

Por lo que r está restringida al intervalo $2.30 \leq r \leq 4$

Dentro de este intervalo, C no tiene puntos críticos, así que sólo necesitamos evaluarla en los puntos finales del intervalo:

☛ **24.** Vuelva a resolver el ejemplo 2, si el costo de la tapa es \$100 por pie cuadrado.

$$C(2.30) = \frac{20{,}000}{2.30} + 400\pi(2.30)^2 \approx 15{,}300$$

$$C(4) = \frac{20{,}000}{4} + 400\pi(4)^2 \approx 25{,}100$$

Por tanto, el valor mínimo absoluto de C es \$15,300 y ocurre cuando $r = 2.30$ (esto es, cuando $x = 6$). La gráfica de C como una función de r se muestra en la figura 30. ☛ **24**

Respuesta $r = 2.515$, $x = 5.031$

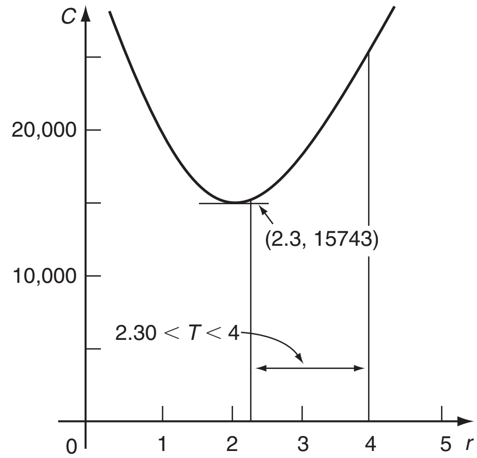


FIGURA 30

Resumen del método para encontrar extremos absolutos

Suponga que queremos el máximo absoluto y/o el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$.

Paso 1. Determine los puntos críticos de f y *rechace* aquellos (si hay alguno) que esté fuera del intervalo $a \leq x \leq b$.

Paso 2. Evalúe la función dada f en los puntos críticos encontrados en el paso 1 y en los puntos extremos del intervalo a y b.

Paso 3. Entonces, el más grande y el más pequeño de los valores de f determinados en el paso 2 son, respectivamente, los valores máximo y mínimo absolutos de f en $a \leq x \leq b$.

EJERCICIOS 13-6

(1-14) Determine los extremos absolutos de las siguientes funciones en los intervalos indicados.

1. $f(x) = x^2 - 6x + 7; \quad 1 \leq x \leq 6$

2. $f(x) = 9 + 6x - x^2; \quad 1 \leq x \leq 5$

3. $f(x) = x^3 - 75x + 1; \quad -1 \leq x \leq 6$

4. $f(x) = x^3 - 3x + 4; \quad -2 \leq x \leq 2$

5. $f(x) = x^3 - 18x^2 + 60x; \quad -1 \leq x \leq 5$

6. $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x^2}; \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 2$

7. $f(x) = \dfrac{(x+1)(x-6)}{x^2}; \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 2$

8. $f(x) = x + 1/x; \quad -2 \leq x \leq -\frac{1}{2}$

9. $f(x) = xe^{-x}; \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 2$

10. $f(x) = x^2 e^{-x^2}; \quad -2 \leq x \leq 2$

11. $f(x) = x - \ln x; \quad e^{-1} \leq x \leq e$

12. $f(x) = x^{-1} \ln x; \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 10$

***13.** $f(x) = x \ln x; \quad 0 < x \leq 0.9$

14. $f(x) = (2x + 1)e^{-x}; \quad 0 \leq x < \infty$

15. *(Contaminación del agua)* Al depositarse en un lago, los desperdicios orgánicos disminuyen el contenido de oxígeno del agua. Si t denota el tiempo en días después que se deposita el desperdicio, en un caso se encuentra experimentalmente que el contenido de oxígeno es

$$y = t^3 - 30t^2 + 6000$$

con $0 \leq t \leq 25$. Encuentre los valores máximo y mínimo de y durante los primeros 25 días siguientes al vaciado del desperdicio.

16. *(Costo promedio mínimo)* La función de costo de un fabricante es

$$C(x) = 1000 + 5x + 0.1x^2$$

cuando se producen x artículos por día. Si a lo más 80 artículos pueden producirse por día, determine el valor de x que da el costo promedio más bajo por artículo.

17. *(Ingreso y utilidad máximos)* El costo de producir x artículos por semana es

$$C(x) = 1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3$$

pero no más de 3000 artículos pueden producirse por semana. Si la ecuación de demanda es

$$p = 12 - 0.0015x$$

encuentre el nivel de producción que maximiza el ingreso y el nivel que maximiza la utilidad.

18. *(Decisiones sobre producción)* La función de costo en miles de dólares es

$$C(x) = 2 + x - \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{24}x^3$$

en donde el nivel de producción x está en miles de unidades por semana. La planta productiva disponible limita a x al rango $0 \leq x \leq 4$. Si cada artículo producido puede venderse en \$2.50, determine el nivel de producción que maximiza.

a) El ingreso. *b*) La utilidad.

¿Cómo cambian sus conclusiones si la planta productiva se incremento a $x = 8$ con la misma función de costo?

19. *(Decisiones sobre producción)* La ecuación de demanda del producto de una compañía es $p = 200 - 1.5x$, en donde x unidades pueden venderse a un precio de \$$p$ cada una. Si le cuesta a la compañía $(500 + 65x)$ dólares producir x unidades por semana. ¿Cuántas unidades debería producir y vender la compañía cada semana con el objetivo de maximizar la utilidad, si la capacidad de producción es a lo más:

a) de 60 unidades? *b*) de 40 unidades?

20. *(Tiempo mínimo de reacción)* En una prueba hecha a pilotos aviadores sobre la velocidad de reacción en una crisis simulada, se encontró que el tiempo total requerido para reaccionar a la crisis variaba con la edad x del piloto de acuerdo con la fórmula $T = 0.04(1700 - 80x + x^2)^{1/2}$ sobre un rango de edad $30 \leq x \leq 55$. Dentro de este rango, ¿a qué edad es el tiempo mínimo de reacción?

21. *(Diseño de depósito)* Una compañía fabrica depósitos de agua con capacidad de 50 pies cúbicos. La base debe ser cuadrada. Debido a las limitaciones de almacenaje y transporte, el tamaño de la base y la altura no deben exceder de 5 pies. Encuentre las dimensiones que minimizan la cantidad de material utilizado (que minimizan el área de la superficie).

22. *(Diseño de depósito)* Repita el ejercicio 21 para el caso de un depósito con base circular cuyo diámetro no debe exceder 5 pies.

23. *(Modelo de costo de inventarios)* Un minorista en computadoras vende 30,000 modelos personales anualmente. El costo de cada nuevo pedido es de \$1200 sin importar su tamaño y el costo de almacenaje de cada computadora es de \$2 anuales. Más aún, solamente se pueden almacenar 5000 computadoras a la vez. ¿Cuántas veces al año debe reordenar para minimizar su costo total?

24. *(Fotosíntesis)* Si una planta recibe una luz de intensidad x, la razón de fotosíntesis y, medida en unidades adecuadas, se encontró experimentalmente que estaba dada por $y = 150x - 25x^2$ para $0 \leq x \leq 5$. Encuentre los valores máximo y mínimo de y cuando x pertenece al intervalo $1 \leq x \leq 5$.

***25.** *(Medida de población)* El tamaño de cierta población de bacterias en el tiempo t (en horas) está dado por $y = a\,(1 + \frac{1}{2}e^t)^{-1}$, donde a es una constante. Un biólogo planea observar a la población durante un periodo de dos horas desde $t = 0$ a $t = 2$. ¿Cuáles serán la mayor y menor razón de crecimiento que observará?

■ 13-7 ASÍNTOTAS

En la primera parte de esta sección estaremos interesados en la forma en que ciertas funciones se comportan cuando sus argumentos toman valores muy grandes o decrecen a valores negativos muy grandes.

Considere, por ejemplo, $f(x) = 1/x$. Una tabla de valores de esta función para $x = 1, 10, 100, 1000$, etc., se da en la tabla 7. A partir de estos valores es claro que a medida que x se incrementa, $f(x)$ se acerca cada vez más a cero. Este comportamiento también se aprecia en la gráfica de $y = 1/x$ en la figura 31. Usaremos la notación $x \to \infty$ (que se lee como *"x tiende a infinito"*) con la finalidad de indicar que x crece sin cota alguna. El hecho de que $1/x$ esté cada vez más cerca de cero cuando $x \to \infty$ se expresa, entonces, en la forma de un límite:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0}$$

TABLA 7

x	1	10	100	1000	10,000	$\cdots$
$f(x)$	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	$\cdots$

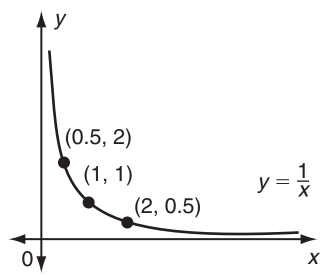


FIGURA 31

Como un segundo ejemplo consideremos la función

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x}$$

Los valores de esta función para un conjunto de valores de x se dan en la tabla 8. Es claro que a medida que x se incrementa, $f(x)$ está cada vez más cerca de 2. Esto también se observa en la gráfica de $y = (2x - 1)/x$ de la figura 32. Al incrementarse x, la gráfica se acerca cada vez más a la línea horizontal $y = 2$. Usando la notación de límite, escribimos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x - 1}{x} = 2$$

TABLA 8

x	1	10	100	1000	10,000	$\cdots$
$f(x)$	1	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\cdots$

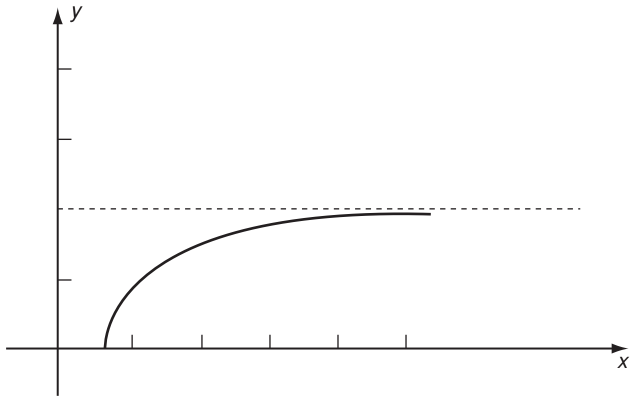


FIGURA 32

Empleamos la notación $x \to -\infty$ con el objetivo de indicar que x se hace indefinidamente grande en magnitud a través de valores negativos. Esto se lee *"x tiende a menos infinito"*. La definición formal de la notación de límite es como sigue.

DEFINICIÓN Una función $f(x)$ tiende al **valor límite** L cuando $x \to \infty$ si el valor de $f(x)$ puede hacerse tan cercano a L tanto como se desee, simplemente tomando x lo bastante grande. Escribimos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

DEFINICIÓN Una función $f(x)$ tiende al **valor límite** L cuando $x \to \infty$ si el valor de $f(x)$ puede aproximarse a L tanto como se desee tomando a x como un número negativo lo suficientemente grande en valor absoluto. Escribimos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \quad ☛ \ \mathbf{25}$$

☛ **25.** Calculando algunos valores, como en la tablas 7 y 8, determine

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x + 1} \text{ y } \lim_{x \to \infty} \frac{3x + 1}{x}$$

Respuesta 0 y 3

Como hemos visto, la función $1/x$ tiende al límite cero cuando $x \to \infty$. Esta función también se aproxima al mismo límite cuando $x \to \infty$. Estos resultados se generalizan a potencias recíprocas.

TEOREMA 1

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ para toda } n > 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ para toda } n > 0 \text{, con tal de que } \frac{1}{x^n} \text{ esté definido para } x < 0$$

☛ **26.** Evalúe:

a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x}}$

c) $\lim_{x\to-\infty} (2 + \frac{\sqrt{-x}}{x})$

Respuesta *a*) 0
b) no existe
c) 2

EJEMPLO 1

$$\lim_{x\to\infty} 1/x^2 = 0, \quad \lim_{x\to\infty} 1/\sqrt{x} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} x^{-4/3} = 0$$

Nótese que los límites como $\lim_{x\to-\infty} 1/\sqrt{x}$ no existen porque $\sqrt{x}$ no está definida cuando $x < 0$. ☛ **26**

EJEMPLO 2 Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ para las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2}{x^2 + x + 3}$

b) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^3 + 3x}$

Solución A fin de calcular el valor límite de tales funciones racionales la regla general es *dividir numerador y denominador entre la más alta potencia de* x *en el denominador* y luego se usa el teorema 1.

a) Divida entre x^2

$$f(x) = \frac{(2x^2 + 2) \div x^2}{(x^2 + x + 3) \div x^2} = \frac{2 + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}$$

Cuando $x \to \infty$, todas las potencias recíprocas se aproximan a cero, y

$$f(x) \to \frac{2 + 0}{1 + 0 + 0} = 2$$

Esto es, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$

b) Divida entre x^3

$$f(x) = \frac{(x + 1) \div x^3}{(x^3 + 3x) \div x^3} = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{3}{x^2}} \to \frac{0 + 0}{1 + 0} = 0$$

Así, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ☛ **27**

☛ **27.** Evalúe:

a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x - 1}{1 - x}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x - x^2}{1 - 3x^2}$

c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x + 3x^2}{2x^2 - x - 1}$

Respuesta *a*) –2

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{3}{2}$

EJEMPLO 3 ***(Utilidad y publicidad)*** De acuerdo con la estimación de una empresa, la utilidad P por la venta de su nuevo producto está relacionada con el gasto publicitario x mediante la fórmula

$$P(x) = \frac{23x + 15}{x + 4}$$

donde P y x están ambas en millones de dólares. *a*) Pruebe que $P(x)$ es una función creciente de x. *b*) Encuentre, si existe, el límite superior de la utilidad.

Solución

a) Tenemos que

$$P(x) = \frac{23x + 15}{x + 4}$$

Por la regla del cociente tenemos que

$$P'(x) = \frac{(x + 4)(23) - (23x + 15)(1)}{(x + 4)^2} = \frac{77}{(x + 4)^2}$$

Como $P'(x) > 0$ para toda $x > 0$, $P(x)$ es una función creciente de x, esto es, la utilidad crece al crecer la cantidad gastada en publicidad.

b) $$\lim_{x\to\infty} P(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{23x + 15}{x + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{(23x + 15)/x}{(x + 4)/x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{23 + 15/x}{1 + 4/x} = \frac{23 + 0}{1 + 0} = 23$$

Entonces el límite superior de la utilidad es \$23 millones. La gráfica de $P(x)$ se muestra en la figura 33. De la gráfica se sigue, que después de un tiempo, grandes incrementos en los gastos de publicidad (x) producirán incrementos muy pequeños en las utilidades. Éste es un ejemplo de lo que se conoce como la *ley de disminución del ingreso*.

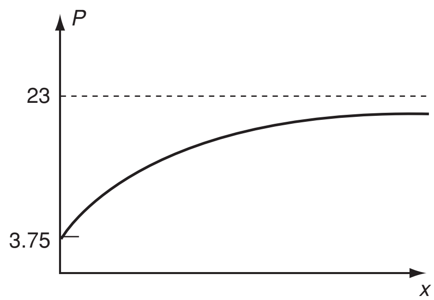


FIGURA 33

Si $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$, entonces la gráfica de $y = f(x)$ se hace cada vez más próxima a la recta $y = L$ cuando x se mueve hacia la derecha. Decimos que la recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica en $+\infty$.

Si la gráfica de $y = f(x)$ tiene $y = L$ como una asíntota horizontal en $+\infty$, la gráfica puede estar completamente de un lado de la recta $y = L$, o puede cruzar a la asíntota cuando x aumenta. Ejemplos comunes se muestran en la figura 34.

De forma similar, si $f(x) \to L'$ cuando $x \to -\infty$, entonces la gráfica de $y = f(x)$ se hace cada vez más cercana a la recta horizontal $y = L'$ cuando x se mueve hacia la izquierda. Esta recta es una asíntota horizontal de la gráfica en $-\infty$.

EJEMPLO 4 Bosqueje la gráfica de la función $y = e^{-x^2}$

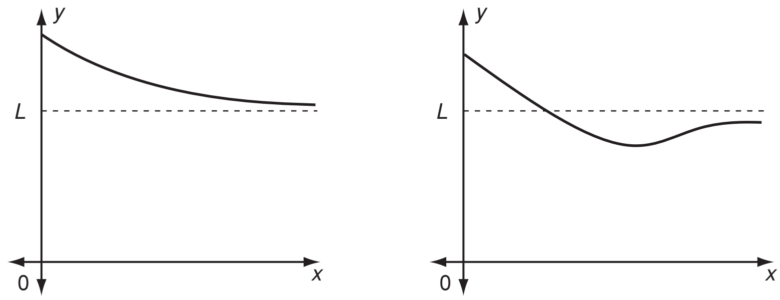


FIGURA 34

Solución En primer término, seguimos los pasos descritos en la sección 13-2.

Paso 1 Tenemos las siguientes igualdades:

$$f(x) = e^{-x^2}$$
$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \qquad \text{(por la regla de la cadena)}$$

El factor e^{-x^2} nunca es cero, de modo que $f'(x) = 0$ sólo cuando $x = 0$. En este valor $y = e^0 = 1$; es decir, la gráfica tiene una tangente horizontal en el punto (0, 1) al mismo tiempo que corta al eje y.

Puesto que e^{-x^2} siempre es positivo, advertimos que cuando $x < 0$, $f'(x) > 0$, de modo que la gráfica es creciente si $x < 0$. Por otro lado, cuando $x > 0$, $f'(x) < 0$ y la gráfica decrece.

Paso 2 Usamos la regla del producto y derivamos por segunda vez:

$$f''(x) = -2\frac{d}{dx}(xe^{-x^2}) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$$

Los puntos de inflexión, en donde $f''(x) = 0$, están dados por $2x^2 - 1 = 0$, esto es, $x = \pm 1/\sqrt{2}$.

Los valores correspondientes de y son $y = e^{-(\pm 1/\sqrt{2})^2} = e^{-0.5}$. De modo que los puntos de inflexión son $(\pm 1/\sqrt{2}, e^{-0.5}) \approx (\pm 0.71, 0.61)$. La segunda derivada cambia de signo en estos puntos de inflexión. El factor e^{-x^2} siempre es positivo, por lo que el signo de $f''(x)$ es el mismo que el de $2x^2 - 1$. Cuando $x < -1/\sqrt{2}$, $x^2 > \frac{1}{2}$ de modo que $2x^2 - 1 > 0$. Así que, $f''(x) > 0$ en esta región y la gráfica es cóncava hacia arriba. Si $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$, $x^2 < \frac{1}{2}$, de modo que $2x^2 - 1 < 0$. En consecuencia, $f''(x) < 0$ en esta región y la gráfica es cóncava hacia abajo. Por último, cuando $x > 1/\sqrt{2}$, $x^2 > \frac{1}{2}$ y $2x^2 - 1 > 0$. Así que, de nuevo $f''(x) > 0$ y la gráfica es cóncava hacia arriba.

Paso 3 Ya habíamos encontrado el punto (0, 1) en donde la gráfica corta al eje y. La gráfica nunca corta al eje x porque e^{-x^2} siempre es positivo.

Paso 4 Ahora un nuevo paso: examinemos el comportamiento cuando $x \to \pm\infty$. En cualquiera de los dos casos, el exponente $-x^2$ se hace indefinidamente grande y negativo. Por consiguiente, e^{-x^2} se acerca cada vez más a cero. De modo que la gráfica tiene al eje x ($y = 0$) como asíntota horizontal tanto si $x \to \infty$ como si $x \to -\infty$.

☛ **28.** Para la función

$y = \dfrac{1}{1 + x^2}$, determine

a) los intervalos en donde es creciente y en donde es decreciente;

b) los intervalos en donde es cóncava hacia arriba y en donde es cóncava hacia abajo;

c) los puntos de intersección con los ejes de coordenadas;

d) la asíntota horizontal.

Integrando toda la información podemos dibujar un bosquejo razonablemente preciso como se advierte en la figura 35. La gráfica está relacionada a la familiar "curva con forma de campana" de la teoría de probabilidad. ☛ **28**

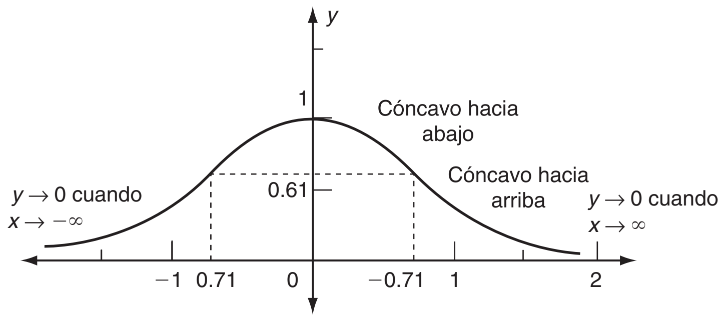


FIGURA 35

Asíntotas verticales

Consideremos el comportamiento de la función $y = 1/x$ cuando x tiende a 0. Si x se hace más y más pequeña, su recíproco se hace cada vez más grande, como se observa en la sucesión de valores de la tabla 9. Esta peculiaridad se advierte en la gráfica de $y = 1/x$ dado que la gráfica alcanza valores arbitrariamente grandes a medida que x decrece hacia 0. (Véase la figura 36). Denotamos esto como

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

TABLA 9

x	1	0.1	0.01	0.001
$y = \frac{1}{x}$	1	10	100	1000

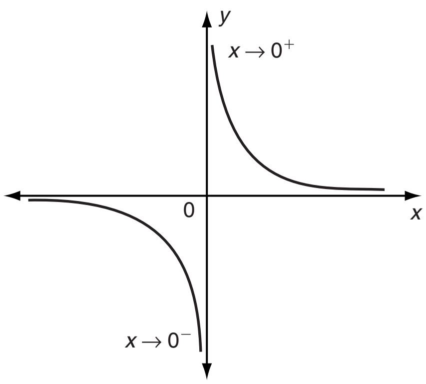


FIGURA 36

Respuesta *a*) Crece para $x < 0$, decrece para $x > 0$
b) Cóncava hacia arriba para $x < -1/\sqrt{3}$ y $x > 1/\sqrt{3}$, cóncava hacia abajo para $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$
c) corta al eje y en (0, 1), no cruza al eje x
d) $y = 0$. (La gráfica tiene forma similar a la de la figura 35).

Debe señalarse que esta notación sólo representa una convención, y que no implica la existencia de $\lim_{x\to 0+} (1/x)$ en el sentido ordinario de límite. No significa otra cosa que si x se aproxima a cero por la derecha, la función $1/x$ crece sin cota alguna.

Cuando x se acerca a cero por la izquierda, los valores de $1/x$ se hacen cada vez más grandes en la dirección negativa, como se ilustra en la tabla 10. Esto se denota como

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

que indica que al aproximarse x a 0 por la izquierda, la función $1/x$ decrece sin cota alguna.

TABLA 10

x	-1	-0.1	-0.01	-0.001
$\frac{1}{x}$	-1	-10	-100	-1000

☛ **29.** Determine $\lim_{x\to c-} f(x)$ y $\lim_{x\to c-} f(x)$ para las siguientes funciones con la c dada:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2},\ c = 0$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x-2},\ c = 2$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x+2},\ c = -2$

d) $f(x) = \dfrac{x-2}{(1-x)^2},\ c = 1$

Respuesta *a*) ∞, ∞
b) $-\infty, \infty$
c) $\infty, -\infty$
d) $-\infty, -\infty$

La línea $x = 0$ se denomina una **asíntota vertical** de la gráfica $y = 1/x$. La gráfica se aproxima a la asíntota vertical cada vez más, y se hace indefinidamente grande, cuando x tiende a 0. Esto se asemeja con la línea $y = 0$ (el eje x) que es una asíntota horizontal de la gráfica. La asíntota *horizontal* se obtiene del límite cuando x se aproxima a $\pm\infty$: $\lim_{x\to\pm\infty} 1/x = 0$. La asíntota vertical se obtiene al variar x de modo que y tienda a $\pm\infty$. ☛ **29**

EJEMPLO 5 Determine las asíntotas horizontales y verticales de la función

$$y = \frac{2x-9}{x-2}$$

y bosqueje su gráfica.

Solución Antes que todo, observamos que podemos dividir numerador y denominador entre x y escribir

$$y = \frac{2x-9}{x-2} = \frac{2-9/x}{1-2/x} \to \frac{2-0}{1-0} = 2 \text{ cuando } x \to \pm\infty$$

Por tanto, la gráfica de la función dada se aproxima a la línea $y = 2$ como su asíntota horizontal tanto cuando $x \to +\infty$ como si $x \to -\infty$.

El dominio de la función dada es el conjunto de todos los números reales excepto $x = 2$. Cuando x tiende a 2, el denominador $x - 2$ tiende a cero y así y se hace muy grande. La línea $x = 2$ debe ser en consecuencia una asíntota vertical.

Para completar el bosquejo de la gráfica, debemos decidir en qué lados de las asíntotas se encuentra la gráfica. Cuando $x \to 2^+$ (x tiende a 2 por la derecha), el factor $2x - 9$ del numerador se aproxima al límite -5. El denominador $x - 2$ tiende a cero a través de valores positivos. Por consiguiente, y se hace muy grande y negativa, dado que su numerador es negativo y su denominador pequeño pero positivo.

Por otro lado, cuando $x \to 2^-$ (x tiende a 2 por la izquierda) el numerador aún se aproxima al límite -5, pero el denominador es pequeño y negativo. Por tanto, y se hace grande y positivo. En consecuencia, concluimos que

$$y \to -\infty \text{ cuando } x \to 2^+ \quad \text{y} \quad y \to +\infty \text{ cuando } x \to 2^-$$

Podemos así, colocar la gráfica en relación con la asíntota vertical $x = 2$. (Véase la figura 37). Las porciones de la gráfica entre las asíntotas pueden ahora determinarse. Al hacer esto, es útil determinar en dónde corta a los ejes de coordenadas la gráfica. Notemos que cuando $x = 0$, $y = \frac{9}{2}$, de modo que la gráfica corta al eje y en el punto $(0, \frac{9}{2})$. Con el objetivo de encontrar dónde la gráfica corta al eje x, debemos hacer $y = 0$, lo cual significa que $2x - 9 = 0$, o $x = \frac{9}{2}$; el cruce ocurre en $(\frac{9}{2}, 0)$. Estos dos puntos se advierten en la figura 37. ☛ **30**

☛ **30.** Haga un bosquejo de la gráfica de la función $y = \dfrac{2x}{x + 1}$

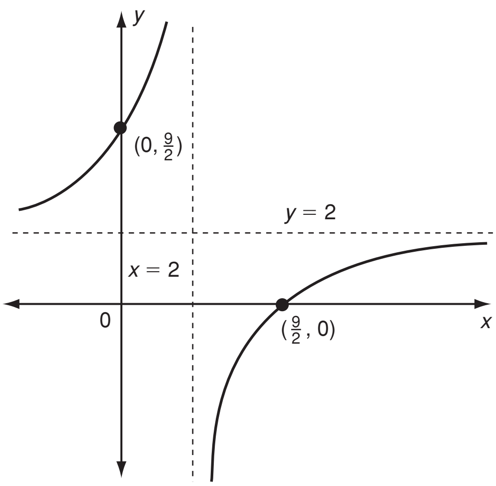


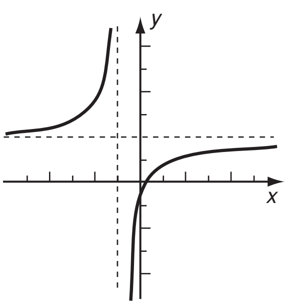
FIGURA 37

EJEMPLO 6 Para un fabricante, la función de costos para producir x millares de artículos por semana, en dólares, está dada por

$$C = 3000 + 2000x$$

Si $\overline{C}(x)$ denota el costo promedio por artículo, bosqueje la gráfica de $\overline{C}$ como una función de x.

Respuesta



Solución El número de artículos producidos es $1000x$, de modo que su costo promedio es

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{1000x} = \frac{3000 + 2000x}{1000x} = \frac{3}{x} + 2$$

Sólo estamos interesados en la región $x \geq 0$. Conforme $x \to 0$ por la derecha (por arriba), el primer término, $3/x$, se vuelve no acotado y positivo; esto es $\overline{C}(x) \to +\infty$ cuando $x \to 0^+$. Por tanto, la gráfica tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

Conforme x se vuelve grande, el término $3/x$ se aproxima a cero, de modo que $\overline{C}(x) \to 2$ cuando $x \to \infty$. Así la recta $\overline{C} = 2$ es una asíntota horizontal.

Diferenciando, obtenemos

$$\overline{C}'(x) = -\frac{3}{x^2} < 0 \qquad \text{para toda } x$$

$$\overline{C}''(x) = +\frac{6}{x^3} > 0 \qquad \text{para toda } x > 0$$

Por consiguiente $\overline{C}$ es una función decreciente para toda x y su gráfica es cóncava hacia arriba para toda $x > 0$.

La gráfica se muestra en la figura 38. Para ubicar mejor a la gráfica hemos calculado explícitamente dos puntos en ella, a saber, cuando $x = 1$, $\overline{C} = 5$ y cuando $x = 3$, $\overline{C} = 3$.

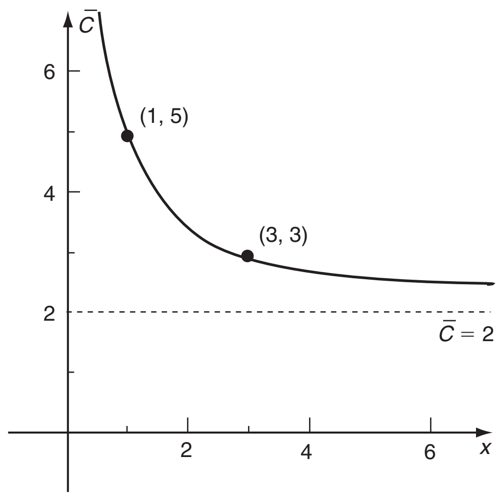


FIGURA 38

Resumen de los métodos para determinar asíntotas:

Supongamos que queremos las asíntotas de $y = f(x)$.

1. Asíntotas verticales. Determine los valores de x para los cuales el denominador de cualquier fracción que aparezca en $f(x)$ se haga cero pero que el numerador no se haga cero. Si a es uno de tales valores, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical.
2. Asíntotas horizontales. Determine $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Si estos límites existen y son iguales a b y c, respectivamente, entonces $y = b$ es una asíntota horizontal en $+\infty$ y $y = c$ es una asíntota horizontal en $-\infty$.

Observación Una función polinomial no tiene asíntotas verticales ni horizontales.

EJERCICIOS 13-7

(1-36) Evalúe, si existen, los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)$

2. $\lim_{x\to-\infty}\left(3+\frac{1}{3x^2}\right)$

3. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-3}$

4. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-5}{5x-2}$

5. $\lim_{x\to-\infty}\frac{5-2x}{3x+7}$

6. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3+2x}{2+3x}$

7. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+4}{x^2+1}$

8. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3}{3x^2-2}$

9. $\lim_{x\to-\infty}\frac{5+3x-2x^2}{3x^2+4}$

10. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x+7}}{\sqrt{x+1}}$

11. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+1}$

12. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^2}{4+x^3}$

13. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{3x+7}$

14. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2+3x^2}{x-2}$

15. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3-4x^2}{2+3x}$

16. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{(2x+3)^2}$

17. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+5}{(2x-3)^3}$

18. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(x^2+1)^3}$

19. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

20. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3-2x}}$

21. $\lim_{x\to\infty}\left(x-\frac{x^2}{x+1}\right)$

22. $\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{2x^2}{2x+3}\right)$

***23.** $\lim_{x\to\infty}\frac{|x+2|}{x+1}$

***24.** $\lim_{x\to-\infty}\frac{3+|x-2|}{2x+5}$

25. $\lim_{x\to\infty}(1+2e^{-x})$

26. $\lim_{x\to-\infty}(3+4e^{x})$

***27.** $\lim_{x\to\infty}\frac{2e^x+3}{3e^x-1}$

28. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^x+3}{3e^x+1}$

***29.** $\lim_{x\to-\infty}\frac{3e^{-x}+4}{2e^{-x}-1}$

30. $\lim_{x\to\infty}\frac{3e^{-x}+4}{2e^{-x}-1}$

31. $\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{2}{\ln x}\right)$

***32.** $\lim_{x\to\infty}\frac{3+\ln x}{2\ln x-1}$

***33.** $\lim_{x\to\infty}\frac{5-2\ln x}{2+3\ln x}$

34. $\lim_{x\to\infty}e^{-|x|}$

35. $\lim_{x\to-\infty}e^{-|x|}$

***36.** $\lim_{x\to\infty}\frac{2+3e^x}{3+2e^x}$

(37-46) Evalúe *a*) $\lim_{x\to c^+}f(x)$ y *b*) $\lim_{x\to c^-}f(x)$ en el caso de las siguientes funciones $f(x)$ y puntos c.

37. $f(x)=\frac{1}{x-2},\quad c=2$

38. $f(x)=\frac{1}{x+1},\quad c=-1$

39. $f(x)=\frac{1}{4-x^2},\quad c=2$

40. $f(x)=\frac{1}{4-x^2},\quad c=-2$

41. $f(x)=\frac{1}{x^2},\quad c=0$

42. $f(x)=\frac{x}{(x+1)^2},\quad c=-1$

43. $f(x)=\frac{x}{x+1},\quad c=-1$

44. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1},\quad c=-1$

45. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1},\quad c=1$

46. $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2},\quad c=2$

(47-66) Encuentre las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes curvas y dibuje sus gráficas.

47. $y=\frac{1}{x-1}$

48. $y=\frac{-2}{x+2}$

49. $y=\frac{x+1}{x-2}$

50. $y=\frac{x-2}{x+2}$

51. $y=\frac{2x+1}{x+1}$

52. $y=\frac{3x-6}{x-1}$

53. $y=\frac{x^2+1}{x^2}$

54. $y=\frac{x^2}{x^2+1}$

55. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

56. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

***57.** $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

***58.** $y = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 3x + 2}$

59. $y = \ln x$

60. $y = \ln |x|$

61. $y = -\ln x$

62. $y = 2 - \ln x$

63. $y = e^{-2x}$

64. $y = xe^{-x}$

***65.** $y = \frac{e^x}{x}$

***66.** $y = e^{|x|}$

67. *(Epidemias)* Durante una epidemia de influenza, el porcentaje de la población de Montreal que ha sido infectada en el tiempo t (medido en días desde el inicio de la epidemia) está dado por

$$p(t) = \frac{200t}{(t^2 + 100)}$$

Encuentre el tiempo en el cual $p(t)$ es máximo y dibuje la gráfica de $p(t)$.

68. *(Consumo de combustible)* Una empresa de camiones de carga encuentra que a una velocidad de v kilómetros por hora, sus camiones consumen combustible a razón de $(25 + 0.2v + 0.01\ v^2)$ litros por hora. Construya la función $C(v)$ que da el número de litros consumidos por kilómetro a una velocidad v. Haga la gráfica de la función y calcule la velocidad en la cual es mínima.

69. *(Producción petrolífera)* La razón de producir petróleo de un manto nuevo crece inicialmente y después disminuye conforme baja la reserva. En un caso particular la razón de producción está dada por $P(t) = 5000te^{-0.2t}$ barriles diarios, donde t está en años. Dibuje la gráfica de $P(t)$ como una función de t.

70. *(Clima)* La temperatura en Vancouver durante un día promedio de verano varía aproximadamente de acuerdo a la fórmula

$$T(t) = 24e^{-(1-t/8)^2} \qquad (0 \leq t \leq 16)$$

donde t es el tiempo en horas medido a partir de las 6 A.M. Dibuje la gráfica de esta función.

71. *(Dosificación de drogas)* La siguiente fórmula es utilizada algunas veces para calcular la dosis de una droga que se dará a un niño de edad t.

$$y(t) = \frac{Dt}{t + c}$$

donde D es la dosis de un adulto y $c > 0$ es una constante. ¿Cuáles son las asíntotas horizontales y verticales de esta función? Dibuje la gráfica en los siguientes dos casos:

a) $c = 10$ *b)* $c = 15$

72. *(Curva de transformación de productos)* (Véase p. 199) Una compañía automotriz puede usar su planta para fabricar tanto automóviles compactos como grandes o ambos. Si x y y son el número de automóviles compactos y grandes que se producen (en cientos por día), entonces la relación de transformación de producción es $xy + 2x + 3y = 6$. Exprese y como una función de x, encuentre las asíntotas horizontales y verticales y dibuje su gráfica.

(73-76) *(Funciones de costo promedio)* Para las funciones de costo siguientes $C(x)$, bosqueje las gráficas de las funciones de costo promedio correspondientes $\overline{C}(x) = C(x)/x$.

73. $C(x) = 2 + 3x$

74. $C(x) = 3 + x$

75. $C(x) = 2 + x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3$

76. $C(x) = 3 + 2x + \frac{1}{6}x^2$

***77.** *(Publicidad y utilidades)* Si una cantidad A (en miles de dólares) se gasta en publicidad por semana, una compañía descubre que su volumen de ventas semanal está dado por

$$x = 2000(1 - e^{-A})$$

Los artículos se venden con una utilidad de \$2 cada uno. Si P denota la utilidad neta (esto es, utilidad generada por las ventas menos costos de publicidad), exprese P como una función de A y bosqueje su gráfica.

***78.** *(Modelo logístico)* Bosqueje la gráfica de la función logística.

$$y = \frac{y_m}{1 + ce^{-t}} \quad (y_m,\ c > 0)$$

REPASO DEL CAPÍTULO 13

Términos, símbolos y conceptos importantes

13.1 Función creciente, función decreciente.

13.2 Máximo local, mínimo local, extremo local.
Valor máximo (o mínimo) local.
Punto crítico. Prueba de la primera derivada.

13.3 Cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo.

Punto de inflexión.
Prueba de la segunda derivada.

13.4 Procedimiento paso a paso para bosquejar las gráficas de funciones polinomiales.

13.5 Procedimiento paso a paso para traducir problemas de optimización planteados en forma verbal a problemas algebraicos.
Modelo de costo de inventario. Tamaño de lote económico (o cantidad a ordenar).

13.6 Valores máximo absoluto y mínimo absoluto de una función.

13.7 Límite en infinito; $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
Asíntota horizontal; la notación $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ o $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$
Procedimiento para hacer el bosquejo de gráficas con asíntotas.

Fórmulas

Prueba para la propiedad de que una función sea creciente o decreciente:

Si $f'(x) > 0$ [alternativamente, < 0] para toda x en un intervalo, entonces f es una función creciente [función decreciente] en ese intervalo.

Prueba de la primera derivada:

Sea $x = c$ un punto crítico de la función f. Entonces:

a) Si $f'(x) > 0$ para x justo antes de c y $f'(x) < 0$ para x justo después de c, entonces c es un máximo local de f.
b) Si $f'(x) < 0$ para x justo antes de c y $f'(x) > 0$ para x justo después de c, entonces c es un mínimo local de f.
c) Si $f'(x)$ tiene el mismo signo para x justo antes de c y para x justo después de c, entonces c no es un extremo local de f.

Prueba para la concavidad:

Si $f''(x) > 0$ [alternativamente, < 0] para toda x en un intervalo, entonces f es cóncava hacia arriba [cóncava hacia abajo] en ese intervalo.

Prueba de la segunda derivada:

Sea $x = c$ un punto crítico de la función f en el que $f'(c) = 0$ y $f''(c)$ existe. Entonces $x = c$ es un máximo local si $f''(c) < 0$ y un mínimo local si $f''(c) > 0$.

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 13

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) Si la función $f(x)$ es tal que $f'(x) > 0$ en (a, b), entonces $f(x)$ es creciente en el intervalo (a, b)

b) Si $f(x)$ es derivable en (a, b), entonces $f(x)$ es continua en (a, b)

c) Si $f(x)$ es continua en (a, b), entonces $f(x)$ es derivable en (a, b)

d) En un punto de inflexión, $f''(x) = 0$

e) Si en el punto $(x_0, f(x_0))$ se cumple que $f''(x_0) = 0$, entonces $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión

f) Cualquier función cuadrática sólo tiene un extremo absoluto

g) Una función cúbica siempre tiene un punto de inflexión

h) La tangente a la gráfica de una función derivable en un punto que es máximo o mínimo es horizontal

i) Una empresa opera en forma óptima si maximiza sus ingresos

j) "La publicidad siempre reditúa, y cuanto más publicidad se haga, mejor"

k) Cualquier función cúbica tiene a lo más dos extremos locales

l) Si $f'(x) \le 0$ para $x \in [a, b]$, entonces el valor máximo absoluto de $f(x)$ en este intervalo es $f(a)$

m) Un valor mínimo local de una función siempre es menor que un valor máximo local de la misma función

n) La tangente a la gráfica de una función en un punto de inflexión puede ser vertical

o) Si $f(x) \to -L$ cuando $x \to -\infty$, entonces se sigue que $f(x) \to L$ cuando $x \to +\infty$

p) Si $f(x) \to L$ cuando $x \to +\infty$, entonces se sigue que $f(x) \to L$ cuando $x \to -\infty$

q) La gráfica de una función puede cortar una asíntota horizontal, pero nunca puede cruzar una asíntota vertical

(2-7) Determine los valores de x en que las funciones siguientes son: *a*) crecientes; *b*) decrecientes; *c*) cóncavas hacia arriba; *d*) cóncavas hacia abajo. Bosqueje sus gráficas.

2. $y = 3x^2 - 12x + 5$ **3.** $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$

***4.** $y = x^2e^x$ **5.** $y = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3}$

6. $y = x^{1/3}$ **7.** $y = e^{-x^2/2}$

8. Si x unidades pueden venderse a un precio de $\$p$ cada una, con $4p + 7x = 480$, demuestre que el ingreso marginal nunca es creciente.

9. La ecuación de demanda de cierto artículo es $p = 100e^{-x/20}$. ¿En qué nivel de ventas x el ingreso será creciente?

10. La ecuación de demanda de cierto artículo es $p = 100e^{-x/20}$. ¿En qué nivel de ventas, x, el ingreso marginal será creciente?

11. La relación de demanda de un artículo está dada por $p = 100 - \ln(2x+1)$. Demuestre que la demanda marginal siempre es creciente.

12. La producción industrial, N, de cierto país t años después de 1930 se determinó que estaba dada mediante $N = 375/(1 + 215e^{-0.07t})$.

a) ¿Ha estado creciendo o decreciento la producción?

b) Mediante el uso de logaritmos, exprese t en términos de N.

(13-20) Determine los puntos críticos de las siguientes funciones y determine cuáles de ellos son máximos o mínimos locales.

13. $x^2 - 6x + 10$ **14.** $3x^4 + 2x^3 - 36x^2 + 54x - 50$

15. $x^3 - 2\ln(x)$ **16.** $40t^3 + 9t^2 - 12t - 8$

17. $t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 4$ ***18.** $3\sqrt{|x-2|}$

***19.** $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ **20.** $\dfrac{1}{x^2+1}$

21. Determine el valor de la constante k de modo que $f(x) = kx^2 + 6x - 2$ tenga:

a) un máximo local en $x = 3$

b) un mínimo local en $x = -1$

22. Determine las constantes a, b y c de modo que la función $x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un máximo en $x = -5$ y un mínimo en $x = 1$.

23. Determine las restricciones sobre las cosntantes a, b y c de forma tal que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un máximo local.

24. Determine las constantes a, b y c de modo que la función $x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un punto de inflexión en $x = -3$, un mínimo en $x = 0$ y que pase por el punto (1, 0).

25. Determine los extremos absolutos de $h(x) = x^2(x - 1)(2/3)$ en el intervalo $-1 \leq x \leq 3$.

26. Determine los extremos absolutos de $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ en el intervalo $1 \leq x \leq 3$.

***27.** Determine los extremos absolutos de $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ en el intervalo $1 \leq x \leq 5$.

28. *(Ingreso máximo)* Una compañía determina que su ingreso total se describe mediante la relación

$$R = 750{,}000 - x^2 + 1000x,$$

en donde R es el ingreso total y x es el número de artículos vendidos.

a) Encuentre el número de artículos vendidos que maximizan el ingreso total.

b) ¿Cuál es el monto de este ingreso total máximo?

c) Si se venden 1000 artículos, ¿cuál sería el ingreso total?

29. *(Ingreso máximo)* La función de demanda para cierto bien está dado por $p = 10e^{-x/6}$, para $0 \leq x \leq 10$, donde p es el precio por unidad y x el número de unidades pedidas.

a) Encuentre el número de artículos vendidos que maximizan el ingreso total.

b) ¿Cuál es el precio que produce el ingreso máximo?

c) ¿Cuál es el monto de este ingreso máximo?

30. *(Utilidad máxima)* Una compañía determinó que en la fabricación y venta del bien que produce, la relación de demanda está dada por $p + 0.002x = 5$, mientras que la función de costo es $C(x) = 3 + 1.1x$

a) Determine el nivel de producción que producirá la máxima utilidad.

b) ¿Cuál es la utilidad máxima?

31. *(Epidemia)* Durante cierta epidemia de influenza, la proporción de población baja en defensas que fue infectada, se denota por $y(t)$, donde t es el tiempo en semanas desde que se inició la epidemia. Se determinó que

$$y(t) = \frac{t}{4 + t^2}$$

a) ¿Cuál es la interpretación física de dy/dt.

b) ¿Para cuál valor de t es máxima y?

c) ¿Para cuáles valores de t es y creciente y para cuáles es decrecientes?

32. *(Diseño óptimo)* Una compañía se dedica a la fabricación de pequeñas cajas con base cuadrada y sin tapa. Si el material utilizado tiene un costo de 2 centavos por pulgada cuadrada, determine las dimensiones de la caja que minimizan el costo de material, si la capaciadad de las cajas debe ser igual a 108 pulgadas^2.

33. *(Diseño óptimo)* Con respecto al problema anterior, si el material para la base de la caja tiene un costo de 4 centavos por pulgada cuadrada, ahora, ¿cuáles son las dimensiones que minimizan el costo del material?

34. *(Utilidad máxima)* Una compañía determina que el costo total C, el ingreso total R y el número de unidades producidas x están relacionadas por

$$C = 100 + 0.015x^2 \text{ y } R = 3x$$

Determine la tasa de producción x que maximizaría las utilidades de la empresa. Determine dicha utilidad y la utilidad cuando $x = 120$.

35. *(Movimiento de un objeto)* Un objeto que se lanza directamente hacia arriba desde el suelo, sigue la trayectoria dada por

$$h = -4.9t^2 + 20t$$

donde h se mide en metros y t en segundos.

a) ¿Cuánto tiempo tarda el objeto en chocar con el suelo?

b) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza el objeto?

36. *(Ingreso máximo)* Para la ecuación de demanda

$$p = \sqrt{180 - \frac{x}{6}}$$

determine el número de unidades, x^*, que hace máximo el ingreso total e indique cuál es el ingreso máximo.

37. *(Geometría)* Determine el volumen máximo que puede tener un cilindro circular recto, si está inscrito en una esfera de radio r.

38. *(Geometría)* Determine las dimensiones de un cilindro circular recto, con mayor área de superficie, que puede inscribirse en una esfera de radio r.

39. Demuestre que el rectámgulo con perímetro máximo, que puede inscribirse en un círculo, es un cuadrado.

40. Demuestre que el rectángulo con un perímetro dado, el cuadrado es el de mayor área.

41. Demuestre que el rectángulo con una área dada, el cuadrado es el de menor perímetro.

42. *(Utilidad máxima)* Un fabricante de radiorreceptores observa que pueden venderse x aparatos por semana a p dólares cada uno, en donde $5x = 375 - 3p$. El costo de producción es $(500 + 13x + \frac{1}{5}x^2$ dólares. Determine el nivel de producción que máximiza la utilidad.

43. *(Tamaño de lote económico)* Sea Q la cantidad que minimiza el costo total T debido a la obtención y almacenamiento del material por cierto periodo. El material demandado es de 10,000 unidades por año; el precio al costo del material es de \$1 por unidad; el costo de volver a llenar la existencia de material por orden, sin importar el tamaño Q de la orden, es de \$25 y el costo de almacenar el material es del 12.5% del valor promedio de las existencias, $\frac{Q}{2}$.

a) Pruebe que $T = 10,000 + \dfrac{250,000}{Q} + \dfrac{Q}{16}$

b) Determine el tamaño del lote económico y el costo total T correspondiente a tal valor de Q.

c) Determine el costo total cuando cada orden se fija en 2500 unidades.

44. *(Asignación óptima de producción)* Un fabricante de calzado puede destinar su planta a producir zapatos para caballero o para dama. Si produce x y y miles de pares por semana, respectivamente, se sigue que x y y están relacionados por la ecuación de transformación de producción,

$$2x^2 + y^2 = 25$$

La utilidad del fabricante es de \$10 por cada par de zapatos para caballero y de \$8 por cada par de zapatos para dama. Determine cuántos pares de cada uno deberá producir a fin de maximizar sus utilidades semanales.

45. *(Impuesto y producción)* La demanda y la función de costo total de un monopolista son $p = 12 - 4x$ y $C(x) = 8x + x^2$. Si se grava con un impuesto t por unidad, encuentre:

a) La cantidad x y el precio p que corresponden a la utilidad máxima.

b) La utilidad máxima.

c) El impuesto, t, por unidad que maximiza el ingreso por impuestos del gobierno.

46. La función de producción de un bien está dada por $Q = 40F + 3F^2 - F^3/3$, donde Q es la producción total y F las unidades de materia prima.

a) Determine el número de unidades de materia prima que maximizan la producción.

b) Determine los valores máximos del producto marginal dQ/dF.

c) Verifique que cuando la producción Q/F es máxima, es igual a la producción marginal.

47. *(Tiempo de venta óptimo)* Una compañía cría pollos asaderos. Si los pollos se venden a los t meses, la utilidad de la venta de cada pollo es $P(t) = 0.2e^{0.06\sqrt{t}}$ dólares. El valor presente de esta utilidad es $P(t)e^{-0.01t}$, si la tasa de descuento nominal es 1% mensual. ¿A los cuántos meses deben venderse los pollos para maximizar ese valor presente?

48. *(Retención de memoria)* Un estudiante adquiere gran número de conocimientos durante el repaso para un examen. Al cabo de t semanas después del examen, el porcentaje de esos conocimientos que el estudiante es capaz de recordar está dado por

$$p(t) = \frac{180 + 20e^{0.5t}}{1 + e^{0.5t}}$$

Calcule $p(0)$, $p(2)$ y $\lim_{t\to\infty} p(t)$. Pruebe que $p'(t) < 0$ y que $p''(t) > 0$ para toda $t > 0$ y dibuje la gráfica de $p(t)$

49. *(Modelo de aprendizaje)* Cuando una tarea de repetición (por ejemplo soldar un circuito) se realiza cierto número de veces, la probabilidad de hacerlo correctamente crece. Un modelo usado algunas veces para esta probabilidad de éxitos es $p = \dfrac{AN}{N + B}$ donde A y B son constantes y N es el número de veces que se ha realizado la tarea. Interprete A al calcular $\lim_{t\to\infty} p$. Calcule dp/dN en $N = 0$.

50. *(Producción frutal máxima)* Cuando hay n árboles por acre, el promedio de duraznos por árbol es igual a $(840 - 6n)$ para una variedad particular de duraznos. ¿Qué valor de n da la producción máxima de duraznos por acre?

51. *(Contenido de humedad en el suelo)* En cierto lugar la concentración de agua en el suelo está dada en términos de la profundidad x mediante la fórmula

$$c(x) = 1 - e^{-x^2}$$

Determine la profundidad en la cual c crece más rápidamente.

52. *(Teoría de números)* Determine dos números positivos cuya suma sea 30, y tales que el producto de sus cuadrados sea máximo.

53. Determine dos números positivos cuya suma sea 60 y tales que el producto de uno por el cuadrado del segundo sea máximo.

(54-59) Determine las asíntotas horizontales y verticales de las funciones siguientes y haga un bosquejo de sus gráficas.

54. $y = \dfrac{x+1}{x-2}$

55. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

56. $y = \ln |x|$

57. $y = xe^{-x/10}$

***58.** $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$

59. $\dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$

60. *(Análisis del ingreso marginal)* Se da que una curva de demanda $p = f(x)$ es cóncava hacia arriba para todos los puntos, es decir, $f''(x) > 0$ para toda x. Demuestre que si $f^{(3)}(x) > 0$, o bien, $f^{(3)} < 0$ y numéricamente menor que $\dfrac{3f''(x)}{x}$, entonces la curva de ingreso marginal también es cóncava hacia arriba.

(61-66) Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones.

61. $y = x - \ln x$

62. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

63. $y = x^2 e^{-x}$

64. $y = e^{x - |x|}$

65. $y = \dfrac{e^{-|x|}}{x^2 + 1}$

66. $y = \dfrac{x}{\ln(x^2 + 1)}$

CASO DE ESTUDIO

OPTIMIZACIÓN DE COSTOS DE PRODUCCIÓN

Para el problema de minimizar el costo de producción de muebles de cómputo, cuya función de costos variable está dada por

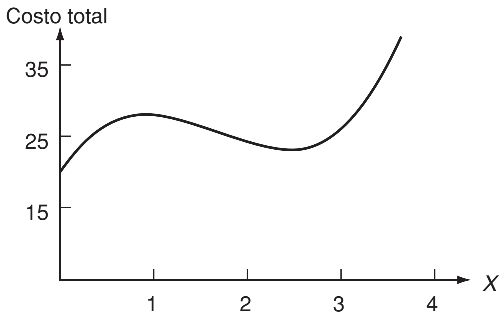
$$V(x) = 3x^3 - 15x^2 + 20x \text{ miles de dólares,}$$

y los costos fijos, son \$20,000, la función de costo total mensual es

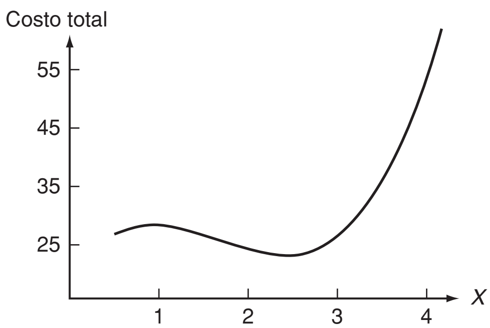
$$C(x) = 20 + 3x^3 - 15x^2 + 20x \text{ miles de dólares,}$$

donde x es el número de muebles, en cinetos, que se producen en un mes.

Mediante las técnicas que se estudiaron en este capítulo se construyó la siguiente gráfica



Como puede observarse en la gráfica el costo total mínimo se obtiene si no se producen escritorios, pero en este caso se tiene la restricción de tener que producir al menos 50 muebles, así que interesa analizar la gráfica a partir de $x = 0.5$, recuerde que las unidades son cientos



Ahora ya no es tan obvio cuál es el valor de x que minimiza el costo total. Pero, si se aplica el método para optimizar funciones que se analizó en este capítulo, se iniciaría obteniendo la derivada de la función $C(x)$ de la siguiente manera

$$\frac{dC(x)}{dx} = 9x^2 - 30x + 20$$

Ahora,

$$\frac{dC(x)}{dx} = 9x^2 - 30x + 20 = 0$$

implica que $x_1 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{3}$ o bien $x^2 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{3}$. Por otro lado,

$$\frac{d^2C(x)}{dx^2} = 18x - 30$$

así que,

$$\frac{d^2C(x_1)}{dx^2} < 0, \text{ mientras que } \frac{d^2C(x^2)}{dx^2} > 0$$

Por consiguiente, el punto $(x_1, C(x_1))$ es un punto máximo local y $(x_2, C(X_2))$ es un punto mínimo local. A continuación se presentan los valores de la función en los extremos del intervalo de interés, 0.5 y 4.5, junto con los valores de la función evaluados en x_1 y x_2

$$C(0.5) = 26.625$$
$$C\left(5 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right) \approx 28.041$$
$$C\left(5 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right) \approx 23.071$$
$$C(4.5) = 79.625$$

Así que el mínimo se alcanza en $x_2 \approx 2.4102$. Ahora bien, si se producen 241 muebles ($x = 2.41$) el costo es 23.071063 miles de dólares; mientras que si se producen 242 muebles el costo es 23.071464 miles de dólares, por lo que la decisión debe ser producir 241 muebles para tener un costo mínimo de \$23,071.06.

Pero, si de lo que se trata es de minimizar el costo unitario, entonces la función que se debe minimizar es

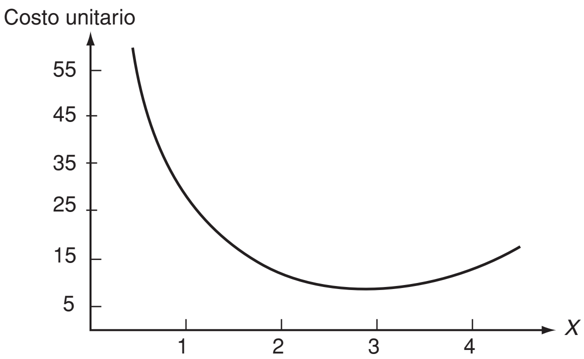
$$U(x) = \frac{C(x)}{x}$$

cuya gráfica es

Si se realizan los mismos pasos que en el caso anterior se encuentra que

$$\frac{dU(x_3)}{dx} = 0 \text{ y } \frac{d^2U(x_3)}{dx^2} > 0, \text{ con } x_3 \approx 2.89714$$

Así que (x_3, $C(x_3)$) es un punto minimo local, y en realidad en el intervalo (0.5, 4.5) es el valor mínimo absoluto, se pide al lector que justifique esta afirmación.



Como,

$$U(2.89) \approx 8.626715$$

y

$$U(2.90) \approx 8.626552,$$

se debe tomar la decisión de fabricar 290 muebles, con lo que el costo unitario sería de aproximadamente $86.26 por mueble producido, recuerde las unidades con la que se está trabajando.

¿Qué sucede si los costos fijos se reducen a $15,000? ¿Qué sucede si los costos fijos aumentan a $22,000? Repita el análisis anterior para estos dos casos.

CAPÍTULO 14

Más sobre derivadas

Curva de aprendizaje

Las aplicaciones de las matemáticas son tantas y tan variadas que surgen en lugares en las que uno menos imagina; por ejemplo, en ocasiones los sociólogos y psicólogos tienen que medir las habilidades que adquiere un individuo al efectuar una tarea rutinaria. La hipótesis es que esta habilidad mejora con la práctica, aunque surgen preguntas como: ¿Qué tanto mejora la habilidad? ¿Con qué rapidez está aprendiendo el individuo? Y muchas otras. Estudiosos del tema han desarrollado modelos para medir el rendimiento de un individuo con respecto al tiempo empleado para aprender la tarea. Uno de tales modelos está dado por la función

$$y(t) = A(1 - e^{-kt})$$

en donde

t es el tiempo de entrenamiento o capacitación,
$y(t)$ es una medida del rendimiento del individuo y
A y k son constantes por determinar.

La gráfica de $y(t)$ se conoce como *curva de aprendizaje.*

Considere que durante la capacitación de nuevo personal para una línea de ensamblado, se observó que, después de un día de práctica, un individuo puede fijar a la placa principal 10 circuitos en cinco minutos, es decir, $y(1) = 10$. Ésta es la medida de rendimiento del individuo. Ahora bien, la misma persona, después de dos días de práctica, puede fijar 15 circuitos en cinco minutos, esto es, $y(2) = 15$. Utilizando técnicas aprendidas en el capítulo 6, se determina que las constantes del modelo son: $A = 20$ y $k \approx 0.6931$. Con lo cual la función de aprendizaje para esta persona es:

$$y(t) = 20(1 - e^{-0.6931t})$$

En este caso, t se mide en días y $y(t)$ en número de circuitos que puede fijar la persona en cinco minutos.

a) ¿Cuál es la rapidez a la que aprende esta persona?
b) ¿Qué puede decir acerca de la rapidez de aprendizaje?
c) De acuerdo con la función, ¿cuánto mejorará del segundo al tercer día de capacitación?
d) A la larga, ¿cuántos circuitos podrá fijar esta persona en cinco minutos?

TEMARIO

■ 14-1 DIFERENCIALES

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable de la variable independiente x. Hasta ahora, hemos usado dy/dx para denotar la derivada de y con respecto a x y se manejó dy/dx como un solo símbolo. Ahora definiremos el nuevo concepto de *diferencial* de modo que dx y dy tengan significados separados; esto nos permitirá pensar en dy/dx ya sea como el símbolo para la derivada de y con respecto a x o como la razón de dy y dx.

DEFINICIÓN Sea $y = f(x)$ una función de x diferenciable. Entonces,

a) dx, la **diferencial de la variable independiente x**, no es otra cosa que un incremento arbitrario de x; esto es,

$$dx = \Delta x$$

b) dy, la **diferencial de la variable dependiente y**, es función de x y dx definida por

$$dy = f'(x)\,dx$$

La diferencial dy también se denota por df.

Los enunciados siguientes son evidentes por la definición anterior de diferenciales dx y dy.

1. Si $dx = 0$ se sigue que $dy = 0$
2. Si $dx \neq 0$, se deduce que la razón de dy dividida entre dx está dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)\,dx}{dx} = f'(x)$$

y así es igual a la derivada de y con respecto a x.

No hay nada extraño con respecto al último resultado, porque en forma deliberada se definió dy como el producto de $f'(x)$ y dx con el propósito que el resultado de la proposición 2 fuera válido.

EJEMPLO 1 Si $y = x^3 + 5x + 7$, determine dy.

☛ **1.** Para la función $y = 4x - 2x^2$, determine dy cuando $x = 2$ y cuando $x = -2$

Solución Sea $y = f(x)$ de modo que $f(x) = x^3 + 5x + 7$. Se sigue que $f'(x) = 3x^2 + 5$ y, por definición,

$$\underline{dy = f'(x)\,dx = (3x^2 + 5)\,dx} \quad ☛ \ \mathbf{1}$$

Debe observarse que dx (o Δx) es otra variable independiente y el valor de dy depende de las *dos* variables independientes x y dx.

Aunque $dx = \Delta x$, la diferencial dy de la variable dependiente no es igual al incremento Δy. Sin embargo, si dx es suficientemente pequeño dy y Δy son aproximadamente iguales una a la otra.

Respuesta $dy = -4dx$ cuando $x = 2$; $dy = 12dx$ cuando $x = -2$

EJEMPLO 2 Si $y = x^3 + 3x$, determine dy y Δy cuando $x = 2$ y $\Delta x = 0.01$.

Solución Si $y = f(x) = x^3 + 3x$, entonces,

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

Por consiguiente,

$$dy = f'(x)\,dx = (3x^2 + 3)\,dx$$

Cuando $x = 2$ y $dx = 0.01$ se sigue que $dy = (12 + 3)(0.01) = 0.15$.

Por definición,

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x)\\ &= f(2.01) - f(2)\\ &= [(2.01)^3 + 3(2.01)] - [2^3 + 3(2)]\\ &= [8.120601 + 6.03] - 14 = 0.150601\end{aligned}$$

☛ **2.** Para la función $y = x^2$, determine dy y Δy cuando $x = 3$ y cuando *a*) $\Delta x = 0.2$ *b*) $\Delta x = 0.05$

Así que, $dy = 0.15$ y $\Delta y = 0.150601$, lo que demuestra que la diferencial y el incremento de y no son exactamente iguales. ☛ **2**

Interpretación geométrica de diferenciales

Sea P el punto cuya abscisa es x en la gráfica de $y = f(x)$, y sea Q el punto en la gráfica cuya abscisa es $x + \Delta x$. El incremento Δy es la elevación desde P a Q, o la distancia vertical QR en la figura 1.

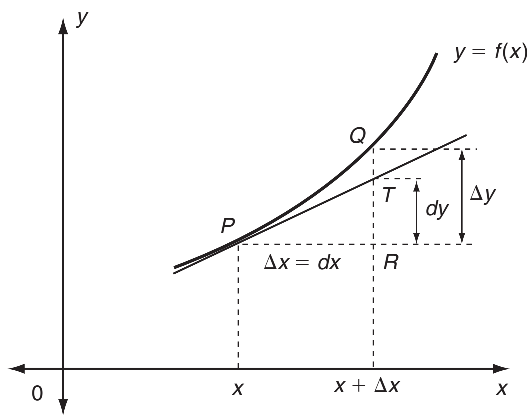


FIGURA 1

Sea T el punto con abscisa $x + \Delta x$ en la tangente en P a la gráfica (véase la figura 1). La pendiente de PT es la derivada $f'(x)$ y es igual a la elevación desde P hasta T dividida entre el desplazamiento:

Respuesta
a) $dy = 1.2$, $\Delta y = 1.24$
b) $dy = 0.3$, $\Delta y = 0.3025$

$$\text{Pendiente} = f'(x) = \frac{\text{Elevación de } P \text{ a } T}{\text{Desplazamiento de } P \text{ a } T} = \frac{TR}{PR} = \frac{TR}{\Delta x}$$

Por tanto, como $\Delta x = dx$, tenemos $TR = f'(x)\, dx = dy$. Así, la diferencial dy es igual a la elevación TR a lo largo de la recta tangente en P.

> Por tanto, las diferenciales dx y $dy = f'(x)\, dx$ son incrementos en x y y a lo largo de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

Refiriéndonos de nuevo a la figura 1, la diferencia entre Δy y dy es igual a la distancia QT entre el punto Q sobre la gráfica de $f(x)$ y el punto T sobre la tangente en P. Es claro que si hacemos que Δx se haga muy pequeño, de modo que Q se mueve a través de la curva hacia P, entonces, la distancia QT tiende rápidamente a cero. Debido a esto, podemos usar dy como una aproximación de Δy con tal de que Δx sea lo suficientemente pequeño:

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\, dx$$

En consecuencia, puesto que $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$,

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\, \Delta x}$$

Reemplazando x por a y Δx por h, tenemos la forma alterna siguiente:

> Si h es suficientemente pequeña, entonces $f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$ (1)

Esta aproximación es de utilidad porque a menudo es más sencillo calcular el lado derecho que evaluar $f(x + h)$, en particular si el cálculo tiene que hacerse para diferentes valores de h. La razón de esto es que el lado derecho es una función *lineal* de h. El siguiente ejemplo ilustra cómo esta aproximación puede utilizarse para reemplazar una función complicada por una función lineal.

EJEMPLO 3 Encuentre una aproximación a $\sqrt{16 + h}$ cuando h es pequeña.

Solución Se nos pide aproximar la función raíz cuadrada $\sqrt{x}$ cerca de $x = 16$. De modo que en la ecuación (1) hacemos $f(x) = \sqrt{x}$ con $a = 16$. El resultado es

$$f(16 + h) \approx f(16) + h\, f'(16) \tag{2}$$

Pero si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$. En particular,

$$f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8}$$

Sustituyendo $f(16) = 4$ y $f'(16) = \frac{1}{8}$ en la ecuación (2), obtenemos

$$f(16 + h) \approx 4 + \tfrac{1}{8}h$$

esto es,

$$\sqrt{16 + h} \approx 4 + \tfrac{1}{8}h$$

(Por ejemplo, tomando $h = 0.1$, encontramos que $\sqrt{16.1} \approx 4 + \frac{1}{8}(0.1) = 4.0125$

☛ **3.** Haciendo elecciones apropiadas de $f(x)$, a y h en la ecuación (1), determine valores aproximados de
a) $\sqrt{15}$ *b*) $\sqrt{26}$ *c*) $\sqrt[3]{26}$

Este valor es casi igual al valor exacto, que es 4.01248 hasta cinco cifras decimales). ☛ **3**

La utilidad de este tipo de aproximación es evidente en este ejemplo: es mucho más fácil realizar cálculos con la expresión aproximada $(4 + \frac{1}{8}h)$ que con $\sqrt{16 + h}$, porque *la aproximación es una función lineal* de h.

EJEMPLO 4 Una sección de terreno es un cuadrado con lados de una milla (5280 pies) de longitud. Si se remueve de cada lado una franja de 20 pies para destinarse a una carretera. ¿Cuánta área se pierde en esta sección?

Solución Si x denota la longitud de un lado, el área es

$$A = f(x) = x^2$$

Si el lado se modifica a $x + \Delta x$, el cambio en el área ΔA es dado en forma aproximada por la diferencial

$$\Delta A \approx f'(x)\,\Delta x = 2x\,\Delta x$$

En este ejemplo, $x = 5280$ pies y $\Delta x = -40$ pies (una franja de 20 pies removida de cada lado). Por tanto,

$$\Delta A \approx 2(5280)(-40) = -422{,}400$$

Así, la pérdida de área es aproximadamente igual a 422,400 pies cuadrados.

Modelos lineales

En la fórmula de aproximación (1), tomemos $a + h = x$. Entonces $h = x - a$ y obtenemos

$$f(x) \approx f(a) + (x - a)f'(a)$$

Pero aquí, el lado derecho es una función lineal de x. Si definimos $m = f'(a)$ y $b = f(a) - af'(a)$, entonces, la aproximación se convierte simplemente en $f(x) \approx mx + b$. Por tanto, hemos formulado el siguiente resultado importante:

> En un intervalo suficientemente pequeño de x, cualquier función diferenciable de x puede aproximarse por medio de una función lineal.

Respuesta *a*) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 16$, $h = -1$, $\sqrt{15} \approx 3.875$
b) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 25$, $h = 1$, $\sqrt{26} \approx 5.1$
c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 27$, $h = -1$, $\sqrt[3]{26} \approx 3 - \frac{1}{27} \approx 2.963$

Otra vez, con respecto a la figura 1, vemos que la base geométrica de este resultado es que, cerca del punto P, la gráfica de f es aproximadamente la misma que la recta tangente en P.

Usaremos a menudo este resultado al construir modelos matemáticos de fenómenos complejos. Supongamos que x y y son dos variables económicas que están relacionadas en alguna forma compleja y no comprendida del todo. Entonces, sin importar el grado de complejidad de la relación (con tal de que sea suave), podemos aproximarla por un modelo lineal $y = mx + b$ para ciertas constantes m y b, a condición de que el rango de variación de x se restrinja lo suficiente. Modelos lineales de esta clase se emplean con frecuencia en economía y en otras áreas como punto de partida en el análisis de fenómenos complejos. ☛ **4**

☛ **4.** Una compañía tiene una función exacta de costos dada por $C(x) = 25 + 11x - x^2$ El nivel de producción actual es $x = 3$. Encuentre un modelo lineal de costo que aproxime la función exacta de costo cuando x es cercana a 3.

Respuesta
$C(x) \approx C(3) + C'(3)(x - 3)$
$= 34 + 5x$

Errores

Las diferenciales se utilizan en la estimación de errores en las mediciones de cantidades. Sea x una variable cuyo valor se mide o estima con cierto error posible y sea $y = f(x)$ alguna otra variable que se calcula a partir del valor medido de x. Si el valor de x que se utiliza al calcular y es erróneo, entonces, por supuesto el valor calculado de y también será incorrecto.

Sea x el valor exacto de la variable medida y $x + dx$ el valor medido. Entonces, dx es ahora el **error** en esta variable. El valor exacto de la variable calculada es $y = f(x)$, pero el valor en realidad calculado es $f(x + dx)$. Así que el error en y es igual a $f(x + dx) - f(x)$. Si dx es pequeña, que puede por lo regular presumirse que es el caso, podemos aproximar el error en y mediante la diferencial dy. En consecuencia, llegamos al resultado de que el error en y está dado en forma aproximada por $dy = f'(x)\,dx$.

La razón dx/x se denomina el **error relativo** en x. En forma análoga, el error relativo en y es dy/y. Si el error relativo se multiplica por 100, obtenemos lo que se conoce como **error porcentual** de la variable correspondiente. A menudo el signo se ignora al establecer el error porcentual, de modo que podemos hablar de un error porcentual del 2% con lo que entenderemos un error de $\pm 2\%$. ☛ **5**

☛ **5.** Si x se midió con una error porcentual del 2%, ¿cuál es el porcentaje de error en y si
a) $y = x^2$ *b*) $y = \sqrt{x}$?

Respuesta *a*) 4% 1%

EJEMPLO 5 ***(Error en utilidades estimadas)*** Un gerente de ventas estima que su equipo venderá 10,000 unidades durante el próximo mes. Él cree que su estimación es precisa dentro de un error porcentual del 3%. Si la función de utilidad es

$$P(x) = x - (4 \times 10^{-5})x^2 \quad \text{(dólares por mes)}$$

(en donde x = número de unidades vendidas por mes), calcule el error porcentual máximo en la utilidad estimada.

Solución Si $x = 10{,}000$, la utilidad será

$$P = 10{,}000 - (4 \times 10^{-5})(10{,}000)^2 = 6000$$

El error porcentual máximo en el valor estimado de x es del 3%, de modo que el error máximo dx está dado por

$$dx = 3\% \text{ de } 10{,}000 = \tfrac{3}{100}(10{,}000) = 300$$

El error correspondiente en la utilidad está dado aproximadamente por

$$\begin{aligned} dP &= P'(x)\,dx \\ &= (1 - 8 \times 10^{-5}x)\,dx \\ &= [1 - 8 \times 10^{-5}(10{,}000)](300) \\ &= 0.2(300) = 60 \end{aligned}$$

☛ **6.** Vuelva a resolver el ejemplo 5, si la función de utilidad es $P(x) = -9000 + 2x - (6 \times 10^{-5})x^2$

Respuesta 4.8%

De modo que el error máximo en la utilidad estimada es de \$60. El error porcentual es, por tanto,

$$100\frac{dP}{P} = 100\ \frac{60}{6000} = 1$$

El error porcentual máximo en la utilidad es del 1% ☛ **6**

EJERCICIOS 14-1

(1-10) Calcule dy en el caso de las siguientes funciones.

1. $y = x^2 + 7x + 1$

2. $y = (t^2 + 1)^4$

3. $y = t \ln t$

4. $y = ue^{-u}$

5. $y = \ln (z^2 + 1)$

6. $y = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$

7. $y = \dfrac{e^u}{u + 1}$

8. $y = \dfrac{e^u + 1}{e^u - 1}$

9. $y = \sqrt{x^2 - 3x}$

10. $y = \sqrt{\ln x}$

11. Calcule dy si $y = x^2 - 1$ cuando $x = 1$

12. Determine dx si $x = \sqrt{t + 1}$ cuando $t = 3$

13. Calcule dt si $t = \ln (1 + y^2)$ cuando $y = 0$

14. Encuentre du para $u = e^{0.5 \ln(1 - t^2)}$ cuando $t = \frac{1}{2}$

15. Determine dy si $y = x^3$ cuando $x = 2$ y $dx = 0.01$

16. Calcule du si $u = t^2 + 3t + 1$ cuando $t = -1$ y $dt = 0.02$

17. Determine dx si $x = y \ln y$ para $y = 1$ y $dy = 0.003$

18. Encuentre df para $f(x) = xe^x$ si $x = 0$ y $dx = -0.01$

(19-22) Determine dy y Δy para las siguientes funciones.

19. $y = 3x^2 + 5$ si $x = 2$ y $dx = 0.01$

20. $y = \sqrt{t}$ si $t = 4$ y $dt = 0.41$

21. $y = \ln u$ si $u = 3$ y $du = 0.06$

22. $y = \sqrt{x + 2}$ si $x = 2$ y $dx = 0.84$

23. Mediante diferenciales aproxime la raíz cúbica de 9

24. Por medio de diferenciales aproxime la raíz cuarta de 17

25. Usando diferenciales aproxime la raíz quinta de 31

26. Mediante diferenciales aproxime el valor de $(4.01)^3 + \sqrt{4.01}$

27. *(Errores)* El radio de una esfera es igual a 8 centímetros, con un error posible de ± 0.002 centímetros. El volumen se calcula suponiendo que el radio es de exactamente 8 centímetros. Usando diferenciales estime el error máximo en el volumen calculado.

28. *(Error porcentual)* Si el volumen de una esfera se determina dentro de un error porcentual que no excede al 2%, ¿cuál es el máximo error porcentual permisible en el valor medido del radio?

29. *(Error porcentual)* Un fabricante estima que las ventas serán de 400 unidades por semana con un error porcentual posible del 5%. Si la función de ingreso es $R(x) = 10x - 0.01x^2$, encuentre el máximo error porcentual en el ingreso estimado.

30. *(Error porcentual)* La función de costo del fabricante del ejercicio 29 es $C(x) = 1000 + x$.

a) Calcule el error porcentual máximo en los costos estimados.

b) Determine el error porcentual máximo en la utilidad estimada.

31. *(Precio aproximado)* La ecuación de demanda de cierto producto es $p = 100/\sqrt{x + 100}$. Mediante diferenciales encuentre el precio aproximado en que se demandan 2500 unidades.

32. *(Costo aproximado)* La función de costo de cierto fabricante es $C(x) = 400 + 2x + 0.1x^{3/2}$. Usando diferenciales, estime el cambio en el costo si el nivel de producción se incrementó de 100 a 110.

33. *(Modelo de costo de inventarios)* En el modelo de costo de inventarios (véase la sección 13-5), sea D la demanda anual total, s el costo de almacenamiento por unidad por año, a el costo de preparación de cada serie de producción y b el costo de producción por artículo. Se sigue que el costo óptimo del lote por serie de producción está dado por $x = \sqrt{2aD/s}$. El costo mínimo por año de producir los artículos es $C = bD + \sqrt{2aDs}$. Si $D = 10{,}000$, $s = 0.2$, $a = 10$ y $b = 0.1$, evalúe x y C. Mediante diferenciales estime los errores en x y C si el valor exacto de s es 0.22.

34. *(Medidas físicas)* La aceleración debida a la gravedad g, se determina midiendo el periodo de balanceo de un péndulo. Si la longitud del péndulo es l y la medida de un periodo es T, entonces g está dada por la fórmula

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

Encuentre el error porcentual en g si:

a) l está medida con exactitud pero T tiene un error de 1%

b) T está medida con exactitud pero l tiene un error de 2%

35. *(Modelo lineal de costos)* Actualmente una compañía produce 200 unidades diarias y sus costos diarios son \$5000. Si el costo marginal es \$20 por unidad, obtenga un modelo lineal de costos que aproxime a la función de costo $C(x)$ para x cercano a 200.

36. *(Modelo lineal de ingresos)* Actualmente una compañía produce 1500 unidades mensuales y vende todas las unidades que produce. Su ingreso mensual es \$30,000. Si el ingreso marginal actual es \$180, obtenga una fórmula lineal que aproxime la función de ingreso $R(x)$ para x cercana a 1500.

37. *(Modelo lineal de utilidad)* Actualmente una compañía produce 50 unidades semanales y su utilidad semanal es \$2000. Si la utilidad marginal actual es \$15, obtenga una fórmula lineal que aproxime a la función de utilidad semanal $P(x)$ para x cercana a 50.

38. *(Modelo lineal de costo)* El costo mensual de producir x unidades de su producto, para cierta compañía, está dado por $C(x) = 2000 + 16x - 0.001x^2$. Actualmente la compañía está produciendo 3000 unidades mensuales. Obtenga un modelo lineal de costo que aproxime la función de costo mensual $C(x)$ para x cercana a 3000.

39. *(Modelo lineal de ingresos)* La función de demanda semanal de cierto producto es $p = 50 - 0.2x$. Actualmente, la demanda es de 200 unidades semanales. Obtenga una fórmula lineal que aproxime la función semanal de ingreso $R(x)$ para x cercana a 200.

40. *(Modelo lineal de utilidad)* La función de demanda diaria del producto de una compañía es $p = 45 - 0.03x$. El costo de producir x unidades diarias está dada por $C(x) = 1500 + 5x - 0.01x^2$. La compañía actualmente está produciendo 500 unidades diarias. Obtenga una fórmula lineal que aproxime la función de utilidad diaria $P(x)$ para x cercana a 500.

■ 14-2 DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA

Como se expuso en la sección 5-5, una relación entre dos variables algunas veces se expresa por medio de una relación implícita más que mediante una función explícita. Así, en vez de tener y dada como una función $f(x)$ de la variable independiente x, es posible tener a x y y relacionadas a través de una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$, en que ambas variables aparecen como argumentos de alguna función F. Por ejemplo, la ecuación

$$F(x, y) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + y^3 - 1 = 0$$

expresa cierta relación entre x y y, pero y no está dada explícitamente en términos de x.

El asunto que deseamos considerar en esta sección es cómo calcular la derivada dy/dx cuando x y y están relacionadas por una ecuación implícita. En ciertos casos, es posible resolver la ecuación implícita $F(x, y) = 0$ y obtener y en forma explícita en términos de x. En tales casos, las técnicas estándar de derivación permiten calcular la derivada en la forma ordinaria. Sin embargo, en muchos ejemplos no es posible obtener la función explícita; con la finalidad de cubrir tales situaciones, es necesario usar una nueva técnica que se conoce como **diferenciación implícita**.

Al usar esta técnica, *derivamos cada término en la relación implícita dada con respecto a la variable independiente.* Esto requiere derivar expresiones que contienen a y con respecto a x, y con el objetivo de hacerlo, utilizamos la regla de la cadena. Por ejemplo, supongamos que deseamos derivar y^3 o $\ln y$ con respecto a x. Escribimos lo siguiente:

$$\frac{d}{dx}(y^3) = \frac{d}{dy}(y^3) \cdot \frac{dy}{dx} = 3y^2 \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dy}(\ln y)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

En general,

$$\frac{d}{dx}(f(y)) = f'(y)\frac{dy}{dx}$$ ☛ **7**

☛ **7.** Encuentre *a)* $\frac{d}{dx}(\sqrt{y})$ *b)* $\frac{d}{dx}(e^y)$ *c)* $\frac{d}{dy}(x^4)$

Respuesta *a)* $\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}$ *b)* $e^y\frac{dy}{dx}$ *c)* $4x^3\frac{dx}{dy}$

EJEMPLO 1 Calcule dy/dx si $x^2 + y^2 = 4$

Solución Derive cada término con respecto a x.

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}(4) = 0$$

Ponemos juntos todos los resultados y despejamos dy/dx

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0, \qquad 2y\frac{dy}{dx} = -2x, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Comprobación Verificamos este resultado usando una de las funciones explícitas asociada con la relación implícita $x^2 + y^2 = 4$, es decir*

$$y = \sqrt{4 - x^2} = (4 - x^2)^{1/2}$$

Usando la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(4 - x^2)^{1/2-1} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{x}{y}$$

que es el mismo resultado que se obtuvo en el ejemplo 1 ☛ **8**

☛ **8.** Tome la otra función explícita asociada con $x^2 + y^2 = 4$, es decir, $y = -\sqrt{4 - x^2}$, y verifique que aún es cierto que $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$

EJEMPLO 2 Calcule dy/dx si $xy + \ln(xy^2) = 7$

Solución En primer término simplificamos el logaritmo: $\ln(xy^2) = \ln x + 2\ln y$. Luego, la relación adopta la forma

$$xy + \ln x + 2\ln y = 7$$

*Recordemos que $\sqrt{a}$ o $a^{1/2}$ denota la raíz cuadrada positiva de a. (Véase la página 24).

Derivando con respecto a x, resulta

$$\frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(\ln x) + 2\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(7) = 0$$

Por la regla del producto,

$$\frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}(x) \cdot y + x\frac{d}{dx}(y) = 1 \cdot y + x\frac{dy}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$$

Asimismo,

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{\mathrm{x}} \qquad \text{y también} \qquad \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dy}(\ln y) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

En consecuencia,

$$\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{1}{x} + \frac{2}{y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Agrupamos todos los términos que contengan derivadas en el lado izquierdo y pasamos los demás términos a la derecha y despejamos dy/dx.

$$\left(x + \frac{2}{y}\right)\frac{dy}{dx} = -\left(y + \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y + 1/x}{x + 2/y} = -\frac{y(xy + 1)}{x(xy + 2)} \quad ☛ \mathbf{9}$$

☛ **9.** Encuentre $\frac{dy}{dx}$ si

a) $2x^2 - 3y^2 = 2$
b) $x^2 + 4xy + y^2 = 1$

EJEMPLO 3 Determine la ecuación de la línea tangente en el punto $(2, -\frac{1}{2})$ a la gráfica de la relación implícita

$$xy^2 - x^2y + y - x = 0$$

Solución La pendiente de la línea tangente es igual a la derivada dy/dx evaluada en $x = 2$ y $y = -\frac{1}{2}$. Derivando la relación implícita completa con respecto a x, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(xy^2) - \frac{d}{dx}(x^2y) + \frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

Los primeros dos términos deben evaluarse usando la regla del producto. Así, resulta

$$\left(y^2 \cdot 1 + x \cdot 2y\frac{dy}{dx}\right) - \left(x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot 2x\right) + \frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

de modo que $(2xy - x^2 + 1)(dy/dx) = 2xy - y^2 + 1$. En consecuencia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y^2 + 1}{2xy - x^2 + 1}$$

Haciendo $x = 2$ y $y = -\frac{1}{2}$, obtenemos la pendiente de la línea tangente en el punto requerido

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(2)(-\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2})^2 + 1}{2(2)(-\frac{1}{2}) - (2)^2 + 1} = \frac{1}{4}$$

Respuesta *a*) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y}$
b) $\frac{dy}{dx} = \frac{-(x + 2y)}{2x + y}$

La ecuación de la línea tangente se obtiene a partir de la fórmula punto-pendiente:

☛ **10.** Determine la ecuación de la recta tangente en el punto (2, 1) en la gráfica de la relación $x^3 + y^3 = 9$

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$
$$y - (-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}\,(x - 2)$$
$$y = \tfrac{1}{4}x - 1 \qquad ☛\ \mathbf{10}$$

Cuando evaluamos dy/dx en una relación implícita $F(x, y) = 0$, suponemos que x es la variable independiente y y la dependiente. Sin embargo, dada la relación implícita $F(x, y) = 0$, pudimos en vez de ello considerar y como la variable independiente con x una función de y. En tal caso, deberíamos evaluar la derivada dx/dy.

EJEMPLO 4 Dada $x^2 + y^2 = 4xy$, calcule dx/dy.

Solución Aquí x es una función implícita de y. Derivamos ambos lados con respecto a y.

$$\frac{d}{dy}(x^2) + \frac{d}{dy}(y^2) = 4\frac{d}{dy}(xy)$$

$$2x\frac{dx}{dy} + 2y = 4\left(x \cdot 1 + y\frac{dx}{dy}\right)$$

$$2\frac{dx}{dy}(x - 2y) = 2(2x - y)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

Considere la relación implícita $x^2 + y^2 = 4$. La gráfica de esta relación es un círculo de radio 2 y centro en (0, 0) como se muestra en la figura 2. En el ejemplo 1, calculamos que $dy/dx = -x/y$. Si $dy/dx = 0$, entonces, $-x/y, = 0$ o $x = 0$. Cuando $x = 0$, $y = \pm 2$. Así en esos puntos $(0, \pm 2)$, la pendiente dy/dx de la recta tangente al círculo es cero y entonces la recta tangente es horizontal.

Si en el ejemplo 1 tomamos a y como la variable independiente y diferenciamos respecto a y en lugar de x, encontramos el resultado

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$$

Si $dx/dy = 0$ entonces $-y/x = 0$ o $y = 0$. Cuando $y = 0$, $x = \pm 2$. Así en los puntos $(\pm 2, 0)$ tenemos que $dx/dy = 0$. Pero en esos puntos las rectas tangentes son verticales, como se muestra en la figura. Se puede generalizar este resultado de la siguiente manera:

1. Si $dy/dx = 0$ en un punto, entonces la recta tangente es **horizontal** en ese punto.
2. Si $dx/dy = 0$ en un punto, entonces la recta tangente es **vertical** en ese punto.

Respuesta $y = -4x + 9$

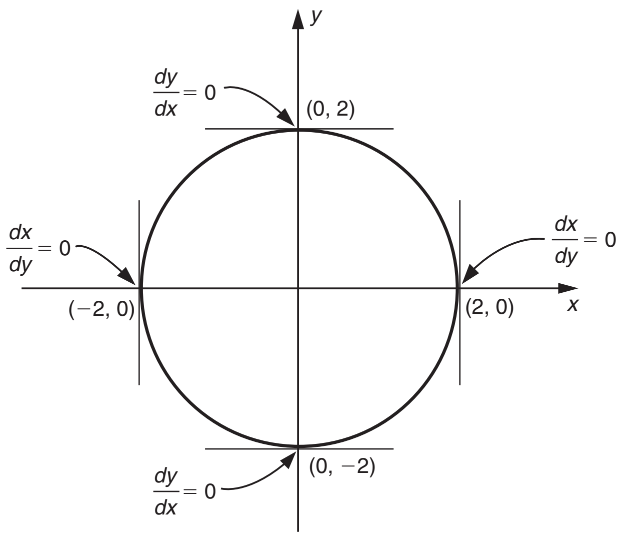


FIGURA 2

EJEMPLO 5 Encuentre los puntos de la curva $4x^2 + 9y^2 = 36y$ donde la recta tangente sea: *a*) horizontal; *b*) vertical.

Solución Tenemos

$$4x^2 + 9y^2 = 36y \tag{i}$$

a) Derivando ambos lados de la igualdad respecto a x, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(4x^2) + \frac{d}{dx}(9y^2) = \frac{d}{dx}(36y)$$

$$8x + 18y\,\frac{dy}{dx} = 36\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8x}{18y - 36} = \frac{-4x}{9(y - 2)}$$

Para que la recta tangente sea horizontal, tenemos que $dy/dx = 0$, lo cual da $x = 0$. Cuando $x = 0$ la relación (i) da $0 + 9y^2 = 36y$ así que $y = 0$ o 4. Por tanto, los dos puntos en la curva donde la recta tangente es horizontal son (0, 0) y (0, 4)

b) Si en cambio diferenciamos (i) con respecto a y, encontramos el resultado

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-9(y - 2)}{4x}$$

Haciendo $dx/dy = 0$, para determinar las tangentes verticales, obtenemos $y = 2$

☛ **11.** Determine los puntos en la gráfica de $x^2 - xy + 4y^2 = 15$ en donde la tangente sea *a*) horizontal *b*) vertical.

Poniendo $y = 2$ en (i), encontramos $x = \pm 3$. Así las rectas tangentes son verticales en los puntos (3, 2) y (−3, 2). ☛ **11**

Probablemente no dejó de notar que en el último ejemplo, dx/dy y dy/dx fueron recíprocos uno del otro. Esta propiedad generalmente es cierta:*

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}}$$

En otras palabras, *la derivada de la inversa de una función* f *es el recíproco de la derivada de* f. Utilizando esta propiedad, podemos reducir mucho el trabajo de la parte *b*) del ejemplo 5, una vez que hemos encontrado dy/dx en la parte *a*).

Las derivadas de orden superior también pueden calcularse a partir de una relación implícita. El método consiste en determinar primero la primera derivada de la manera esbozada anteriormente y después diferenciar la expresión resultante con respecto a la variable independiente.

EJEMPLO 6 Calcule d^2y/dx^2 si $x^3 + y^3 = 3x + 3y$

Solución En esta situación, x es la variable independiente, ya que se nos pide calcular derivadas con respecto a x. De modo que, derivando implícitamente con respecto a x, obtenemos

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3 + 3\frac{dy}{dx}$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 1}{1 - y^2}$$

Derivamos de nuevo con respecto a x y usamos la regla del cociente.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 - 1}{1 - y^2}\right)$$

$$= \frac{(1 - y^2)(d/dx)(x^2 - 1) - (x^2 - 1)(d/dx)(1 - y^2)}{(1 - y^2)^2}$$

*Por definición

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \left[\lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]^{-1} = \left[\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]^{-1} = \left[\frac{dy}{dx}\right]^{-1}$$

En el segundo paso utilizamos el teorema de límites 2(b) de la sección 11-2.

Respuesta *a*) (1, 2) y (−1, −2) *b*) $(4, \frac{1}{2})$ y $(-4, -\frac{1}{2})$

☛ **12.** Una forma alterna para determinar y'' es utilizar dos veces la diferenciación implícita. En el ejemplo 6, ya obtuvimos que $x^2 + y^2y' = 1 + y'$. Escriba el resultado de diferenciar con respecto a x esto otra vez. De ahí calcular y''.

Respuesta $2x + (2yy' \cdot y' + y^2y'') = 0 + y''$

o $y'' = \dfrac{2[x + y(y')^2]}{1 - y^2}$

El resultado final es el mismo que antes.

$$= \frac{2x(1 - y^2) + 2y(x^2 - 1)\,[-2y\,(dy/dx)]}{(1 - y^2)^2}$$

En esta etapa, observamos que la expresión para la segunda derivada aún incluye a la primera derivada. De aquí que, para completar la solución, debemos sustituir $dy/dx = (x^2 - 1)/(1 - y^2)$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x(1 - y^2) + 2y(x^2 - 1)[(x^2 - 1)/(1 - y^2)]}{(1 - y^2)^2}$$

$$= \frac{2x(1 - y^2)^2 + 2y(x^2 - 1)^2}{(1 - y^2)^3}$$

En el último paso, multiplicamos el numerador y el denominador de la fracción por $1 - y^2$ ☛ **12**

EJERCICIOS 14-2

(1-14) Calcule en cada caso dy/dx

1. $x^2 + y^2 + 2y = 15$

2. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

3. $x^3 + y^3 = a^3$ (a es constante)

4. $x^2 - xy + y^2 = 3$

5. $(y - x)(y + 2x) - 12 = 0$

6. $x^4 + y^4 = 2x^2y^2 + 3$

7. $xy^2 + yx^2 = 6$

8. $x^2y^2 + x^2 + y^2 = 3$

9. $x^5 + y^5 = 5xy$

10. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (a; b son constantes)

11. $xy + e^y = 1$

12. $\dfrac{x}{y} + \ln\left(\dfrac{y}{x}\right) = 6$

13. $xy + \ln(xy) = -1$

14. $x^2 + y^2 = 4e^{x+y}$

15. Encuentre dx/dt si $3x^2 + 5t^2 = 15$

16. Encuentre du/dy si $u^2 + y^2 + u - y = 1$

17. Encuentre dx/dy si $x^3 + y^3 = xy$

18. Encuentre dt/dx si $x^3 + t^3 + x^3t^3 = 9$

(19-22) Determine la ecuación de la tangente a las curvas siguientes en los puntos dados.

19. $x^3 + y^3 - 3xy = 3$; $(1, 2)$

20. $x^2 + y^2 = 2x + y + 15$; $(-3, 1)$

21. $\dfrac{2y}{x} - \dfrac{x}{y} = 1$ en $(2, -1)$

22. $(x - y)(x + 2y) = 4$ en $(2, 1)$

(23-26) Encuentre los puntos en los que cada curva tiene:

a) Una tangente horizontal.

b) Una tangente vertical.

23. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$

24. $9x^2 - 4y^2 = 36$

25. $x^2 + y^2 = xy + 12$

26. $x^2 + 3y^2 = 2xy + 48$

27. Calcule d^2y/dx^2 si $x^2 + y^2 = 4xy$

28. Determine d^2u/dt^2 cuando $u = 1$ y $t = -1$ si $u^5 + t^5 = 5ut + 5$

29. Encuentre d^2x/dy^2 si $x = 2$ y $y = 1$ cuando $x^3 + y^3 - 3xy = 3$

30. Encuentre d^2y/dx^2 si $(x + 2)(y + 3) = 7$

31. Encuentre d^2x/dy^2 si $x + y + \ln(xy) = 2$

32. Encuentre d^2y/dx^2 si $x^2 + y^2 + e^{3y} = 4$

(33-36) Determine dy para las relaciones implícitas siguientes.

33. $xy + y^2 = 3$

34. $y^2 + z^2 - 4yz = 1$

35. $\ln(yz) = y + z$

36. $xe^y + ye^x = 1$

(37-40) Calcule la tasa de cambio de x con respecto a p para las siguientes relaciones de demanda.

37. $p = \sqrt{100 - 9x^2}$

38. $p = \dfrac{500}{x^3 + 4}$

39. $2pe^x = 3e^{x/2} - 7p$

40. $7x + x \ln(p + 1) = 2$

41. *(Precio y utilidad)* La relación entre el precio p al cual es vendido su producto y la utilidad P de una empresa es $P = 6p - p^2$. Exprese esta relación como una función explícita $p = f(P)$. Evalúe las derivadas dP/dp y dp/dP y pruebe que son recíprocas una de la otra.

42. *(Función de transformación de un producto)* Una fábrica puede hacer x miles de pares de zapatos para hombre y y miles de pares para mujer semanalmente, donde x y y están relacionados por

$$2x^3 + y^3 + 5x + 4y = \text{constante}$$

Actualmente la fábrica está haciendo 2000 pares de zapatos para hombre y 5000 pares para mujer semanalmente. Calcule dy/dx para los niveles de producción actual. ¿Qué significa esto?

43. *(Modelo de presa-depredador)* Sean x y y los tamaños de dos poblaciones una de las cuales es víctima de la otra. En cualquier tiempo x y y satisfacen la relación implícita

$$(x + ty - h)^2 + (y - tx - k)^2 = a^2$$

donde a, h, k y t son ciertas constantes. Calcule dy/dx.

44. *(Fisiología)* De acuerdo a A.V. Hill la relación entre la carga F actuando en un músculo y la velocidad V de contracción o acortamiento del músculo está dada por

$$(F + a)V = (F_0 - F)b$$

donde a, b, F_0 son constantes que dependen de la especie particular y tipo de músculo. Pruebe que la velocidad V se aproxima a cero cuando $F \to F_0$ así que F_0 representa la carga máxima bajo la cual el músculo se contrae. Encuentre dV/dF y dF/dV. Pruebe que cada una de estas derivadas es recíproca de la otra.

***45.** Escribiendo $y = x^{p/q}$ en la forma $y^q - x^p = 0$, mediante diferenciación implícita pruebe que $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$ cuando n es un número racional p/q.

■ 14-3 DIFERENCIACIÓN LOGARÍTMICA Y ELASTICIDAD

Con cierto tipo de funciones, puede utilizarse una técnica conocida como *diferenciación logarítmica* con el propósito de facilitar el cálculo de la derivada. Una situación en que esta técnica puede aplicarse ocurre cuando la función dada consiste del producto o cociente de varios factores, en donde cada factor puede estar elevados a alguna potencia. Este método quizá sea mejor explicado a través de un ejemplo.

EJEMPLO 1 Calcule dy/dx si

$$y = \frac{(x + 1)\sqrt{x^2 - 2}}{(x^2 + 1)^{1/3}}$$

Solución Podríamos derivar esta función usando las reglas del producto y el cociente. Sin embargo, aplicamos logaritmo natural en ambos lados. Luego, usando las propiedades de logaritmos, procedemos de la siguiente manera:

$$\ln y = \ln\left[\frac{(x + 1)\sqrt{x^2 - 2}}{(x^2 + 1)^{1/3}}\right]$$

$$= \ln(x + 1) + \ln\sqrt{x^2 - 2} - \ln(x^2 + 1)^{1/3}$$

$$= \ln(x + 1) + \tfrac{1}{2}\ln(x^2 - 2) - \tfrac{1}{3}\ln(x^2 + 1)$$

Ahora, derivamos ambos lados con respecto a x. Usamos la regla de la cadena de la manera ordinaria, así como diferenciación implícita.

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dy}(\ln y)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

Después de derivar los términos de la derecha, encontramos que

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x^2-2)}\cdot 2x - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x$$

Enseguida simplificamos y multiplicamos por y.

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2-2} - \frac{2x}{3(x^2+1)}\right]$$

Podemos, si lo deseamos, sustituir $y = [(x+1)\sqrt{x^2-2}]/(x^2+1)^{1/3}$ en esta expresión para obtener dy/dx sólo en términos de x. ☛ **13**

☛ **13.** Utilice la diferenciación logarítmica para encontrar $\frac{dy}{dx}$ para las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

b) $y = (x+1)2^x$

Otra situación en que la derivación logarítmica es de utilidad surge cuando debemos derivar una función elevada a una potencia que es otra función.* Daremos dos ejemplos, el primero elemental y el segundo más complicado.

EJEMPLO 2 Calcule dy/dx si $y = x^x (x > 0)$.

Solución Antes que nada, observemos que esta derivada puede encontrarse usando las técnicas ordinarias de diferenciación si primero escribimos y en la forma

$$y = x^x = e^{x \ln x}$$

La regla de la cadena combinada con la regla del producto nos permite determinar dy/dx. Sin embargo, el método de diferenciación logarítmica puede emplearse como una alternativa. Aplicando logaritmos en ambos lados,

$$\ln y = \ln(x^x) = x \ln x$$

Después, derivamos con respecto a x y usamos la regla del producto en el lado derecho.

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = (1)\ln x + x\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln x + 1$$

En consecuencia,

$$\frac{dy}{dx} = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

*Una función del tipo $[f(x)]^{g(x)}$ generalmente sólo está definida si $f(x) > 0$, y esta restricción se supone en los ejemplos que siguen.

Respuesta

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{y}{x^2-1}$

b) $\frac{dy}{dx} = y\left(\ln 2 + \frac{1}{x+1}\right)$

EJEMPLO 3 Calcule dy/dx si

$$y = (x^2 + 1)^{\sqrt{x^3-1}}$$

Solución Otra vez, el cálculo se simplifica en forma considerable si aplicamos logaritmos antes de derivar.

$$\ln y = \ln\left[(x^2 + 1)^{\sqrt{x^3-1}}\right] = \sqrt{x^3 - 1}\ \ln(x^2 + 1)$$

Podemos derivar con respecto a x (mediante la regla del producto en el lado derecho).

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}\sqrt{x^3 - 1} \cdot \ln(x^2 + 1) + \sqrt{x^3 - 1}\ \frac{d}{dx}\ln(x^2 + 1)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x^3 - 1)^{-1/2}(3x^2) \cdot \ln(x^2 + 1) + \sqrt{x^3 - 1}\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)2x$$

☛ **14.** Utilice diferenciación logarítmica para determinar $\frac{dy}{dx}$ para las funciones siguientes:
a) $y = x^{x^2}$
b) $y = (x^2 + 1)(x^2 + 1)^{x^2+1}$

Simplificando y multiplicando por y, obtenemos por último

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 1}}\ln(x^2 + 1) + \frac{2x\sqrt{x^3 - 1}}{x^2 + 1}\right]$$ ☛ **14**

Con base en estos ejemplos puede verse que la esencia de este método consiste en los siguientes pasos:

1. Tome el logaritmo de y y simplifique el lado derecho utilizando propiedades de logaritmos.
2. Diferencie y resuelva para dy/dx. En el paso 2 obtenemos la expresión

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

Ésta se denomina la **derivada logarítmica** de y con respecto a x.

EJEMPLO 4 Calcule las derivadas logarítmicas de las funciones siguientes:

a) ax^n *b*) $u(x)v(x)$

Solución

a) Si $y = ax^n$, entonces $y' = anx^{n-1}$. La derivada logarítmica es, en consecuencia,

$$\frac{y'}{y} = \frac{anx^{n-1}}{ax^n} = \frac{n}{x}$$

Respuesta *a*) $\frac{dy}{dx} = yx(2\ln x + 1)$

b) $\frac{dy}{dx} = 2xy[1 + \ln(x^2 + 1)]$

En el caso especial en que $n = 1$, $y = ax$ y la derivada logarítmica es $1/x$.

b) Si $y = u(x)v(x)$, entonces, por la regla del producto,

$$y' = u'v + uv'$$

En consecuencia, la derivada logarítmica es

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'v + uv'}{uv} = \frac{u'v}{uv} + \frac{uv'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$$

☛ **15.** Encuentre las derivadas logarítmicas de las siguientes funciones:
a) x *b*) e^x *c*) $\ln x$

Este resultado puede resumirse en la forma siguiente: *la derivada logarítmica del producto* uv *es la suma de las derivadas logarítmicas de* u *y* v. ☛ **15**

EJEMPLO 5 Calcule dy/dx si $y = x^x + (1 + x)^{1+x}$

Solución Ejemplos de este tipo son trampas para un estudiante incauto. Existe una gran tentación por aplicar de inmediato logaritmos y escribir

$$\ln y = x \ln x + (1 + x) \ln (1 + x)$$

Por supuesto, un momento de reflexión nos revela el error cometido al hacerlo así. Lo que debemos hacer es escribir $y = u + v$ con $u = x^x$ y $v = (1 + x)^{1+x}$. Se sigue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

y las dos derivadas du/dx y dv/dx pueden encontrarse por separado mediante derivación logarítmica. La primera de ellas se obtuvo en el ejemplo 2.

$$\frac{du}{dx} = x^x(\ln x + 1)$$

En el caso de dv/dx, tenemos

$$\ln v = (1 + x) \ln (1 + x)$$

y por consiguiente, después de derivar con respecto a x,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \ln (x + 1) + 1$$

En consecuencia, $dv/dx = (1 + x)^{1+x}[\ln (1 + x) + 1]$. Sumando los valores de du/dx y dv/dx. Obtenemos dy/dx como se requería.

Elasticidad

Un concepto bastante utilizado en economía y administración, y muy relacionado con la diferenciación logarítmica, es el de elasticidad. Presentaremos esta idea mediante la denominada **elasticidad de la demanda**.

Para un artículo dado, sea p el precio por unidad y x el número de unidades que se adquirirán durante un periodo determinado al precio p, y sea $x = f(p)$. La elasticidad de la demanda por lo regular se denota con la letra griega η (eta) y se define de la manera siguiente:*

Respuesta *a*) $\frac{1}{x}$ *b*) 1 *c*) $\frac{1}{x \ln x}$

*Tenga cuidado, algunos textos definen η con un signo menos adicional.

$$\eta = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{pf'(p)}{f(p)}$$

Antes de resolver algunos ejemplos, estudiemos el significado de η. Supongamos que el precio se incrementa de p a $p + \Delta p$. Entonces, por supuesto, la cantidad demandada cambiará, digamos a $x + \Delta x$, con $x + \Delta x = f(p + \Delta p)$. Así que, $\Delta x = f(p + \Delta p) - f(p)$.

El incremento en el precio es Δp; este incremento es una fracción $\Delta p/p$ del precio original. También podemos decir que el incremento porcentual en el precio es $100(\Delta p/p)$. Por ejemplo, sea el precio original por unidad $p = \$2$ y sea el nuevo precio \$2.10. Se sigue que $\Delta p = \$0.10$. Este incremento es una fracción $\Delta p/p = 0.10/2 = 0.05$ del precio original. Multiplicando por 100, observamos que el incremento porcentual en el precio es $100(\Delta p/p) = 100(0.05) = 5\%$.

De manera similar, el cambio Δx en la demanda es una fracción $(\Delta x/x)$ de la demanda original. El cambio porcentual en la demanda es $100(\Delta x/x)$. (Obsérvese que con un incremento en el precio, la demanda en realidad decrece, de modo que este cambio porcentual en la demanda será negativo).

Consideremos la razón de estos dos incrementos porcentuales:

$$\frac{\text{Cambio porcentual en la demanda}}{\text{Cambio porcentual en el precio}} = \frac{100(\Delta x/x)}{100(\Delta p/p)} = \frac{p}{x}\frac{\Delta x}{\Delta p}$$

Comparando esto con la definición de η, advertimos que

$$\eta = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{p}{x}\frac{\Delta x}{\Delta p}$$

Así, la elasticidad de la demanda es igual al valor límite de la razón de cambio porcentual en la demanda al cambio porcentual en el precio cuando el cambio en el precio tiende a cero.

Cuando el cambio en el precio es pequeño, la razón $\Delta x/\Delta p$ de los dos incrementos es aproximadamente igual a la derivada dx/dp. En consecuencia, si Δp es pequeño,

$$\frac{p}{x}\frac{\Delta x}{\Delta p} \approx \frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = \eta$$

y así la razón del cambio porcentual en la demanda al cambio porcentual en el precio es casi igual a η. En forma alternativa, podemos decir que cuando el cambio en el precio es pequeño,

$$\text{Cambio porcentual en la demanda} \approx \eta(\text{Cambio porcentual en el precio})$$

Por ejemplo, si 2% de incremento en el precio provoca que la demanda disminuya en 3%, se sigue que la elasticidad de la demanda es casi igual a $(-3)/(2) = -1.5$. O bien, si la elasticidad de la demanda es -0.5, entonces un incremento del 4% en el precio conducirá a un cambio en la demanda de aproximadamente $(-0.5)(4\%) = -2\%$.

EJEMPLO 6 Calcule la elasticidad de la demanda si la ecuación de demanda es $x = k/p$, con k alguna constante positiva.

Solución Puesto que $x = k/p$, $dx/dp = -k/p^2$. Por consiguiente,

$$\eta = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{p}{(k/p)}\left(-\frac{k}{p^2}\right) = -1$$

La elasticidad de la demanda es por tanto constante en este caso y es igual a -1.

Esto significa que un pequeño incremento porcentual en el precio siempre llevará a un decrecimiento porcentual igual a la demanda.

EJEMPLO 7 Determine la elasticidad de la demanda si $x = 500(10 - p)$ para cada valor de p.

a) $p = 2$ *b*) $p = 5$ *c*) $p = 6$

Solución En este caso, $dx/dp = -500$. Por consiguiente,

$$\eta = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{p}{500(10-p)}(-500) = -\frac{p}{10-p}$$

Observamos que la elasticidad de la demanda varía, dependiendo del precio p.

a) $p = 2$; $\eta = \dfrac{-2}{10-2} = -0.25$

Así que cuando el precio $p = 2$, el decrecimiento porcentual en la demanda es un cuarto del incremento porcentual en el precio.

b) $p = 5$; $\eta = \dfrac{-5}{10-5} = -1$

Cuando $p = 5$, un pequeño incremento en el precio da un incremento porcentual igual en la demanda.

c) $p = 6$; $\eta = \dfrac{-6}{10-6} = -1.5$

La disminución porcentual en la demanda es una vez y media el incremento porcentual en el precio cuando $p = 6$. ☛ **16**

☛ **16.** Determine la elasticidad de la demanda para las relaciones de demanda
a) $x = 12 - 2p$
b) $3x + 4p = 12$

Respuesta

a) $\eta = \dfrac{-2p}{x} = p/(6-p)$

b) $\eta = \dfrac{-4p}{3x} = \dfrac{-p}{3-p}$

La demanda puede ser directa en términos de elasticidad así:

La demanda es **elástica** si $\eta < -1$;

el cambio porcentual en la demanda es mayor que el cambio porcentual en el precio.

La demanda es **inelástica** si $-1 < \eta < 0$;

el cambio porcentual en la demanda es menor que el cambio porcentual en el precio.

Si $\eta = -1$, existe una **elasticidad unitaria**;

el cambio porcentual en la demanda es igual al cambio porcentual en el precio. ☛ **17**

☛ **17.** Para la relación de demanda $x = 16 - 2p$, ¿para qué valores de p la demanda es elástica y para qué valores es inelástica? (Por supuesto, suponga que $p < 8$).

Respuesta Elástica para $p > 4$, inelástica para $0 \le p < 4$

La idea de elasticidad puede aplicarse a cualquier par de variables que estén relacionadas funcionalmente. Si $y = f(x)$, la *elasticidad de* y *con respecto a* x *se define como*

$$\eta = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$$

(otra vez se denota por η). Es aproximadamente igual a la razón del cambio porcentual en y al cambio porcentual en x, con tal de que estos cambios sean pequeños. Por ejemplo, podemos hablar acerca de la elasticidad de la oferta con respecto al precio, que es el cambio porcentual en el suministro de un artículo dividido entre el cambio porcentual en su precio (estrictamente, en el límite cuando el incremento en el precio tiende a cero).

La elasticidad está muy relacionada con las derivadas logarítmicas. La derivada logarítmica de y con respecto a x es

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

La derivada logarítmica de x con respecto a sí misma está dada de manera similar por

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}\frac{dx}{dx} = \frac{1}{x}$$

En consecuencia, se sigue que *la elasticidad de* y *con respecto a* x *es igual a la derivada logarítmica de* y *dividida entre la derivada logarítmica de* x:

$$\eta = \frac{(d/dx)(\ln y)}{(d/dx)(\ln x)}$$

Regresando a la elasticidad de la demanda, podemos establecer una estrecha relación entre esta cantidad y el ingreso marginal. La función ingreso marginal está dada por

$$R(x) = (\text{cantidad vendida}) \times (\text{precio}) = xp$$

Consideremos a R como una función del precio unitario p. La derivada dR/dp se denomina **ingreso marginal con respecto al precio** y proporciona el incremento en el ingreso por unidad de aumento en el precio cuando estos incrementos son pequeños. De $R = xp$, tenemos, por medio de la regla del producto,

$$\frac{dR}{dp} = \frac{d}{dp}(px) = x + p\frac{dx}{dp} = x\left(1 + \frac{p}{x}\frac{dx}{dp}\right) = x(1 + \eta) \qquad (1)$$

Si la demanda es elástica, esto es, $\eta < -1$, entonces $1 + \eta < 0$, y de (1) se sigue que $dR/dp < 0$. En este caso el ingreso total R es una función decreciente del precio p. Similarmente, si la demanda es inelástica, esto es, $-1 < \eta < 0$, entonces $1 + \eta > 0$ y de (2), $dR/dp > 0$, de modo que el ingreso R es una función creciente de p. Así,

Si la demanda es elástica, un aumento en el precio causa que el ingreso disminuya.
Si la demanda es inelástica, un aumento en el precio provoca que el ingreso aumente.
Para elasticidad unitaria, un aumento en el precio no causa cambio en el ingreso.

☛ **18.** Para la relación $x = 12 - p^2$, determine la elasticidad de la demanda cuando
$a)$ $x = 6$ $b)$ $x = 8$ $c)$ $x = 9$
En cada caso, si el precio unitario aumenta, ¿el ingreso aumenta o disminuye?

EJEMPLO 8 La función de demanda de cierto producto es $p = 10 - 0.2\sqrt{x}$, donde x unidades son vendidas a un precio p cada una. Utilice la elasticidad de la demanda para determinar si un aumento en el precio aumentará o disminuirá el ingreso total si la demanda es: *a*) 900 unidades; *b*) 1600 unidades.

Solución Primero calculamos η; $p = 10 - 0.2\sqrt{x}$ da $dp/dx = -0.1/\sqrt{x}$, de modo que

$$\eta = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{(10 - 0.2\sqrt{x})}{x(-0.1/\sqrt{x})} = \frac{10 - 0.2\sqrt{x}}{-0.1\sqrt{x}} = 2 - \frac{100}{\sqrt{x}}$$

a) Cuando $x = 900$, tenemos

$$\eta = 2 - \frac{100}{30} = \frac{-4}{3}$$

Como $\eta = -\frac{4}{3} < -1$, la demanda es elástica y un incremento en el precio da por resultado una disminución en el ingreso total.

b) Cuando $x = 1600$ tenemos

$$\eta = 2 - \frac{100}{40} = -\frac{1}{2}$$

Como $\eta = -1/2 > -1$, la demanda es inelástica y, por tanto, un incremento en el precio causará que aumente el ingreso. ☛ **18**

Respuesta $a)$ $\eta = -2$
R disminuirá
$b)$ $\eta = -1$ (R permanecerá sin cambio)
$c)$ $\eta = -\frac{2}{3}$ (R aumentará)

EJERCICIOS 14-3

(1-16) Emplee diferenciación logarítmica para evaluar dy/dx en el caso de las siguientes funciones.

1. $y = (x^2 + 1)(x - 1)^{1/2}$

2. $y = (3x - 2)(3x^2 + 1)^{1/2}$

3. $y = (x^2 - 2)(2x^2 + 1)(x - 3)^2$

4. $y = (x^3 - 1)(x + 1)^3(x + 2)^2$

5. $y = \dfrac{(x^2 + 1)^{1/3}}{x^2 + 2}$ **6.** $y = \dfrac{(2x^2 - 3)^{1/4}}{x(x + 1)}$

7. $y = \left(\dfrac{2x^2 + 5}{2x + 5}\right)^{1/3}$

8. $\sqrt{\dfrac{(x + 1)(x + 2)}{x^3 - 3}}$

9. $y = x^{x^2}$ **10.** $y = x^{\sqrt{x}}$

11. $y = e^{e^x}$ **12.** $y = x^{e^x}$

13. $y = x^{\ln x}$ **14.** $y = (\ln x)^x$

15. $y = x^x + x^{1/x}$

16. $y = (x^2 + 1)^x - x^{x^2+1}$

(17-20) *(Elasticidad de la demanda)* Calcule la elasticidad de la demanda para las siguientes relaciones de demanda.

17. $x = k/p^n$ (k, n constantes)

18. $x = 100(5 - p)$

19. $x = 50(4 - \sqrt{p})$ **20.** $x = 200\sqrt{9 - p}$

21. *(Elasticidad de la demanda)* Si la relación de demanda es $x = 400 - 100p$, determine la elasticidad de la demanda cuando: $a)$ $p = 1$ $b)$ $p = 2$ $c)$ $p = 3$

22. *(Elasticidad de la demanda)* Si la relación de demanda es $x/1000 + p/8 = 1$, calcule la elasticidad de la demanda cuando: $a)$ $p = 2$ $b)$ $p = 4$ $c)$ $p = 6$

(23-26) *(Elasticidad e inelasticidad de la demanda)* Considere las relaciones de demanda siguientes y determine los valores de p que hagan a la demanda: *a*) elástica *b*) inelástica.

23. $x = 100(6 - p)$ **24.** $x = 800 - 100p$

25. $x = 100(2 - \sqrt{p})$

26. $x = k(a - p)$ (k, a constantes positivas)

27. *(Elasticidad)* La relación de demanda para un producto es $x = 250 - 30p + p^2$, donde x unidades pueden venderse a un precio de p cada una. Determine la elasticidad de la demanda cuando $p = 12$. Si el precio de p se incrementa un 8.5%, encuentre el cambio porcentual aproximado en la demanda.

28. *(Elasticidad)* La ecuación de demanda para un producto es $p = \sqrt{2500 - x^2}$ donde x unidades pueden venderse a un precio de p cada una. Encuentre la elasticidad de la demanda cuando $p = 40$. Si el precio de 40 disminuye en 2.25%, encuentre el incremento porcentual aproximado en la demanda.

29. *(Elasticidad)* Para la relación de demanda $p = 250 - 0.5x$ verifique que la demanda de x es elástica y el ingreso total es una función creciente de x si $0 < x < 250$. También pruebe que la demanda es inelástica y el ingreso total es decreciente si $250 < x < 500$.

30. *(Elasticidad)* Para cualquier función de demanda lineal $p = mx + b (m < 0$ y $b > 0)$ pruebe que la demanda es elástica si $p > b/2$, e inelástica si $p < b/2$, y tiene elasticidad unitaria si $p = b/2$.

31. Pruebe que $\eta = p/(R_m - p)$, donde p es el ingreso promedio y R_m es el ingreso marginal. Verifique esto para la ecuación de demanda $p = b + mx$ ($m < 0$, $b > 0$)

***32.** *(Elasticidad)* La elasticidad de demanda para una función de demanda $p = f(x)$ está dada por

$$\eta = f(x)/xf'(x)$$

Pruebe que la elasticidad de demanda ζ para la función de demanda $p = xf(x)$ está dada por $\zeta = \eta/(1 + \eta)$

33. *(Cambio de precio y elasticidad)* La ecuación de demanda para un producto es $p = 300 - 0.5x$. ¿Un aumento en el precio, incrementaría o disminuiría el ingreso total si la demanda semanal es:

a) 200 unidades? *b*) 400 unidades?

34. *(Cambio de precio y elasticidad)* La ecuación de demanda de cierto producto es $x = \sqrt{4100 - p^2}$. ¿Un aumento en el precio incrementaría o disminuiría el ingreso total en el nivel de demanda de:

a) 40 unidades? *b*) 50 unidades?

35. *(Crecimiento de población)* Una población crece de acuerdo a la función de Gompertz $y = pe^{-ce^{-kt}}$. Pruebe que la derivada logarítmica de y es una función exponencial decreciente de t.

REPASO DEL CAPÍTULO 14

Términos, símbolos y conceptos importantes

14.1 Diferencial, dx y dy.
Errores, error relativo, error porcentual.

14.2 Diferenciación implícita.

14.3 Diferenciación logarítmica. Derivada logarítmica.
Elasticidad de la demanda; elasticidad de y con respecto a x. Demanda elástica y demanda inelástica; elasticidad unitaria.

Fórmulas

$dy = f'(x)\,dx$.

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$

o bien, $f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$

$$\frac{d}{dx}f(y) = f'(y)\frac{dy}{dx}$$

Tangente horizontal: $dy/dx = 0$. Tangente vertical: $dx/dy = 0$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

$$\eta = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp}$$

Cambio porcentual en la demanda
$\approx \eta$ (Cambio porcentual en el precio).

Ingreso marginal con respecto al precio: $\dfrac{dR}{dp} = x(1 + \eta)$

Si la demanda es elástica (alternativamente, inelástica), un aumento en el precio provoca que los ingresos disminuyan (aumenten).

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 14

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las proposiciones siguientes. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) La diferencial de $3x^3$ es $9x^2$

b) Si f es una función lineal, entonces $df = \Delta f$

c) Si las derivadas $\dfrac{dx}{dy}$ y $\dfrac{dy}{dx}$ están definidas y ninguna es cero, entonces $\dfrac{dx}{dy}\ \dfrac{dy}{dx} = 1$

d) La derivada logarítmica de x^x *es* $x^x(1 + \ln x)$

e) La derivada logarítmica de a^x es $\ln a$

f) Si y es una función decreciente de x, entonces, x es una función decreciente de y

g) En una relación implícita $f(x, y) = 0$, tanto x como y son variables independientes

h) La diferencial de la función lineal $f(x) = 4x + 1$ es una constante.

i) Si y es la variable independiente, entonces $dy = \Delta y$

j) Si $f(x) = \sqrt{x}$, se puede esperar que df sea aproximadamente igual a Δf, pero siempre mayor que Δf

k) Si $f(x) = x^2$, se puede esperar que df sea aproximadamente igual a Δf, pero siempre mayor que Δf

l) Cuando la elasticidad de la demanda es -1, el ingreso marginal es cero

m) Cuando el ingreso es máximo, la eslasticidad de la demanda es -1

n) Para la relación de demanda $x = kp^{-\alpha}$ (k, α constantes), la elasticidad de la demanda es constante.

2. Determine dy si $y(t) = 3t^2 - 5t + 1$

3. Determine dy si $y(t) = \sqrt{t^2 + 5t}$

4. Determine dy si $y(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t + 3}$

5. Si $y(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 5$, evalúe dy cuando $x = 2$ y $dx = 0.1$

6. Si $y(x) = e^{x^2-1}$, evalúe dy cuando $x = 1$ y $dx = 0.1$

7. Para la función $y(t) = \sqrt{t + 1}$ calcule dy y Δy cuando $t = 2$ y $dt = .05$

8. Para la función $y(t) = \ln t^2 - 3$ calcule dy y Δy cuando $t = 5$ y $dt = .1$

(9-12) Por medio de diferenciales calcule un valor aproximado de cada una de las siguientes expresiones.

9. $e^{0.04}$ **10.** $8.1\sqrt[3]{8.1}$

11. $\ln(1.2)$ **12.** $\sqrt[4]{82}$

13. Calcule dy/dt si $t^2 - 3y = t$

14. Calcule dy/dt si $e^{ty} + y + 5t = 10$

15. Calcule dx/dt si $xt + xt^3 + 2x - t = 10$

16. Calcule dx/dt si $\ln(x + t) + xt = e^t$

17. Determine una ecuación para la recta tangente a la gráfica de la relación $x^2 + y^2 = 9$ en el punto (0, 3)

18. Determine una ecuación para la recta tangente a la gráfica de la relación $xy + 5x^3y^2 = 22$ en el punto (0, 3)

19. Encuentre d^2y/dx^2 en $x = -1$, $y = 1$, si $x^2 + 4y^3 = 5$

20. Encuentre d^2y/dx^2 en $x = -1$, $y = 1$, si $e^{x^2} + e^y = e + 1$

(21-24) Mediante diferenciación logarítmica determine dy/dx para cada una de las siguientes funciones.

21. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x - 4}}$

22. $y = x^{x+1}$

23. $y = x^{1/\ln x}$

24. $y = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{(x + 3)^{2/3}}$

25. Determine dy si $x^y = e^x$

26. Determine dt si $e^{x+t} = x^a$

27. *(Elasticidad de la demanda)* Si la relación de demanda es $2x + 3p = 300$ determine la elasticidad cuando:

a) $p = 45$ *b*) $p = 55$

c) $p = 50$

28. *(Elasticidad de la demanda)* Si la relación de demanda es $x = 50(10 - p)$ determine la elasticidad cuando:

a) $p = 4$ *b*) $p = 5$

c) $p = 5.5$

(29-32) *(Elasticidad de la demanda)* Para cada una de las siguientes relaciones de demanda determine si la demanda es elástica, inélastica o si tiene elasticidad unitaria, para el valor dado del precio, p o de la cantidad demandada, x.

29. $p = 40 - 2x$, $x = 5$

30. $x = 200 - p$, $p = 100$

31. $x^2 + p^2 = 25$, $p = 4$

32. $p + x^2 = 1200$, $x = 25$

33. *(Elasticidad)* Dada la relación de demanda $ax + bp = c$, a, b y c son constantes positivas. Determine los valores de p

para los cuales la demanda es *a*) elástica; *b*) inelástica; *c*) tiene elasticidad unitaria. *Sugerencia*: Utilice el hecho que $x = c - bp \geq 0$

34. *(Elasticidad)* La función de demanda de cierto producto es $p^2 + x^2 = 5000$, donde x unidades se venden a un precio de p dólares cada una. Una baja en la demanda, ¿incrementará o disminuirá el ingreso total en un nivel de precio de

a) $40? *b*) $65?

35. *(Elasticidad)* Demuestre que, para la función de demanda $p = f(x)$, en un nivel de producción que maximiza el ingreso total, la elasticidad de la demanda es igual *a* -1

36. *(Elasticidad)* Para la relación de demanda $x/50 + p/2 = 1$, determine los valores de p para los cuales: *a*) $\eta = -1$; *b*) $\eta = -3/2$; *c*) $eta = -1/2$

***37.** *(Elasticidad)* Si el ingreso marginal de un producto a cierto nivel es de $25 y la elasticidad de la demanda a ese precio es $\eta = -2$, determine el ingreso promedio, esto es, el precio p

38. *(Elasticidad)* La ecuación de demanda para un producto es $x = \sqrt{100 - p}$ para $0 < p < 80$. Determine los precios para los que la demanda es elástica.

39. *(Elasticidad)* Con respecto a la relación de demanda del problema anterior, calcule la demanda cuando $p = 40$. Utilice su respuesta para estimar el incremento o disminuición porcentual en la demanda cuando el precio se incrementa en 5%, es decir, sube de 40 a 42 dólares.

***40.** *(Elasticidad)* Verifique que si la relación de demanda es $px^2 = 1000$, entonces se cumple que $\dfrac{dR}{dx} = p\left(1 + \dfrac{1}{\eta}\right)$

R es el ingreso total.

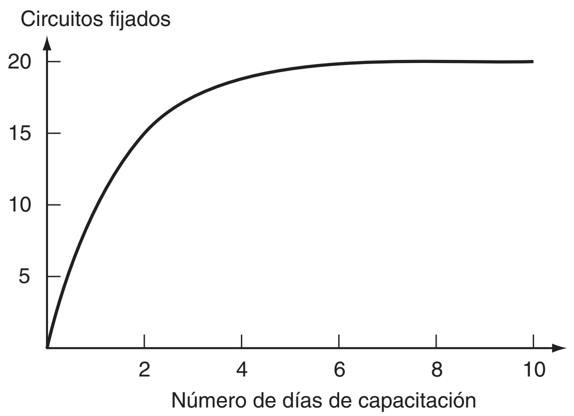
CURVA DE APRENDIZAJE

Al inicio del capítulo se obtuvo la función, $y(t)$, del rendimiento que una persona tenía en una línea de ensamblado de circuitos. Esta función es

$$y(t) = 20(1 - e^{-06931t})$$

en donde $y(t)$ es el número de circuitos que puede fijar en cinco minutos a la placa principal después de haber recibido t días de capacitación.

Antes de responder a las preguntas que se formularon al inicio del capítulo, a continuación se muestra la curva de aprendizaje.



El cambio del aprendizaje con respecto al tiempo es precisamente la rapidez (instantánea) de esta persona; sin embargo, este cambio no es otra cosa que la derivada de la función $y(t)$ con respecto a t, es decir,

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\,[20(1 - e^{-0.6931t}]$$

Si se aplican las fórmulas de derivación aprendidas hasta el momento se obtiene

$$\frac{dy(t)}{dt} = 20(0.6931)e^{-0.6931t}$$

Esta expresión proporciona la rapidez de aprendizaje para cualquier instante t. Por lo que,

a) La rapidez de aprendizaje está dada por $13.862e^{-0.6931t}$

b) Así, por ejemplo, al final del primer día de capacitación, la rapidez de aprendizaje de esta persona es 6.93; al final del segundo día, 3.47; al final del tercer día, 1.73; y al final del cuarto día, 0.87. Todas aproximadas a dos decimales. Nótese cómo la rapidez de aprendizaje disminuye conforme pasa el tiempo de capacitación; esto significa que la habilidad aumenta pero cada vez a una razón más pequeña.

c) Lo que mejoró del segundo al tercer día está dado por

$$\begin{aligned} y(3) - y(2) &= 20(1 - e^{-0.6931 \times 3}) - 20(1 - e^{-0.6931 \times 2}) \\ &\approx 17.5 - 15 \\ &= 2.5 \end{aligned}$$

d) Para saber que sucede a la larga, nótese que en la función

$$y(t) = 20(1 - e^{-0.6931t})$$

el término $e^{-0.6931t}$ se hace muy pequeño conforme $t \to \infty$, de modo que la función $y(t)$ se hace cada vez más cercana a 20. Esto quiere decir que la mayor velocidad para fijar circuitos que tendrá esta persona, de acuerdo con la función, será de 20 circuitos cada cinco minutos.

Con base en lo que se ha desarrollado hasta este punto, ayude al supervisor a decidir en la siguiente situación. De acuerdo con las políticas de la empresa, un individuo se puede integrar a la línea de ensamblado, si al cabo de cuatro días de capacitación puede fijar 19 circuitos a la placa principal. ¿Se contrataría a esta persona para integrarse a la línea de ensamblado?

Ahora considere el siguiente problema:

Durante dos días, se capacita a dos personas: Dulce y Jorge. A continuación se resume en una tabla los resultados que obtuvo cada uno de ellos.

	Número de circuitos que puede fijar en cinco minutos al final del	
	Primer día	Segundo día
Dulce	8	13
Jorge	10	15

Por otro lado, considere los siguientes criterios de selección.

I. Mayor número de circuitos fijados en cinco minutos después de cuatro días de capacitación.

II. Mayor número de circuitos fijados en cinco minutos después de seis días de capacitación.

III. Mayor velocidad de aprendizaje al final del tercer día de capacitación.

IV. La persona que tenga mayor potencial a la larga, esto es, la persona que a largo plazo llegue a fijar más circuitos cada cinco minutos.

¿A quién contrataría con el criterio I?

¿A quién contrataría con el criterio II?

¿A quién contrataría con el criterio III?

¿A quién contrataría con el criterio IV?

Sugerencia: Obtenga la función $y(t)$ para cada persona y grafique la curva de aprendizaje de cada una de ellas.

CAPÍTULO 15

Integración

Utilidades en la producción

La licenciada Adriana Rojas Vela acaba de asumir el puesto de responsable de la producción, en una importante compañía dedicada a la fabricación de portafolios. En los archivos encontró información incompleta, acerca de los portafolios de piel. Parte de la información que le dejó su antecesor fue un documento donde se informa que el ingreso marginal semanal está dado por

$$I'(x) = 10e^{-x/50}(50 - x)$$

en donde x es el número de artículos vendidos.

Por otro lado, estaba la gráfica siguiente que representa el costo mensual del producto.

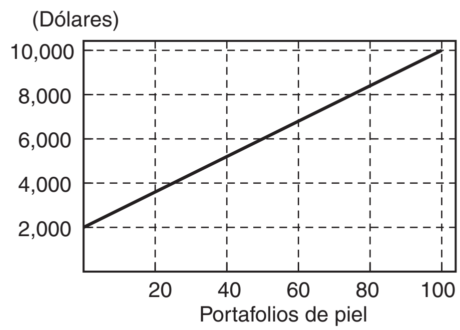


FIGURA 1

Por la gráfica anterior, se deduce que la función de costo de 0 a 100 portafolios es lineal. Si se aplican técnicas del capítulo 4, se puede deducir la función de costos para la producción de x portafolios.

También encontró esta otra gráfica.

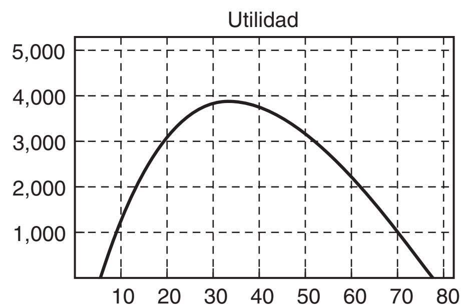


FIGURA 2

En esta gráfica el eje horizontal representa el número de portafolios vendidos y el eje vertical la utilidad en dólares por la venta de x portafolios en una semana.

Con base en la información que pudo recopilar, la licenciada Adriana quiere responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la ecuación de demanda del producto?
b) ¿Cuál es la función de costo de la empresa?
c) ¿A cuánto ascienden los costos fijos mensuales?
d) ¿Cuál es la función de utilidad para el producto?
e) ¿Cuál es el plan de producción semanal óptimo?

Después de estudiar este capítulo y repasar las definiciones de capítulos anteriores, ayude a la licenciada Adriana a responder las preguntas.

TEMARIO

■ 15-1 ANTIDERIVADAS

☛ **1.** *a*) ¿Cuál es la antiderivada de $2x$?
b) ¿De qué función es $\ln x$ una antiderivada?

Hasta ahora en nuestro estudio del cálculo, nos hemos ocupado del proceso de diferenciación (esto es, el cálculo y aplicación de las derivadas de funciones). Esta parte del tema se denomina **cálculo diferencial**. Enseguida abordaremos el segundo campo de estudio dentro del área general del cálculo, denominado **cálculo integral**, en el que nos interesará el proceso opuesto a la diferenciación.

Hasta ahora hemos visto que si $s(t)$ es la distancia recorrida en el instante t por un móvil, la velocidad instantánea es $v(t) = s'(t)$, la derivada de $s(t)$. A fin de calcular v, sólo derivamos $s(t)$. Sin embargo, puede suceder que ya conozcamos la función velocidad $v(t)$ y se requiera calcular la distancia recorrida s. En tal situación, conocemos la derivada $s'(t)$ y buscamos la función $s(t)$, una etapa opuesta a la diferenciación. Como otro ejemplo, podemos estar manejando un modelo de costos en que el costo marginal es una función conocida del nivel de producción y necesitamos calcular el costo total de producir x artículos. O bien, podríamos conocer la tasa de producción de un pozo de petróleo como función del tiempo y debemos calcular la producción total durante cierto periodo.

El proceso de determinar la función cuando se conoce su derivada se llama **integración**, y la función a determinar se denomina la **antiderivada** o la **integral** de la función dada.

Con el objetivo de evaluar la antiderivada de alguna función $f(x)$, debemos encontrar una función $F(x)$, cuya derivada sea igual a $f(x)$. Por ejemplo, supongamos que $f(x) = 3x^2$. Puesto que sabemos que $(d/dx)(x^3) = 3x^2$, concluimos que podemos elegir $F(x) = x^3$. En consecuencia, una antiderivada de $3x^3$ es x^3.

Sin embargo, debe observarse que esta respuesta no es única, porque las funciones $x^3 + 4$ y $x^3 - 2$ también tienen $3x^2$ como derivada. De hecho, para cualquier constante C, $x^3 + C$ tiene derivada $3x^2$; en consecuencia, $x^3 + C$ es una antiderivada de $3x^2$ para cualquier C. La constante C, que puede tener un valor arbitrario, se conoce como **constante de integración**.

El aspecto común a todas las antiderivadas es la no unicidad: se les puede sumar cualquier constante sin destruir su propiedad de ser la antiderivada de una función dada. Sin embargo, ésta no es la única ambigüedad que existe: si $F(x)$ es cualquier antiderivada de $f(x)$, entonces, cualquier otra antiderivada de $f(x)$ difiere de $F(x)$ sólo por una constante. Por tanto, podemos decir que si $F'(x) = f(x)$, entonces, la antiderivada general de $f(x)$ está dada por $F(x) + C$, en donde C es cualquier constante. ☛ **1**

Ya que la constante de integración es arbitraria (es decir, puede ser cualquier número real), la integral así obtenida recibe el nombre más propio de **integral indefinida**. Algunas veces diversos métodos de evaluar una integral pueden dar la respuesta en diferentes formas, pero siempre se dará el caso en que las dos respuestas sólo difieren por una constante.

La expresión

$$\int f(x)\, dx$$

Respuesta *a*) $x^2 + C$, en donde C es una constante arbitraria
b) x^{-1}

se utiliza para denotar a un miembro arbitrario del conjunto de antiderivadas de f. Ésta se lee como la integral de $f(x)$, dx. En tal expresión, la función $f(x)$ por integrar se denomina el **integrando** y el símbolo $\int$ es el **signo de integral**. El símbolo

$$\int \dots \, dx$$

indica la *integral, con respecto a x,* de ... Es el inverso del símbolo

$$\frac{d}{dx}\dots$$

que significa *derivada, con respecto a* x, *de* ... El signo de integral y dx van juntos. El signo de integral indica la operación de integración y dx especifica que la *variable de integración* es x. El integrando siempre se coloca entre el signo de integral y la diferencial de la variable de integración.

Si $F(x)$ es una antiderivada particular de $f(x)$, entonces,

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

☛ **2.** Encuentre *a*) $\int x^4 \, dx$
b) $\int x^{1/2} \, dx$

en donde C es una constante arbitraria. Por ejemplo,

$$\int 3x^2 \, dx = x^3 + C \qquad (1)$$

A partir de la definición de integral, es claro que

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx\right] = f(x)}$$

Esto es, el proceso de diferenciación neutraliza el efecto del proceso de integración.

Estableceremos varias fórmulas de integración simple y estándar. La primera de éstas se conoce como la **fórmula de la potencia**; nos indica cómo integrar cualquier potencia de x con excepción de la recíproca de x.

Primero considere $\int x^2 \, dx$. Debemos buscar una función cuya derivada sea x^2. Como vimos antes, la derivada de x^3 es $3x^2$. Por tanto, la derivada de $\frac{1}{3}x^3$ es $\frac{1}{3}(3x^2) = x^2$. Así que $\int x^2 \, dx = \frac{1}{3}x^3 + C$.

Ahora, considere $\int x^3 \, dx$, que representa a una función cuya derivada es x^3. Pero la derivada de x^4 es $4x^3$ y, por consiguiente, la derivada de $\frac{1}{4}x^4$ es $\frac{1}{4}(4x^3) = x^3$. Por tanto, $\int x^3 \, dx = \frac{1}{4}x^4 + C$. ☛ **2**

Ahora es fácil ver cómo se generaliza esto:

$$\boxed{\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq 1) \qquad \text{(Fórmula de la potencia)}}$$

Respuesta *a*) $\frac{1}{5}x^5 + C$
b) $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$

Así, *si se quiere integrar cualquier potencia de* x *con excepción de la recíproca de la primera potencia, debemos aumentar la potencia en* 1, *luego dividimos entre el nuevo exponente* y, por último, sumamos la constante de integración arbitraria.

Esta fórmula se obtiene a partir de la fórmula correspondiente para derivadas. Observemos que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\frac{d}{dx}(x^{n+1}) = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n = x^n$$

En consecuencia, dado que la derivada de $x^{n+1}/(n+1)$ es x^n, una antiderivada de x^n debe ser $x^{n+1}/(n+1)$. La antiderivada general se obtiene sumando la constante de integración.

EJEMPLO 1

a) $\displaystyle\int x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C \qquad (n = 3)$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C$

$\displaystyle\qquad = -\frac{1}{x} + C \qquad (n = -2)$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int t^{-1/2}\,dt = \frac{t^{-1/2+1}}{(-\frac{1}{2}+1)} + C = 2\sqrt{t} + C \qquad (n = -\tfrac{1}{2})$

d) $\displaystyle\int dx = \int 1\,dx = \int x^0\,dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C \qquad (n = 0)$

☛ **3**

☛ **3.** Utilizando la fórmula para la potencia, encuentre

a) $\int x^{-4}\,dx$ *b*) $\int u^{3/4}\,du$

Respuesta

a) $-\frac{1}{3}x^{-3} + C$ *b*) $\frac{4}{7}u^{7/4} + C$

Varias fórmulas que dan antiderivadas de funciones simples aparecen en la tabla 1. Cada fórmula se establece por segunda vez con la variable u en vez de x. Todos estos resultados se obtienen a partir de los resultados correspondientes para derivadas. La fórmula 2 requiere algún comentario. Si $x > 0$, esta fórmula es correcta, ya que $|x| = x$, y sabemos que

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

TABLA 1 *Integrales elementales estándar*

1.	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} = + C \quad (n \neq -1)$	o	$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
2.	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	o	$\int \frac{1}{u}\,du = \ln\lvert u\rvert + C$
3.	$\int e^x\,dx = e^x + C$	o	$\int e^u\,du = e^u + C$

Puesto que $1/x$ es la derivada de $\ln x$, se sigue que la antiderivada de $1/x$ debe ser $\ln x$, más la constante de integración.

Cuando $x < 0$, tenemos que $|x| = -x$. Por consiguiente,

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{(-x)}(-1) = \frac{1}{x}$$

en donde la derivación se realizó mediante la regla de la cadena. Así que, $1/x$ es la derivada de $\ln|x|$ para $x < 0$, así como si $x > 0$. Por tanto, la antiderivada de $1/x$ debe ser $\ln|x| + C$, como se dio en la tabla, para toda $x \neq 0$.

Ahora probamos dos teoremas que simplificarán el álgebra de integración.

TEOREMA 1 La integral del producto de una constante de una función de x es igual a la constante por la integral de la función. Esto es, si c es una constante.

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

EJEMPLO 2

a) $\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx = 3\cdot\frac{x^3}{3} + C = x^3 + C$

b) $\int 2e^x\,dx = 2\int e^x\,dx = 2e^x + C$

c) $\int 5\,dx = 5\int 1\,dx = 5x + C$ ☛ **4**

☛ **4.** Determine *a*) $\int \frac{2}{x}\,dx$ *b*) $\int 4\sqrt[3]{t}\,dt$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1 Tenemos que

$$\frac{d}{dx}\left[c\int f(x)\,dx\right] = c\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = c\,f(x)$$

Por consiguiente, $cf(x)$ es la derivada de $c\int f(x)\,dx$, y así a partir de la definición de antiderivada, se sigue que $c\int f(x)\,dx$ debe ser la antiderivada de $cf(x)$. En otras palabras,

$$\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

lo cual prueba el resultado.

Respuesta *a*) $2\ln|x| + C$ *b*) $3t^{4/3} + C$

Como resultado de este teorema, se sigue que podemos sacar cualquier constante multiplicativa del interior del signo de integral.

Precaución Las variables no pueden sacarse del signo de integral. Por ejemplo,

$$\int xe^{-x}\,dx \neq x\int e^{-x}\,dx$$

TEOREMA 2 La integral de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus integrales.

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Observación Este resultado puede extenderse a la diferencia de dos funciones o a cualquier suma algebraica de un número finito de funciones.

☛ **5.** Encuentre

a) $\int \frac{2x^2 + 3}{x}\,dx$

b) $\int (1 + \sqrt{v})^2\,dv$

EJEMPLO 3 Calcule la integral de $(x - 3/x)^2$

Solución Desarrollamos $(x - 3/x)^2$ con el objetivo de expresar el integrando como una suma de funciones potencia.

$$\begin{aligned}
\int \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 dx &= \int \left(x^2 - 6 + \frac{9}{x^2}\right) dx \\
&= \int x^2\,dx - \int 6\,dx + \int 9x^{-2}\,dx \\
&= \int x^2\,dx - 6\int 1\,dx + 9\int x^{-2}\,dx \\
&= \frac{x^{2+1}}{2+1} - 6x + 9\,\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C \\
&= \frac{x^3}{3} - 6x - \frac{9}{x} + C
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Encuentre la antiderivada de $\dfrac{3 - 5t + 7t^2 + t^3}{t^2}$

Solución

$$\begin{aligned}
\int \frac{3 - 5t + 7t^2 + t^3}{t^2}\,dt &= \int \left(\frac{3}{t^2} - \frac{5}{t} + 7 + t\right) dt \\
&= 3\int t^{-2}\,dt - 5\int \frac{1}{t}\,dt + 7\int 1\,dt + \int t\,dt \\
&= 3\,\frac{t^{-2+1}}{-1} - 5\ln|t| + 7t + \frac{t^{1+1}}{2} + C \\
&= -\frac{3}{t} - 5\ln|t| + 7t + \frac{t^2}{2} + C
\end{aligned}$$

☛ **5**

Respuesta *a)* $x^2 + 3\ln|x| + C$
b) $v + \frac{4}{3}v^{3/2} + \frac{1}{2}v^2 + C$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right] = \frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] + \frac{d}{dx}\left[\int g(x)\,dx\right]$$
$$= f(x) + g(x)$$

En consecuencia, $f(x) + g(x)$ es la derivada de $\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$, y así por la definición de antiderivada,

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

EJEMPLO 5 Determine $f(x)$, si $f'(x) = (x^2 + 1)(4x - 3)$ y $f(1) = 5$

Solución Desarrollando los paréntesis, obtenemos $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x - 3$ Utilizando los teoremas anteriores, la antiderivada es

$$f(x) = 4(\tfrac{1}{4}x^4) - 3(\tfrac{1}{3}x^3) + 4(\tfrac{1}{2}x^2) - 3x + C$$
$$= x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + C$$

en donde C es una constante desconocida. Pero en este caso se nos da la información de que $f(1) = 5$, y esto nos permite determinar el valor de C. Como $f(1) = 1^4 - 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + C = C - 1 = 5$. Por consiguiente, $C = 6$, y así

☛ **6.** Encuentre $g(x)$, si $g'(x) = 1 - 2x$ y $g(0) = 4$

$$f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 6$$ ☛ **6**

EJEMPLO 6 ***(Costo extra de producción)*** Una compañía actualmente produce l50 unidades por semana de producto. Por experiencia, saben que el costo de producir la unidad número x en una semana (esto es, el costo marginal) está dado por

$$C'(x) = 25 - 0.02x$$

Suponiendo que este costo marginal aún se aplica, determine el costo extra por semana que debería considerarse al elevar la producción de 150 a 200 unidades por semana.

Solución El costo marginal es la derivada de la función de costo. En consecuencia, la función de costo se obtiene integrando la función de costo marginal.

$$C(x) = \int C'(x)\,dx = \int (25 - 0.02x)\,dx$$
$$= 25x - (0.02)\frac{x^2}{2} + K = 25x - 0.01x^2 + K$$

en donde K es la constante de integración. No tenemos la información suficiente para determinar el valor de K. Sin embargo, deseamos calcular el incremento en el costo que resulta de elevar x de 150 a 200 [esto es, $C(200) - C(150)$].

$$C(200) = 25(200) - 0.01(200)^2 + K = 4600 + K$$
$$C(150) = 25(150) - 0.01(150)^2 + K = 3525 + K$$

Respuesta $g(x) = x - x^2 + 4$

☛ **7.** Determine la función de costo, $C(x)$, en dólares, dado que el costo marginal es $C'(x) = 200 + 2x - 0.003x^2$ y los costos fijos son \$22,000

por consiguiente,

$$C(200) - C(150) = (4600 + K) - (3525 + K) = 1075$$

El incremento en el costo semanal sería por tanto \$1075. Nótese que la constante desconocida K no aparece en la respuesta final. ☛ **7**

EJEMPLO 7 ***(Ingreso y demanda)*** El ingreso marginal de una empresa está dado por

$$R'(x) = 15 - 0.01x$$

a) Determine la función de ingreso.

b) Encuentre la relación de demanda para el producto de la empresa.

Solución

a) La función de ingreso $R(x)$ es la integral de la función de ingreso marginal. Así que

$$R(x) = \int R'(x)\,dx = \int (15 - 0.01x)dx$$

$$= 15x - 0.01\frac{x^2}{2} + K = 15x - 0.005x^2 + K$$

en donde K es la constante de integración. A fin de determinar K, usamos el hecho de que el ingreso debe ser cero cuando no se venden unidades. Es decir, si $x = 0$, $R = 0$. Haciendo $x = 0$ y $R = 0$ en nuestra expresión de $R(x)$, obtenemos

$$0 = 15(0) - 0.005(0^2) + K$$

lo que da $K = 0$. Por consiguiente, la función de ingreso es

$$R(x) = 15x - 0.005x^2$$

b) Si cada artículo que la empresa produce se vende a un precio p, se sigue que el ingreso obtenido por la venta de x artículos está dado por $R = px$. Así que

$$px = 15x - 0.005x^2 \quad \text{o bien} \quad p = 15 - 0.005x$$

que es la relación de demanda requerida.

Respuesta
$C(x) = 22{,}000 + 200x + x^2 - 0.001x^3$

EJERCICIOS 15-1

(1-52) Determine las integrales de las siguientes funciones.

1. x^7

2. $\sqrt[3]{x}$

3. $1/x^3$

4. $1/\sqrt{x}$

5. $7x$

6. $\ln 2$

7. $\dfrac{e^3}{x}$

8. $x \ln 3$

9. $\dfrac{1}{x \ln 2}$

10. $3x + \dfrac{1}{3x}$

11. $\dfrac{e}{x} + \dfrac{x}{e}$

12. $xe^{-2} + ex^{-2}$

13. $(e^2 - 2^e)e^x$

14. $\sqrt{3x}$

15. $\dfrac{\ln 2}{x^2}$

16. ex^{e+1}

17. $x^7 + 7x + \dfrac{7}{x} + 7$

18. $e^x + x^e + e + x$

19. $7x^2 - 3x + 8 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}$

20. $3x^2 - 5x + \dfrac{7}{x} + 2e^3$

21. $(x + 2)(x + 3)$

22. $(x - 2)(2x + 3)$

23. $(x + 1)(3x - 2)$

24. $(x + 3)(2x - 1)$

25. $(x + 2)^2$

26. $(2x - 3)^2$

27. $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$

*28. $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^3$

29. $\left(2x - \dfrac{3}{x}\right)^2$

30. $x^2(x + 1)^2$

31. $x^2\left(x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$

32. $\left(\sqrt{x} + \dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)^2$

33. $x^3(x + 1)(x + 2)$

34. $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(x - \dfrac{2}{x}\right)$

35. $(x + 2)\left(3x - \dfrac{1}{x}\right)$

36. $\dfrac{(x + 2)(x + 3)}{x^2}$

*37. $\dfrac{\ln x^3}{\ln x^2}$

*38. $\dfrac{\ln x^2}{\ln x}$

*39. $\dfrac{\ln x}{\ln \sqrt{x}}$

40. $e^x \ln 3$

41. $\dfrac{e^x}{\ln 2}$

*42. $\dfrac{e^{x+2}}{e^{x+1}}$

43. $e^{\ln(x^2 + 1)}$

44. $e^{3 \ln x}$

45. $(\sqrt{x} + 3)^2$

46. $\dfrac{3\sqrt{x} + 7}{\sqrt[3]{x}}$

47. $\dfrac{3x^4 - 12}{x^2 + 2}$

48. $e^{2 \ln x}$

49. $x\, e^{\ln(x+1)}$

50. $\dfrac{4 - x}{\sqrt{x} + 2}$

51. $\dfrac{2x - 18}{\sqrt{x} + 3}$

*52. $\dfrac{x - 8}{2 - \sqrt[3]{x}}$

(53-58) Encuentre las antiderivadas de las siguientes funciones con respecto a la variable independiente según el caso.

53. $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}$

54. $3e^t - 5t^3 + 7 + \dfrac{3}{t}$

55. $\sqrt{u}(u^2 + 3u + 7)$

56. $\dfrac{2y^3 + 7y^2 - 6y + 9}{3y}$

57. $\sqrt{x}(x + 1)(2x - 1)$

58. $\dfrac{(t - t^2)^2}{t\sqrt{t}}$

(59-62) Evalúe las siguientes integrales.

59. $\displaystyle\int \frac{1 + 3x + 7x^2 - 2x^3}{x^2}\, dx$

60. $\displaystyle\int \frac{(2t + 1)^2}{3t}\, dt$

61. $\displaystyle\int \left(3\theta^2 - 6\theta + \frac{9}{\theta} + 4e^\theta\right) d\theta$

62. $\displaystyle\int (\sqrt{2}y + 1)^2\, dy$

63. Encuentre $f(x)$ si $f'(x) = (x + 2)(2x - 3)$ y $f(0) = 7$

64. Encuentre $f(e)$ si $f'(t) = \dfrac{2t + 3}{t}$ y $f(1) = 2e$

65. *(Velocidad y distancia)* La velocidad del movimiento en el instante t es $(t + \sqrt{t})^2$. Calcule la distancia recorrida en el instante t

66. *(Aceleración)* La aceleración de un móvil en el instante t es $3 + 0.5t$

a) Determine la velocidad en cualquier instante t si la velocidad inicial en $t = 0$ es de 60 unidades.

b) Calcule la distancia recorrida por el móvil en el instante t si la distancia es cero cuando $t = 0$

67. *(Costo marginal)* La función de costo marginal de una empresa es $C'(x) = 30 + 0.05x$

a) Determine la función de costo $C(x)$, si los costos fijos de la empresa son de $2000 por mes.

b) ¿Cuánto costará producir 150 unidades en un mes?

c) Si los artículos se pueden vender a $55 cada uno, ¿cuántos deben producirse para maximizar la utilidad? (*Sugerencia*: véase página 570).

68. *(Costo marginal)* El costo marginal de cierta empresa está dado por $C'(x) = 24 - 0.03x + 0.006x^2$. Si el costo de producir 200 unidades es de $22,700, encuentre:

a) la función de costo;

b) los costos fijos de la empresa;

c) el costo de producir 500 unidades.

d) Si los artículos pueden venderse a $90 cada uno, determine el nivel de producción que maximiza la utilidad.

69. *(Costo marginal)* El costo marginal de los Productos ABC es $C'(x) = 3 + 0.001x$ y el costo de fabricar 100 unidades es $1005. ¿Cuál es el costo de producir 200 unidades? Los artículos se venden a $5 cada uno. Determine el incremento en la utilidad si el volumen de venta se incrementa de 1000 a 2000.

70. *(Costo marginal)* El costo marginal de cierta empresa es $C'(x) = 5 + 0.002x$. ¿Cuáles son los costos totales variables de fabricar x unidades?

71. *(Ingreso marginal)* La función de ingreso marginal de cierta empresa es

$$R'(x) = 4 - 0.01x$$

a) Determine el ingreso obtenido por la venta de x unidades de su producto.

b) ¿Cuál es la función de demanda del producto de la empresa?

72. *(Ingreso marginal)* La función de ingreso marginal de cierta empresa es

$$R'(x) = 20 - 0.02x - 0.003x^2$$

a) Encuentre la función de ingreso.

b) ¿Cuánto ingreso se obtendrá por la venta de 100 unidades del producto de la empresa?

c) ¿Cuál es la función de demanda del producto de la empresa?

73. *(Utilidad marginal)* La función de utilidad marginal de una empresa es $P'(x) = 5 - 0.002x$ y la empresa obtiene una utilidad de $310 al venderse 100 unidades. ¿Cuál es la función de utilidad de la empresa?

***74.** *(Consumo de agua)* Durante el verano, en cierta ciudad, el consumo de agua (millones de galones por hora) está dado por la siguiente función.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t < 6 \\ t - 5 & \text{si } 6 \le t < 9 \\ 4 & \text{si } 9 \le t < 21 \\ 25 - t & \text{si } 21 \le t < 24 \end{cases}$$

donde t es el tiempo en horas durante el día (reloj de 24 horas). Determine el consumo total entre las 6 A.M. y las 9 A.M. y el consumo total durante un día completo.

***75.** *(Demanda telefónica)* Durante la jornada laboral (8 A.M. a 5 P.M.) el número de llamadas telefónicas por minuto que pasan por un conmutador varía de acuerdo con la fórmula

$$f(t) = \begin{cases} 5t & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 5 & \text{si } 1 \le t < 4 \\ 0 & \text{si } 4 \le t < 5 \\ 3 & \text{si } 5 \le t < 8 \\ 27 - 3t & \text{si } 8 \le t < 9 \end{cases}$$

donde t es el tiempo en horas, medido a partir de las 8 A.M. Calcule el número total de llamadas durante la jornada laboral. ¿Cuántas llamadas hay entre las 8 y las 11 A.M.?

76. *(Crecimiento de población)* Una población de insectos crece de un tamaño inicial de 3000 a un tamaño $p(t)$ después de un tiempo t (medido en días). Si la razón de crecimiento es $5(t + 2t^2)$ en el tiempo t, determine $p(t)$ y $p(10)$.

■ 15-2 MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

No todas las integrales pueden evaluarse en forma directa usando las integrales estándar expuestas en la sección previa. Sin embargo, muchas veces la integral dada puede reducirse a una integral estándar ya conocida mediante un cambio en la variable de integración. Tal método se conoce como **método de sustitución** y corresponde a la regla de la cadena en diferenciación.

Suponga que F es una antiderivada de f, de modo que

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

En esta ecuación podemos cambiar el nombre de la variable de x a u:

$$\int f(u)\,du = F(u) + C$$

Ahora el teorema básico del método de sustitución establece que podemos reemplazar u por $g(x)$, en donde g es cualquier función diferenciable, no constante, y esta ecuación permanece siendo verdadera. En este reemplazo, du se trata como una diferencial, en otras palabras, $du = g'(x)dx$. Así tenemos:

TEOREMA 1 Si $\int f(u)\,du = F(u) + C$, entonces,

$$\int f[g(x)]g'(x)\,dx = F[g(x)] + C$$

para cualquier función diferenciable g que no sea una función constante.

Ilustramos este teorema con algunos ejemplos antes de demostrarlo. Iniciamos con la fórmula de la potencia

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

que corresponde a tomar $f(u) = u^n$ y $F(u) = u^{n+1}/(n+1)$. Entonces, de acuerdo con el teorema 1, debemos reemplazar el argumento u en estas dos funciones por $g(x)$:

$$f[g(x)] = [g(x)]^n \qquad \text{y} \qquad F[g(x)] = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1}$$

Entonces, en este caso particular el teorema establece que

$$\int [g(x)]^n\,g'(x)\,dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

En este resultado, $g(x)$ puede ser cualquier función diferenciable que no sea constante. Por ejemplo, tomamos $g(x) = x^2 + 1$ y $n = 4$. Entonces $g'(x) = 2x$ y obtenemos

$$\int (x^2+1)^4 \cdot 2x\,dx = \frac{(x^2+1)^{4+1}}{4+1} + C$$

Después de dividir entre 2, esto se transforma en

$$\int (x^2+1)^4 x\,dx = \frac{(x^2+1)^5}{10} + C_1$$

en donde $C_1 = C/2$. (Obsérvese que C, aún puede ser cualquier constante, ya que el dividir entre 2 no altera la arbitrariedad).

☛ **8.** Establezca los resultados que se obtienen a partir de la fórmula para la potencia tomando
a) $g(x) = x^2 + 1$ y $n = \frac{1}{2}$
b) $g(x) = \ln x$ y $n = -2$

Como otro ejemplo más, tomemos $g(x) = \ln x$ y $n = 2$. Puesto que $g'(x)$ es ahora $1/x$, obtenemos el resultado

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + C \quad ☛\ \mathbf{8}$$

Es claro que al elegir diferentes funciones $f(x)$ y $g(x)$, pueden evaluarse una gran cantidad de integrales. Cuando en realidad usamos este método de sustitución con el propósito de evaluar una integral dada, es necesario reconocer cómo elegir estas funciones en tal forma que la integral dada se exprese en la forma $f(u)\,du$ cuando sustituimos $u = g(x)$, con f una función lo bastante simple para que la nueva integral pueda evaluarse con facilidad. Desarrollaremos esto más tarde, pero antes nos detendremos a demostrar el teorema.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1 Sea $u = g(x)$. Por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}F[g(x)] = \frac{d}{dx}F(u) = \frac{d}{du}F(u)\cdot\frac{du}{dx} = f(u)g'(x) = f[g(x)]g'(x)$$

En consecuencia, por la definición de antiderivada, se sigue que

$$\int f[g(x)]g'(x)\,dx = F[g(x)] + C$$

como se requería.

EJEMPLO 1 Evalúe $\int (x^2 + 3x - 7)^5(2x + 3)\,dx$

Solución Observamos que la diferencial de $x^2 + 3x - 7$ es igual a $(2x + 3)\,dx$, que aparece en la integral. Por tanto, hacemos $x^2 + 3x - 7 = u$. Luego, $(2x + 3)\,dx = du$. Usando esta sustitución, la integral se reduce a

$$\int (x^2 + 3x - 7)^5(2x + 3)\,dx = \int u^5\,du = \frac{u^6}{6} + C$$

$$= \frac{1}{6}(x^2 + 3x - 7)^6 + C$$

en donde sustituimos el valor de u otra vez.

EJEMPLO 2 Calcule $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

Respuesta
a) $\int \sqrt{x^2 + 1}\cdot 2x\,dx = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C$
b) $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = -\frac{1}{\ln x} + C$

Solución La integral dada es

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx$$

☛ **9.** Establezca las sustitución y evalúe la integral en cada uno de los siguientes casos:

a) $\int \frac{2x}{x^2 + 2}\, dx$

b) $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\, dx$ *c*) $\int xe^{x^2}\, dx$

Obsérvese que hemos separado el integrando de tal manera que la expresión $(1/x)\, dx$ ocurre como un factor distinto. Ésta es la diferencial de $\ln x$, y más aún, el resto del integrando también es una función simple de $\ln x$. De modo que hacemos $\ln x = u$. Se sigue que $(1/x)\, dx = du$. La integral dada se reduce ahora a

$$\int \frac{1}{x \ln x}\, dx = \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{1}{u} \cdot du = \ln |u| + C$$

$$= \ln |\ln x| + C$$

después de sustituir $u = \ln x$

A partir de estos ejemplos observamos que la técnica apropiada al utilizar el método de sustitución consiste *en buscar una función* u = g(x) *con una diferencial* g′(x) dx *que aparezca en la integral original. El resto del integrando debe ser una función simple de* u. La elección de la sustitución no es del todo obvia, pero pronto aprenderemos por experiencia cómo reconocer la correcta.

EJEMPLO 3 Evalúe $\int e^{x^2-5x}(2x - 5)\, dx$

Solución Observemos que $(2x - 5)\, dx$ aparece en la integral y esta cantidad es la diferencial de $x^2 - 5x$. En consecuencia, hacemos $u = x^2 - 5x$. Luego, $du = (2x - 5)\, dx$ y la integral se transforma en

$$\int e^{x^2-5x}(2x - 5)\, dx = \int e^u\, du = e^u + C = e^{x^2-5x} + C$$

Algunas veces, la diferencial exacta apropiada no aparece en la integral misma, sino que la función debe multiplicarse o dividirse por cierta constante. Esto se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 4 Calcule $\int x^2 e^{x^3+1}\, dx$

Solución La derivada de $x^3 + 1$ es $3x^2$. Puesto que la expresión $x^2\, dx$ aparecen en el integrando, esto nos sugiere hacer $u = x^3 + 1$. Luego, $du = 3x^2\, dx$, y así $x^2\, dx = \frac{1}{3}\, du$. Así,

$$\int x^2 e^{x^3+1}\, dx = \int e^u(\tfrac{1}{3}du) = \tfrac{1}{3}\int e^u\, du = \tfrac{1}{3}e^u + C = \tfrac{1}{3}e^{x^3+1} + C \quad ☛\ 9$$

EJEMPLO 5 Encuentre $\int \sqrt{2x + 3}\, dx$

Solución Escribiendo $u = 2x + 3$, encontramos que $du = 2dx$, esto es, $dx = \frac{1}{2}du$

Respuesta
a) $\ln|x^2 + 2| + C$ $(u = x^2 + 2)$
b) $2\sqrt{\ln x} + C$ $(u = \ln x)$
c) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$ $(u = x^2)$

Se sigue que

$$\int \sqrt{2x+3}\, dx = \int \sqrt{u} \cdot \tfrac{1}{2} du = \tfrac{1}{2} \int u^{1/2}\, du$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} u^{3/2} + C = \tfrac{1}{3}(2x+3)^{3/2} + C$$

El ejemplo 5 es uno de un tipo especial de sustitución denominada **sustitución lineal**. En el teorema 1 elegimos $u = ax + b$, en donde a y b son constantes ($a \neq 0$). Esto es, $g(x) = ax + b$ y $g'(x) = a$. Entonces, el enunciado del teorema se transforma en

$$\int f(ax+b) \cdot a\, dx = F(ax+b) + C_1$$

Dividiendo todo entre a y denotando $C_1/a = C$, tenemos el siguiente

TEOREMA 2

$$\text{Si} \int f(x)\, dx = F(x) + C \quad \text{entonces} \quad \int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

en donde a y b son dos constantes cualesquiera ($a \neq 0$). En otras palabras, para integrar $f(ax + b)$, manejamos $(ax + b)$ como si fuera una sola variable, y después dividimos la integral resultante entre a, el coeficiente de x.

El teorema 2 es una poderosa herramienta y puede generalizar cada integral de la tabla 1 (véase la sección 15-1) reemplazando x por $ax + b$ ($a \neq 0$). Esto nos conduce a los tipos de integrales listados en la tabla 2.

TABLA 2

1. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$	**1.** $\int (ax+b)^n\, dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$ $(a \neq 0, n \neq -1)$
2. $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln\lvert x\rvert + C$	**2.** $\int \frac{1}{ax+b}\, dx = \frac{1}{a} \cdot \ln\lvert ax+b\rvert + C\ (a \neq 0)$
3. $\int e^x\, dx = e^x + C$	**3.** $\int e^{ax+b}\, dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + C\ (a \neq 0)$

EJEMPLO 6 Evalúe $\int (3x - 7)^5 dx$

Solución Por el primer resultado general de la tabla 2,

$$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$$

☛ **10.** Utilizando una sustitución lineal apropiada, evalúe:

a) $\int \frac{1}{\sqrt{2-7x}}\,dx$

b) $\int \frac{x}{x-2}\,dx$

Debemos hacer $a = 3$, $b = -7$ y $n = 5$ en esta fórmula general con el objetivo de evaluar la integral requerida.

$$\int (3x-7)^5\,dx = \frac{(3x-7)^{5+1}}{(3)(5+1)} + C = \frac{1}{18}(3x-7)^6 + C$$

EJEMPLO 7 Calcule $\int e^{5-3x}\,dx$

Solución Haciendo $a = -3$ y $b = 5$ en la fórmula 3 de la tabla,

$$\int e^{5-3x}\,dx = \frac{e^{5-3x}}{(-3)} + C = -\frac{1}{3}e^{5-3x} + C$$

EJEMPLO 8 Evalúe $\int x\sqrt{1-x}\,dx$

Solución Nuevamente este ejemplo puede resolverse por medio de una sustitución lineal, aunque no es difícil hacerlo directamente como en los ejemplos 6 y 7. Tomamos $u = 1 - x$, de modo que $du = -dx$. El factor $\sqrt{1-x}$ en el integrando se transforma en $\sqrt{u}$, ya que $x = 1 - u$. Así,

$$\int x\sqrt{1-x}\,dx = \int (1-u)\sqrt{u}(-du) = -\int (u^{1/2} - u^{3/2})\,du$$

$$= -\frac{2}{3}u^{3/2} + \frac{2}{5}u^{5/2} + C$$

$$= -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2} + \frac{2}{5}(1-x)^{5/2} + C \quad ☛ \ \mathbf{10}$$

Respuestas
a) $-\frac{2}{7}\sqrt{2-7x} + C$
$(u = 2 - 7x)$
b) $(x-2) + 2\ln|x-2| + C = x + 4\ln|x-2| + C_1$
$(u = x - 2)$

EJERCICIOS 15-2

(1-14) Por medio de una sustitución lineal o aplicando el teorema 1 evalúe las siguientes integrales.

1. $\int (2x+1)^7\,dx$

2. $\int \sqrt{3x-5}\,dx$

3. $\int \frac{1}{(2-5t)^2}\,dt$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{5-2x}}\,dx$

5. $\int \frac{1}{2y-1}\,dy$

6. $\int \frac{1}{1-3t}\,dt$

7. $\int \frac{2u-1}{4u^2-1}\,du$

8. $\int \frac{2x+3}{9-4x^2}\,dx$

9. $\int e^{3x+2}\,dx$

10. $\int e^{5-2x}\,dx$

11. $\int \frac{e^5}{e^x}\,dx$

12. $\int \frac{e^{2x}}{e^{5-x}}\,dx$

13. $\int \frac{e^{2x+3}}{e^{1-x}}\,dx$

14. $\int \left(\frac{e^3}{e^{x-1}}\right)^2 dx$

(15-64) Mediante una sustitución apropiada encuentre las siguientes antiderivadas.

15. $\int (x^2+7x+3)^4(2x+7)\,dx$

16. $\int (x+2)(x^2+4x+2)^{10}\,dx$

17. $\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+1)^3}\,dx$

18. $\int \frac{4x-1}{2x^2-x+1}\,dx$

19. $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

20. $\int x\sqrt{3x^2+4}\,dx$

21. $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

22. $\int \frac{x^2}{x^3+7}\,dx$

23. $\int \frac{t^2}{\sqrt[3]{t^3+8}}\,dt$

24. $\int t^2\sqrt{1+t^3}\,dt$

25. $\int \frac{(\sqrt{x}+7)^5}{\sqrt{x}}\,dx$

26. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x})}\,dx$

27. $\int \sqrt{x}\,(2+x\sqrt{x})^5\,dx$

28. $\int x\sqrt{x}\,(1+x^2\sqrt{x})^4\,dx$

29. $\int te^{t^2}\,dt$

30. $\int x^3e^{x^4}\,dx$

31. $\int \frac{e^{x^n}}{x^{1-n}}\,dx$

32. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

33. $\int \frac{e^{3/x}}{x^2}\,dx$

34. $\int \frac{x^2}{e^{x^3}}\,dx$

35. $\int \frac{x}{e^{x\sqrt{x}}}\,dx$

36. $\int \frac{x^2+x^{-2}}{x^3-3x^{-1}}\,dx$

37. $\int x^2e^{x^3}\,dx$

38. $\int x^{n-1}e^{x^n}\,dx$

39. $\int \frac{(2x-1)e^{x^2}}{e^x}\,dx$

40. $\int \frac{1}{e^xe^{1/x^2}}\,dx$

41. $\int \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx$

42. $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

43. $\int \frac{e^{3x}}{3-e^{3x}}\,dx$

44. $\int \frac{e^{x/2}}{1-e^{x/2}}\,dx$

45. $\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\,dx$

46. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$

47. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

48. $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$

49. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

50. $\frac{1}{x(1+\ln x)^4}\,dx$

51. $\int \frac{1}{x}(\ln x)^3\,dx$

52. $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx$

53. $\int \frac{1}{x(1+\ln x)}\,dx$

54. $\int \frac{1}{(x+3)\ln(x+3)}\,dx$

55. $\int \frac{3t^2+1}{t(t^2+1)}\,dt$

56. $\int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy$

57. $\int (x+2)\sqrt{x^2+4x+1}\,dx$

58. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+7}}\,dx$

59. $\int \frac{\ln(2x)}{x}\,dx$

60. $\int e^{x^2+\ln x}\,dx$

61. $\int \frac{t^2}{t-1}\,dt$

62. $\int \frac{t^3}{t-1}\,dt$

63. $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

(*Sugerencia*: Haga $\sqrt{x+1}=u$ o $x+1=u^2$)

64. $\int x^2\sqrt{x-3}\,dx$

65. Encuentre $g(x)$ si $g'(x)=x/\sqrt{x^2+1}$ si $g(0)=2$

66. Encuentre $f(e)$ si $f'(x)=(x+x\ln x)^{-1}$ y $f(1)=0$

(67-72) Si $f'(x)=g(x)$, calcule las siguientes integrales.

67. $\int g(3x)\,dx$

68. $\int x\,g(x^2)\,dx$

69. $\int \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

70. $\int e^x\,g(e^x)\,dx$

71. $\int x^{-1}\,g(\ln x)\,dx$

72. $\int x^2\,g(x^3)\,dx$

73. *(Costo marginal)* El costo marginal (en dólares) de una compañía que fabrica zapatos está dado por

$$C'(x)=\frac{x}{1000}\sqrt{x^2+2500}$$

en donde x es el número de pares de zapatos producidos. Si los costos fijos son de \$100, determine la función de costo.

74. *(Costo marginal)* Un industrial textil tiene un costo marginal (en dólares) por rollo de una tela particular dado por $C'(x)=20xe^{0.01x^2}$, en donde x es el número de rollos producidos de la tela. Si los costos fijos ascienden a \$1500, determine la función de costo.

75. *(Tasa de desempleo)* Durante una crisis económica reciente, el porcentaje de desempleados creció a razón de

$$P'(t) = \frac{0.4e^{-0.1t}}{(1 + e^{-0.1t})^2}$$

donde t es el tiempo en meses. Dado que en $t = 0$ había 4% de desempleados, ¿qué porcentaje estaba desempleado:

a) 10 meses después? *b*) 20 meses después?

76. *(Recurso natural)* Actualmente una compañía maderera tiene una reserva de 100 millones de pies de madera en tablones. La razón a la cual esta compañía corta y vende la madera es $R(t) = 3e^{0.06t}$ millones de pies por año, donde t es el tiempo en años medidos a partir de ahora. Calcule la reserva que quedará después de t años. ¿Cuántos años durará la reserva sin ninguna reforestación?

77. *(Producción petrolífera)* La razón de producción de un pozo petrolero en barriles diarios varía de acuerdo con la fórmula

$$P'(t) = \frac{1{,}200{,}000}{(t + 1600)^{3/2}}$$

donde t es el tiempo (en días) a partir del inicio de la producción. Calcule la producción total hasta el tiempo t. También encuentre la producción total posible, esto es, $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

78. *(Crecimiento de población)* Una población de bacterias está creciendo de tal manera que la razón de crecimiento en el tiempo t (medido en horas), es igual a $1000(1 + 3t)^{-1}$. Si el tamaño de la población en $t = 0$ es 1000, ¿cuál será su tamaño después de 4 horas?

79. *(Reacción de una droga)* La velocidad de producción de anticuerpos t horas después de inyectar un suero está dada por $f(t) = 10t/(t^2 + 9)$. Encuentre el valor de t en el cual $f(t)$ es el máximo y el número total de anticuerpos producidos hasta ese tiempo.

■ 15-3 TABLAS DE INTEGRALES

En la sección previa, presentamos el método de sustitución, por medio del cual ciertas integrales complejas pueden reducirse a una de las tres integrales estándar listadas en la sección 15-1. Aparte del método de sustitución, existen otras técnicas que son de utilidad cuando se requiere evaluar integrales, una de éstas se expondrá en la sección 15-4.

En general, la evaluación de integrales es una tarea que requiere considerable destreza y a menudo ingenio. La variedad de métodos de que se dispone para este fin es una indicación de este hecho. Más aún, no es posible formular reglas contundentes y rápidas acerca de que tal método o sustitución funcionará en una situación dada, sino que es necesario desarrollar a través de la experiencia una intuición de cuál método es probablemente el más conveniente.

Al afrontar estas dificultades, la manera apropiada de evaluar integrales es usando una tabla de integrales. Una tabla de integrales consta de una lista de un gran número de integrales, junto con sus valores. Para evaluar una integral determinada, sólo es necesario extraer la respuesta de la tabla, sustituyendo los valores de cualesquiera constantes que sean necesarias. Existe un buen número de tales tablas, algunas más completas que otras; en el apéndice II aparece una tabla de integrales breve; sin embargo, es lo bastante completa para evaluar todas las integrales que aparecen en nuestros ejemplos y ejercicios.

Las integrales de esta tabla están clasificadas de acuerdo con ciertos encabezados con la finalidad de facilitar su uso. Por ejemplo, todas las integrales en que aparece un factor de la forma $\sqrt{ax + b}$ están listadas juntas y todos los integrandos en que aparece $\sqrt{x^2 + a^2}$ también están listados juntos, así como aquellos en que intervienen funciones exponenciales, etcétera.

EJEMPLO 1 Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{(4 - x^2)^{3/2}}\, dx$

Solución Debemos buscar en la tabla hasta que encontremos una integral de la misma forma que la dada. La sección titulada "Integrales que contienen $\sqrt{a^2 - x^2}$" es el lugar apropiado para buscarla, y por la fórmula 33, encontramos el resultado

$$\int \frac{1}{(a^2 - x^2)^{3/2}}\, dx = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Esto es válido para cualquier valor distinto de cero de la constante a, de modo que si hacemos $a = 2$, obtenemos la integral requerida.

$$\int \frac{1}{(4 - x^2)^{3/2}}\, dx = \frac{1}{4} \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} + C$$

☛ **11.** Utilice la tabla para encontrar
$\int \frac{x}{3x - 7}\, dx$

Observe que debemos sumar la constante de integración. ☛ **11**

EJEMPLO 2 Encuentre $\int \frac{1}{2x^2 - 7x + 4}\, dx$

Solución Si la comparamos con la integral estándar

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\, dx$$

que aparece en la tabla de integrales, tenemos que $a = 2$, $b = -7$ y $c = 4$. En consecuencia,

$$b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(2)(4) = 49 - 32 = 17 > 0$$

Cuando $b^2 - 4ac > 0$, tenemos que (véase la fórmula 66)

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\, dx = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right|$$

Sustituyendo los valores de a, b y c, resulta que

$$\int \frac{1}{2x^2 - 7x + 4}\, dx = \frac{1}{\sqrt{17}} \ln \left| \frac{4x - 7 - \sqrt{17}}{4x - 7 + \sqrt{17}} \right| + C$$

en donde C es la constante de integración que siempre debe incluirse.

Algunas veces el uso de las tablas no es así de directo y puede ser necesario usar la tabla dos o más veces al evaluar una integral. El siguiente ejemplo ilustra lo anterior.

EJEMPLO 3 Encuentre $\int \frac{1}{x^2\sqrt{2 - 3x}}\, dx$

Solución Si buscamos en las integrales que incluyen $\sqrt{ax + b}$ en la tabla, entonces la fórmula 23 establece que

$$\int \frac{1}{x^n\sqrt{ax + b}}\, dx = -\frac{\sqrt{ax + b}}{(n - 1)bx^{n-1}} - \frac{(2n - 3)a}{(2n - 2b)} \int \frac{1}{x^{n-1}\sqrt{ax + b}}\, dx;\ (n \neq 1)$$

Respuesta
$\frac{1}{3}x + \frac{7}{9} \ln|3x - 7| + C$

En nuestro ejemplo, $n = 2$, $a = -3$ y $b = 2$. En consecuencia,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{2-3x}}\,dx = -\frac{\sqrt{2-3x}}{2x} + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x\sqrt{2-3x}}\,dx \tag{1}$$

A fin de evaluar la integral del lado derecho de la ecuación (1), buscamos de nuevo en la parte de la tabla de integrales en donde aparezca $\sqrt{ax+b}$; la fórmula 22 da

$$\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right|, \text{ si } b > 0$$

Haciendo $a = -3$ y $b = 2$ en la expresión anterior, tenemos

$$\int \frac{1}{x\sqrt{2-3x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2}}{\sqrt{2-3x}+\sqrt{2}}\right|$$

Usando este valor en el lado derecho de la ecuación (1),

☛ **12.** Utilice la tabla para encontrar
$\int (\ln x)^2\,dx$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{2-3x}}\,dx = -\frac{\sqrt{2-3x}}{2x} + \frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2}}{\sqrt{2-3x}+\sqrt{2}}\right| + C$$

en donde otra vez sumamos la constante de integración C. ☛ **12**

Algunas veces, antes de aplicar una tabla de integrales, es necesario realizar un cambio de variable mediante sustitución con el objetivo de reducir la integral dada a una que aparezca en la tabla.

***EJEMPLO 4** Encuentre $\int \frac{e^x}{(e^x+2)(3-e^x)}\,dx$

Solución En este caso, no encontramos la integral en la tabla. En primer término, cambiamos la variable de integración. Es claro que, $e^x\,dx$, la diferencial de e^x aparece en el integrando, de modo que $e^x = y$. Luego, $e^x\,dx = dy$ y la integral dada ahora se transforma en

$$\int \frac{e^x}{(e^x+2)(3-e^x)}\,dx = \int \frac{1}{(y+2)(3-y)}\,dy$$

Una integral general de esta forma aparece en la tabla (fórmula 15):

$$\int \frac{1}{(ax+b)(cx+d)}\,dx = \frac{1}{bc-ad}\ln\left|\frac{cx+d}{ax+b}\right| \quad (bc-ad \neq 0)$$

En nuestro ejemplo, $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$ y $d = 3$, y x en lugar de y. Así,

$$\int \frac{1}{(y+2)(3-y)}\,dy = \frac{1}{(2)(-1)-(1)(3)}\ln\left|\frac{-y+3}{y+2}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{5}\ln\left|\frac{3-y}{y+2}\right| + C$$

Respuesta
$x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$

☛ **13.** Utilice una sustitución y luego la tabla para encontrar $\int x\sqrt{x^4+1}\,dx$

en donde C es la constante de integración. Sustituyendo $y = e^x$, tenemos

$$\int \frac{e^x}{(e^x+2)(3-e^x)}\,dx = -\frac{1}{5}\ln\left|\frac{3-e^x}{e^x+2}\right| + C \quad ☛ \textbf{13}$$

Siempre que se evalúe una integral usando una tabla de integrales, podemos verificar que la respuesta obtenida es correcta derivándola: el resultado de la derivación debería ser el integrando original. Por ejemplo, es fácil verificar por los métodos estándar de derivación que

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{3-e^x}{e^x+2}\right|\right) = \frac{e^x}{(e^x+2)(3-e^x)}$$

Esto representa una comprobación de la respuesta obtenida en el ejemplo 4.

El lector puede preguntarse cómo se construyeron las tablas de integrales en un principio. Existen en realidad, varias técnicas (aparte del método general de sustitución) que son de utilidad al evaluar integrales y que se usan al construir tablas del tipo dado en el apéndice. En la siguiente sección, se hará una breve exposición de una de las más importantes de tales técnicas.

Si el lector ha desarrollado la suficiente destreza en el uso de las integrales, la técnica dada en la próxima sección no la utilizará con mucha frecuencia. Sin embargo, será de utilidad, dado que en algunas ocasiones el integrando considerado no estará listado en la tabla de que se disponga. En tal caso, esta técnica puede ser útil al transformar la integral dada en una que esté listada.

Respuesta La sustitución $u = x^2$: $\frac{1}{4}x^2\sqrt{x^4+1} + \frac{1}{4}\ln\left|x^2+\sqrt{x^4+1}\right| + C$

EJERCICIOS 15-3

(1-26) Aplique tablas de integrales a fin de evaluar las siguientes integrales.

1. $\int \frac{1}{x^2-3x+1}\,dx$

2. $\int \frac{1}{2x^2+5x-3}\,dx$

3. $\int \frac{x}{(2x-3)^2}\,dx$

4. $\int \frac{y}{(3y+7)^5}\,dy$

5. $\int \frac{\sqrt{3x+1}}{x}\,dx$

6. $\int \frac{t}{(2t+3)^{5/2}}\,dt$

7. $\int \frac{1}{t\sqrt{16+t^2}}\,dt$

8. $\int \frac{u^2}{\sqrt{u^2+25}}\,du$

9. $\int \frac{y^2}{\sqrt{y^2-9}}\,dy$

10. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}\,dx$

11. $\int \frac{1}{x\sqrt{3x+4}}\,dx$

12. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{25-x^2}}\,dx$

13. $\int \frac{1}{x(2x+3)^2}\,dx$

14. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$

15. $\int x^2(x^2-1)^{3/2}\,dx$

16. $\int x^3(\ln x)^2\,dx$

17. $\int x^3 e^{2x}\,dx$

18. $\int y^2 e^{-3y}\,dy$

19. $\int \sqrt{\frac{2x+3}{4x-1}}\,dx$

20. $\int \frac{x^2}{3x-1}\,dx$

***21.** $\int \frac{e^x}{(1-e^x)(2-3e^x)}\,dx$

*22. $\int \frac{1}{x \ln x(1 + \ln x)}\, dx$

*23. $\int \frac{x}{(x^2 + 1)(2x^2 + 3)}\, dx$

*24. $\int \frac{y}{(2y^2 + 1)(3y^2 + 2)}\, dy$

*25. $\int \frac{\ln x}{x(3 + 2 \ln x)}\, dx$

*26. $\int x^5 e^{-x^2}\, dx$

■ 15-4 INTEGRACIÓN POR PARTES

El método de integración por partes puede utilizarse a menudo con el propósito de evaluar una integral, cuyo integrando consista de un producto de funciones. Es análogo a la fórmula del producto del cálculo diferencial y en realidad se deduce de ella.

Del cálculo diferencial, sabemos que

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

o bien,

$$u(x)v'(x) = \frac{d}{dx}[u(x)v(x)] - u'(x)v(x)$$

Integrando ambos lados con respecto a x, obtenemos

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx \tag{1}$$

Esta ecuación por lo regular se escribe en la forma

$$\boxed{\int u\, dv = uv - \int v\, du}$$

después de introducir las diferenciales $du = u'(x)\, dx$ y $dv = v'(x)\, dx$. Una manera alternativa de escribirla es como sigue.

Sea $u(x) = f(x)$ y $v'(x) = g(x)$. Se sigue que podemos escribir $v(x) = G(x)$, en donde $G(x)$ denota la integral de $g(x)$ y, entonces, la ecuación (1) se transforma en

$$\boxed{\int f(x)g(x)\, dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\, dx}$$

Esta fórmula expresa la integral del producto $f(x)g(x)$ en términos de la integral del producto $f'(x)G(x)$. Es útil porque en muchos casos la integral de $f'(x)G(x)$ es más fácil de evaluar que la integral del producto original $f(x)g(x)$. El siguiente ejemplo ilustra lo anterior.

EJEMPLO 1 Evalúe $\int xe^{2x}\, dx$

Solución Elijamos $f(x) = x$ y $g(x) = e^{2x}$, de modo que la integral dada tiene la forma $\int f(x)g(x)\,dx$. Se sigue que $f'(x) = 1$ y $G(x)$, la integral de $g(x)$, está dada por $G(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$, en donde C_1 es una constante de integración. Sustituyendo estas expresiones en la fórmula de integración por partes,

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}\int xe^{2x}\,dx &= x(\tfrac{1}{2}e^{2x} + C_1) - \int (1)(\tfrac{1}{2}e^{2x} + C_1)\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}xe^{2x} + C_1x - \tfrac{1}{2}\int (e^{2x} + 2C_1)\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}xe^{2x} + C_1x - \tfrac{1}{4}e^{2x} - C_1x + C\\ &= \tfrac{1}{4}(2x - 1)e^{2x} + C\end{aligned}$$

en donde otra vez C es una constante de integración.

La integral de este ejemplo también pudo encontrarse usando la fórmula 69 del apéndice II. El lector deberá verificar que la respuesta obtenida sea la misma que la del ejemplo 1.

Observación Tiene que advertirse que la primera constante de integración C_1 en el ejemplo anterior, que surge integrar $g(x)$ para obtener $G(x)$, se cancela en la respuesta final. Esto siempre sucede al integrar por partes. Por consiguiente, en la práctica nunca debemos preocuparnos por incluir una constante de integración en $G(x)$, sino simplemente en tomar $G(x)$ como cualquier antiderivada particular de $g(x)$. ☛ **14**

☛ **14.** Utilice integración por partes para encontrar

$$\int xe^{-3x}\,dx$$

Al usar este método, es importante realizar la elección correcta de $f(x)$ y $g(x)$ al expresar el integrando original como un producto. De otra manera, la integral de $f'(x)G(x)$ puede que no resulte más fácil de evaluar que la integral de $f(x)g(x)$. Por ejemplo, si cambiamos las elecciones en el ejemplo 1, haciendo $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = x$, entonces, $f'(x) = 2e^{2x}$ y $G(x) = \frac{1}{2}x^2$, de modo que la fórmula de integración por partes se convierte en

$$\int e^{2x}x\,dx = e^{2x}\cdot\tfrac{1}{2}x^2 - \int 2e^{2x}\cdot\tfrac{1}{2}x^2\,dx$$

Esta ecuación es muy correcta, pero no es de mucha utilidad, dado que el integrando de la derecha es más complicado que nuestra integral original.

Un criterio evidente al elegir f y g es que debemos ser capaces de integrar $g(x)$ para determinar $G(x)$. Por lo regular, elegiríamos $g(x)$ en tal forma que su antiderivada sea una función bastante simple. Los siguientes principios serán de utilidad al decidir sobre la elección de f y g.

1. Si el integrando es el producto de un polinomio en x y una función exponencial, a menudo es útil elegir $f(x)$ como el polinomio dado. El ejemplo anterior ilustra este tipo de elección.
2. Si el integrando contiene una función logarítmica como factor, con frecuencia conviene elegir esta función como $f(x)$. Si el integrando consta por completo de

Respuesta

$$-\tfrac{1}{3}xe^{-3x} + \tfrac{1}{3}\int e^{-3x}\,dx = -\tfrac{1}{3}xe^{-3x} - \tfrac{1}{9}e^{-3x} + C$$

una función logarítmica, podemos elegir $g(x) = 1$. En el siguiente ejemplo se ilustran estos principios.

EJEMPLO 2 Evalúe $\int x^2 \ln x \, dx (x > 0)$

Solución Elegimos $f(x) = \ln x$ y $g(x) = x^2$. Luego, $f'(x) = 1/x$ y $G(x) = \frac{1}{3}x^3$. Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx$$

$$\int \ln x \cdot x^2\,dx = \ln x \cdot \frac{1}{3}x^3 - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{3}x^3\,dx$$

☛ **15.** Utilice integración por partes para encontrar $\int x^{-3} \ln x \, dx$

En consecuencia,

$$\int x^2 \ln x\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \tfrac{1}{3}\int x^2\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \tfrac{1}{9}x^3 + C$$ ☛ **15**

EJEMPLO 3 Calcule $\int \ln(2x - 1)\,dx$

Solución En este caso, podemos expresar el integrando como un producto escribiendo $f(x) = \ln(2x - 1)$ y $g(x) = 1$. Se sigue que

$$f'(x) = \frac{1}{2x - 1} \cdot 2 = \frac{2}{2x - 1} \text{ y } G(x) = x$$

Integrando por partes resulta

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx$$

o bien,

$$\begin{aligned}
\int \ln(2x - 1)\,dx &= \ln(2x - 1) \cdot x - \int \frac{2}{2x - 1} \cdot x\,dx \\
&= x \ln(2x - 1) - \int \frac{2x}{2x - 1}\,dx \\
&= x \ln(2x - 1) - \int \left(1 + \frac{1}{2x - 1}\right) dx \qquad \text{por división larga*} \\
&= x \ln(2x - 1) - x - \frac{\ln|2x - 1|}{2} + C \\
&= (x - \tfrac{1}{2}) \ln(2x - 1) - x + C
\end{aligned}$$

Respuesta $-\dfrac{\ln x}{2x^2} - \dfrac{1}{4x^2} + C$

*De manera alterna, puede sustituir $n = 2x - 1$

☛ **16.** Determine $\int x^3 e^{x^2}\,dx$

[*Sugerencia*: Primero sustituya $u = x^2$]

En el último paso hemos escrito $\ln |2x - 1| = \ln (2x - 1)$, ya que la integral sólo está definida si $2x - 1 > 0$

EJEMPLO 4 Encuentre $\int x^2 e^{mx}\,dx \quad (m \neq 0)$

Solución Aquí elegimos $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^{mx}$. Luego, $f'(x) = 2x$ y $G(x) = e^{mx}/m$. Usando la fórmula de integración por partes:

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx \tag{2}$$

o asimismo

$$\int x^2 e^{mx}\,dx = x^2 \cdot \frac{e^{mx}}{m} - \int 2x \cdot \frac{e^{mx}}{m}\,dx = \frac{1}{m}x^2 e^{mx} - \frac{2}{m}\int x e^{mx}\,dx \tag{3}$$

(Compare lo anterior con la fórmula 70 del apéndice II). Con el propósito de evaluar la integral de la derecha, usamos otra vez integración por partes, con $f(x) = x$ y $g(x) = e^{mx}$. Entonces, $f'(x) = 1$ y $G(x) = e^{mx}/m$. Aplicando la ecuación (2),

$$\int x e^{mx}\,dx = x \cdot \frac{e^{mx}}{m} - \int 1 \cdot \frac{e^{mx}}{m}\,dx = \frac{x}{m}e^{mx} - \frac{1}{m} \cdot \frac{e^{mx}}{m}$$

Sustituyendo el valor de esta integral en la ecuación (3), resulta

$$\int x^2 e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}x^2 e^{mx} - \frac{2}{m}\left(\frac{x}{m}e^{mx} - \frac{1}{m^2}e^{mx}\right) + C$$

$$= \frac{1}{m^3}e^{mx}(m^2x^2 - 2mx + 2) + C$$

en donde por último sumamos la constante de integración C ☛ **16**

Respuesta
Integral $= \frac{1}{2}e^{x^2}(x^4 - 2x^2 + 2) + C$

EJERCICIOS 15-4

(1-34) Evalúe las siguientes integrales.

1. $\int x \ln x\,dx$

2. $\int x^3 \ln x\,dx$

3. $\int x^n \ln x\,dx$

4. $\int \ln (x + 1)\,dx$

5. $\int \ln x\,dx$

6. $\int \frac{\ln (x^2)}{x^2}\,dx$

7. $\int \sqrt{x} \ln x\,dx$

8. $\int x^3 \ln (x^3)\,dx$

9. $\int \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

10. $\int (x^2 + 5)\ln x\,dx$

11. $\int (x + 1)^2 \ln (x + 1)\,dx$

12. $\int (x - 2)^3 \ln (x - 2)\,dx$

13. $\int \ln (ex)\,dx$

14. $\int \ln (2x)\,dx$

15. $\int x^2 \ln (ex)\,dx$

16. $\int x^3 \ln (3x)\,dx$

***17.** $\int \log x\,dx$

***18.** $\int \log_2 x\,dx$

***19.** $\int x \log x\,dx$

***20.** $\int x^3 \log x\,dx$

21. $\int x\, e^x\, ax$

22. $\int x\, e^{-x}\, dx$

23. $\int x\, e^{mx}\, dx$

24. $\int \frac{x}{e^{2x}}\, dx$

25. $\int (2x + 1)e^{3x}\, dx$

***26.** $\int e^{x+lnx}\, dx$

27. $\int \ln (x^x)\, dx$

28. $\int \ln (xe^x)\, dx$

29. $\int x^2 e^x\, dx$

30. $\int y^2 e^{3y}\, dy$

31. $\int x^3 e^{x^2}\, dx$ (*Sugerencia*: Sea $x^2 = u$)

32. $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$ (*Sugerencia*: Sea $\sqrt{x} = u$)

33. $\int \ln (x^{x^2})\, dx$

34. $\int e^{2x} \ln (e^x)\, dx$

35. Mediante integración por partes verifique la fórmula 74 del apéndice II.

36. Compruebe la fórmula 64 del apéndice II.

37. *(Costo marginal)* Una empresa tiene un costo marginal por unidad de su producto dado por

$$C'(x) = \frac{5000 \ln (x + 20)}{(x + 20)^2}$$

en donde x es el nivel de producción. Si los costos fijos ascienden a $2000, determine la función de costo.

38. *(Epidemia)* Durante el desarrollo de una epidemia la razón de llegada de casos nuevos a cierto hospital es igual a $5\, te^{-(t/10)}$, donde t está medido en días, $t = 0$ es el inicio de la epidemia. ¿Cuántos casos ha tratado el hospital en total cuando $t = 5$ y cuando $t = 10$?

REPASO DEL CAPÍTULO 15

Términos, símbolos y conceptos importantes

15.1 Cálculo diferencial, cálculo integral. Integración. Antiderivada o integral indefinida. Constante de integración, integrando, variable de integración; $\int f(x)\, dx$.

Fórmula de la potencia para integración.

15.2 Método de sustitución. Sustitución lineal.

15.3 Tabla de integrales.

15.4 Integración por partes.

Fórmulas

Si $F'(x) = f(x)$ entonces $\int f(x)\, dx = F(x) + C$

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n + 1} + C \qquad (n \neq 1)$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x| + C$$

$$\int e^x\, dx = e^x + C$$

Propiedades de las integrales:

$$\int cf(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

$$\frac{d}{dx} \int f(x)\, dx = f(x)$$

$$\int \frac{d}{dx} F(x)\, dx = F(x) + C$$

Si $\int f(u)\, du = F(u) + C$, entonces podemos sustituir $u = g(x)$ y $du = g'(x)dx$. Esto es,

$$\int f[g(x)]g'(x)\, dx = F[g(x)] + C$$

Si $\int f(u)\, du = F(u) + C$, entonces

$$\int f(ax + b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$$

Integración por partes:

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx$$

en donde $G(x) = \int g(x)\,dx$

o $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 15

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) La integral del producto de dos funciones integrables es igual al producto de las integrales.

b) La integral de la diferencia de dos funciones integrables es igual a la diferencia de las integrales.

c) La antiderivada de una función integrable es única.

d) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + C$

e) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

f) Si $f'(x) = g'(x)$ entonces $f(x) = g(x)$

g) $\int e^u du = e^u + C$

h) $\int \frac{dt}{e^t} = \frac{1}{e^t} + C$

i) $\int 3f(x)dx = 3\int f(x)dx$

j) $\int [g(x)]^n dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1}, \ (n \neq -1)$

k) $\int \frac{dx}{x^3} = \ln|x^3| + C$

l) $\int e^n dx = \frac{e^{n+1}}{n+1} + C$

m) $\int e^{x^2} dx = e^{x^3/3} + C$

(2-11) Calcule las siguientes integrales.

2. $\int (x-2)(6x-4)dx$

3. $\int (x^2+1)^3 dx$

***4.** $\int (x^2+1)^3 2x dx$

5. $\int \sqrt[3]{e^x} dx$

6. $\int (\log 5) dx$

7. $\int \frac{e^{x+1}}{e^{x-1}}\,dx$

8. $\int \frac{3x^4+2x^3}{x^2}\,dx$

9. $\int \sqrt{x+1}\,dx$

***10.** $\int t^2\sqrt{t^3+4}\,dt$

11. $\int (x^{10}+x^9)dx$

(12-19) Por medio de una sustitución adecuada, evalúe las siguientes integrales.

12. $\int 2x(x^2-7)^{10}dx$

13. $\int e^{x^2} 2x dx$

14. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$

15. $\int \sqrt[3]{e^x+1}\,e^x dx$

16. $\int \frac{\ln(t)}{t}\,dt$

17. $\int \frac{e^{-1/t}}{t^2}\,dt$

18. $\int \frac{1}{x\sqrt{10+\ln x}}\,dx$

***19.** $\int t^t(1+\ln t)dt$

(20-39) Con ayuda de las tablas de este libro u otros, calcule las siguientes integrales.

20. $\int \frac{2t-3}{(t-1)(t-3)}\,dt$

21. $\int \frac{5u}{\sqrt{2u+1}}\,du$

22. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\,dx$

23. $\int \frac{\sqrt{1-t^2}}{6t}\,dt$

24. $\int \frac{y^2}{e^y}\,dy$

25. $\int x^3 e^x dx$

26. $\int \frac{1}{1+4e^{2x}}\,dx$

***27.** $\int \log_2 x dx$

28. $\int \frac{2}{x(x^2+1)}\,dx$

29. $\int \frac{e^1/x}{x^2}\,dx$

30. $\int \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,dx$

31. $\int x \ln x^2 dx$

32. $\int 6\ln\left(\frac{x}{3}\right)dx$

33. $\int \frac{\sqrt{m^2 + 9}}{2m}\, dm$

34. $\int \frac{dt}{t^2 + 10t + 25}$

35. $\int \frac{dt}{t^2 + 10t + 20}$

36. $\int \frac{5}{x(2x^4 + 1)}\, dx$

37. $\int \frac{du}{u\sqrt{2u^4 + 9}}$

38. $\int \frac{\ln x^2}{x}\, dx$

39. $\int \frac{[\ln x^2]^2}{x}\, dx$

40. $\int \frac{e^{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$

41. Si $f'(x) = \ln(x)$ y $f(1) = 1$, determine $f(t)$

42. Si $g'(x) = e^x$ y $g(0) = 5$, determine $g(x)$

43. Si $h'(x) = 2x + 3$ y $h(0) = 5$, determine el valor de $h(1)$

44. Si $g'(x) = 1 + \ln(x)$ y $g(1) = 2$, determine el valor de $g(e)$

45. *(Costo marginal)* Si el costo marginal de cierta empresa a un nivel de producción x es $C'(x) = 10x$ y el costo de fabricar 30 unidades es \$5000, determine el costo de fabricar 40 unidades.

46. *(Ingreso marginal)* La función de ingreso marginal de una empresa es $R'(x) = 10 - 0.02x$

   a) Determine la función de ingreso.

   b) ¿Qué ingreso se obtendrá al vender 200 artículos?

   c) ¿Cuál es la función de demanda del producto de la empresa?

   d) ¿Cuántas unidades podrá vender la empresa si les fija un precio de \$5 a cada una?

47. *(Ingreso marginal)* El ingreso marginal de una empresa está dado por $R'(x) = 0.1 - 0.002x^2 - 0.000025x^{3/2}$

   a) Determine la función de ingreso.

   b) Determine la relación de demanda.

48. *(Ingreso y demanda)* El ingreso marginal de una empresa por su producto es $R'(x) = 20(35 - x)e^{-x/25}$. Determine la función de ingreso y la ecuación de demanda del producto.

49. *(Costo extra de producción)* Una compañía produce 200 unidades por semana de producto. Sabe que el costo marginal está dado por

$$C'(x) = 100 - 0.04x$$

Suponiendo que este costo marginal se mantenga, determine el costo extra por semana que debería considerar al elevar la producción de 200 a 300 unidades por semana.

50. *(Ingreso y demanda)* El ingreso marginal de una empresa está dado por la expresión $R'(x) = 30 - 0.02x$

   a) Determine la función de ingreso.

   b) Determine la relación de demanda para el producto de la empresa.

51. *(Costo marginal)* La función de costo marginal de una empresa es $C'(x) = 50 + 0.04x$

   a) Determine la función de costo $C(x)$, si los costos fijos de la empresa son de \$3000 al mes.

   b) ¿Cuánto costará producir 250 unidades en un mes?

52. *(Ingreso marginal)* La función de ingreso marginal de cierta empresa es

$$R'(x) = 50 - 0.04x - 0.0018x^2$$

   a) Determine la función de ingreso.

   b) ¿Cuál es el ingreso que se obtendrá por la venta de 200 unidades del producto de la empresa?

   c) Determine la función de demanda del producto de la empresa.

53. *(Curva de aprendizaje)* Después que una persona ha estado trabajando por t horas con una máquina en particular, habrá rendido x unidades, en donde la tasa de rendimiento (número de unidades por hora) está dada por

$$\frac{dx}{dt} = 20(1 - e^{-t/30})$$

   a) ¿Cuántas unidades de rendimiento alcanzará la persona en sus primeras 30 horas?

   b) ¿Cuántas unidades de rendimiento alcanzará la persona en sus segundas 30 horas?

   Aproxime sus respuestas al entero más cercano de unidad.

54. *(Crecimiento de población)* Una población de bacterias crece de tal manera que la razón de crecimiento en el tiempo t (medido en horas) es igual a $90x + 500/(1 + x)$. Si el tamaño de la población en $t = 0$ es 2000, ¿cuál será el tamaño de la población al cabo de 3 horas?

55. *(Costo marginal)* Una empresa tiene un costo marginal por unidad de su producto dado por

$$C'(x) = \frac{8000 \ln(x + 25)}{(x + 25)^2}$$

   en donde x es el nivel de producción. Si los costos fijos ascienden a \$2000, determine la función de costo.

56. *(Productividad física)* La productividad física marginal, dp/dx, para una industria de zapatos es $dp/dx = 1000(1+x)$. Determine la productividad física p cuando están en funcionamiento 3 máquinas.

57. *(Productividad física)* La productividad física marginal, dp/dx, para una industria de colchones es $dp/dx = 3000(1 +$

$2x)^{1/2}$. Determine la productividad física p cuando están en funcionamiento 4 máquinas.

58. *(Reacción de una droga)* La velocidad de producción de anticuerpos t horas después de inyectar un suero, está dada por

$$K(t) = \frac{20t}{t^2 + 1} \text{ miles de anticuerpos/hora}$$

Determine el valor de t en el cual $K(t)$ es máximo y calcule el número total de anticuerpos producidos hasta ese instante.

***59.** *(Densidad de tráfico)* La densidad de tráfico en un puente durante las tres horas pico del día, varía de acuerdo con la fórmula

$$f(t) = \begin{cases} 3 + 10t & 0 \le t < 1.5 \\ 30 - 8t & 1.5 \le t < 3 \end{cases}$$

donde t está medido en horas a partir del inicio de la hora pico y $f(t)$ está medido en miles de vehículos por hora. ¿Cuántos vehículos cruzan el puente:

a) las primeras 1.5 horas?

b) durante el total de las tres horas pico?

***60.** *(Consumo de petróleo)* Desde 1970, la razón de consumo de petróleo en cierto país, ha sido dada en millones de barriles por día mediante la siguiente función:

$$B(t) = \begin{cases} 1 + 0.1t & \text{si } 0 \le t < 4 \\ 1.68 - 0.07t & \text{si } 4 \le t < 12 \\ 0.24 + 0.05t & \text{si } 12 \le t < 18 \end{cases}$$

donde t es el tiempo en años a partir de 1970. Calcule el consumo total:

a) Entre 1970 y 1975

b) Entre 1980 y 1985

c) Entre 1970 y 1980

Nota: No olvide multiplicar $B(t)$ por 365, y suponga que todos los años tienen 365 días.

***61.** *(Aceleración)* La aceleración de un móvil en el instante t está dada por $2 + 6tm/s^2$

a) Determine la velocidad, $v(t)$, en el instante t, si la velocidad inicial en $t = 0$ es de 50 m/s.

b) Calcule la distancia, $d(t)$, recorrida por el móvil durante los primeros t segundos.

62. *(Velocidad y distancia)* La velocidad del movimiento en el instante t es $(t + 2\sqrt{t})^2$. Calcule la distancia recorrida hasta el instante t.

63. *(Velocidad y distancia)* La velocidad en el instante t de un objeto está dada por $10 - 5t$. La velocidad inicial, es decir $v(0) = 10$ metros/segundo. Determine la distancia, $d(t)$, que viaja durante t segundos y de aquí encuentre la distancia requerida para llegar al alto total.

64. En el punto $(x, f(x))$ en la gráfica de $y = f(x)$, la pendiente de la recta tangente es $f'(x) = 4x - 7$. Si el punto (2, 2) pertenece a la gráfica, determine $f(x)$.

65. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = g(x)$ en cualquier punto $(x, g(x))$ está dada por $g'(x) = 2e^{2x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Si el punto (0, 1) está en la gráfica, determine $g(x)$

CASO DE ESTUDIO

UTILIDADES EN LA PRODUCCIÓN

Con base en la información dada al inicio del capítulo, se sabe que la función de ingreso marginal es

$$I'(x) = 10e^{-x/50}(50 - x)$$

con las técnicas de integración analizadas en este capítulo se tiene que

$$I(x) = 500xe^{-x}/50 + K$$

donde K es una constante, pero se supone que si se venden 0 productos el ingreso es cero, entonces,

$$I(0) = 500(0)e^{-0/50} + K = 0, \text{ implica que } K = 0$$

Por tanto, la función de ingreso está dada por

$$I(x) = 500xe^{-x/50} \qquad (1)$$

Dado que una forma de escribir el ingreso es $I(x) = px$, donde p es el precio de cada artículo, a partir de la ecuación (1) se deduce que la relación de demanda es

$$p = 500e^{-x/50}$$

Lo cual responde la primera interrogante de la licenciada Adriana. La gráfica de la función anterior es la siguiente,

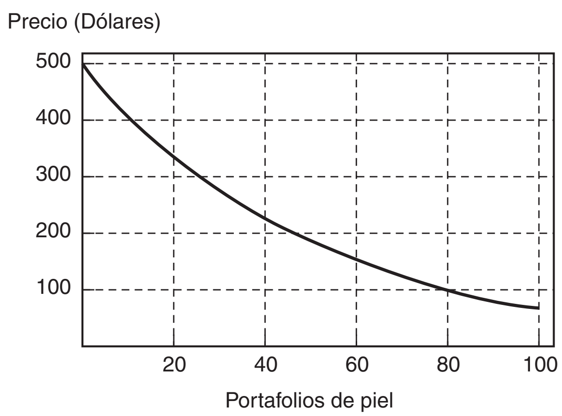
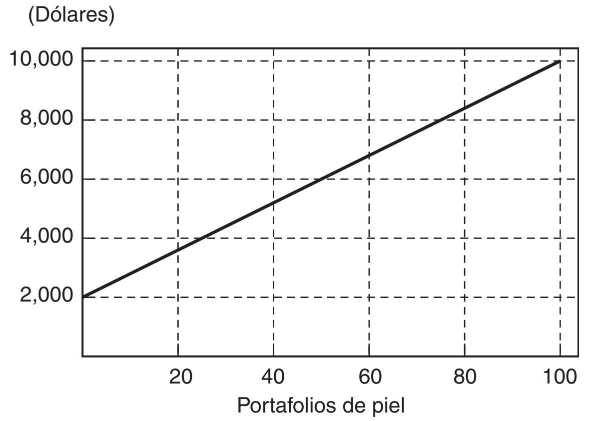


FIGURA 3

Se puede notar que conforme el precio baja la demanda por portafolios crece y viceversa.

Para responder la segunda pregunta de la licenciada Adriana, se observa la gráfica 1, que se reproduce a continuación,



Se supone que la función de costos es lineal. Para obtener una expresión para la ecuación de una recta, basta con conocer dos puntos de la misma; en este caso, se tiene que la recta pasa por (0, 2000) y (100, 10,000). Así que, haciendo uso de lo que se aprendió en el capítulo 4, se deduce que la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos, escrita en la forma punto pendiente es,

$$C(x) = 2000 + 80x$$

De la cual se obtiene que los costos fijos son \$2000 semanales. Con esto, se puede escribir la función de utilidad como

$$U(x) = I(x) - C(x)$$

es decir,

$$U(x) = 500xe^{-x/50} - (2000 + 80x)$$

Así por ejemplo, la utilidad por la producción y venta de 50 portafolios es

$$U(50) = 500(50)e^{-50/50} - (2000 + 80(50)) \approx \$3{,}197$$

Ahora bien, por la gráfica de la utilidad se observa que en el intervalo de interés se tiene un valor máximo entre 30 y 40. Si se utilizan las técnicas de los capítulos previos para maximizar, se deben calcula $U'(x)$,

$$U'(x) = 500e^{-x/50} - 10xe^{-x/50} - 80$$

al igualar a cero se enfrenta a un problema que no es sencillo resolver, por medio de aproximaciones se obtiene que

$$U'(34.15) \approx 0$$

A la izquierda de esta abscisa, la función $U(x)$ es creciente, mientras que a la derecha es decreciente.

Ahora bien, por otro lado,

$$U''(x) = \frac{1}{5}e^{-x/50}(x - 100)$$

la cual indica que $U''(x) < 0$ para $x < 100$, así que en todo este intervalo la función es cóncava hacia abajo y, por tanto, el máximo se alcanza en 34.15. Puesto que la respuesta de interés en el problema de la licenciada Adriana debe ser un entero, se calcula

$$U(34) \approx 3892.49$$

y

$$U(35) \approx 3890.24$$

Así que el plan de producción óptimo sería producir y vender 34 portafolios de piel cada semana, con lo cual la utilidad sería de 3892.49 dólares.

Ahora bien, para poder vender 34 portafolios, ¿cuál es el precio al que debe venderse cada uno?

Si se toma la decisión de vender cada portafolio en \$200, ¿cuál es la utilidad que se obtendría? Y de acuerdo con la relación de demanda, ¿cuántos portafolios se venderían?

CAPÍTULO 16

La integral definida

Un problema de inventario

Para la fabricación de ciertos muebles para computadora, la compañía *El mueble elegante* compra las cubiertas a un distribuidor externo, con un costo unitario de $24, y dado que el distribuidor no está localizado en la misma ciudad, el costo de entrega, sin importar la cantidad de cubiertas, es de $400; no puede enviar más de 1000 cubiertas, por la capacidad de sus camiones. Debido a este costo, algunos opinan que se deben solicitar las cubiertas lo más espaciado posible, para reducir el costo promedio del flete. Pero, por otro lado, hacer pedidos grandes ocasiona tener grandes inventarios y los costos asociados a tener las cubiertas en un almacén; además de que el dinero que se utilice en la compra de una gran cantidad de cubiertas se podría destinar mejor a ganar intereses en un banco. Este último se conoce como costo de oportunidad. Después de analizar la información, se ha llegado a la conclusión de que el costo de mantener en inventario se estima en $0.20 por cubierta por semana. Lo que, aseguran algunos, justificaría hacer pedidos más pequeños y con mayor frecuencia. Víctor Daniel García, gerente de compras, se puso a investigar más y, después de preguntar a diferentes áreas, revisar el historial de la compañía y hacer muchas preguntas, llegó a lo siguiente:

1. Cada semana se venden alrededor de 100 muebles para computadora, la variación es mínima alrededor de este valor y no se vislumbra que cambie mucho en el futuro cercano.
2. Se tendrían pérdidas monetarias considerables, si se detiene la producción por falta de estas cubiertas.
3. La proveedora de estas cubiertas es sumamente confiable y, si un pedido se realiza por la mañana, las cubiertas las entrega el mismo día por la tarde. Listas para utilizarse en la producción del día siguiente.
4. El grupo de asesores coincide que decidir con qué frecuencia y cuántas cubiertas comprar se debe basar en minimizar los costos promedio semanales asociados con la compra y almacenamiento de las cubiertas. Respecto al costo de mantenimiento, con mayor precisión se determinó que el costo de mantenimiento promedio semanal debería medirse como 0.20 dólares/cubierta/semana por el inventario promedio entre dos órdenes; esto es, el número promedio de cubiertas almacenadas desde que llega el pedido hasta el momento en que llega el siguiente pedido.
5. Aunque en la realidad las semanas y el número de cubiertas son números enteros, para simplificar la modelación se supone que éstas son variables continuas.

Con base en lo anterior, ayude a Víctor Daniel a tomar la decisión de cuántas y con qué frecuencia deben hacer los pedidos de las cubiertas.

TEMARIO

■ 16-1 ÁREAS BAJO CURVAS

En esta sección y en las siguientes, nos ocuparemos del cálculo de áreas de regiones que tienen fronteras curveadas. Éstas pueden evaluarse usando las integrales definidas.

DEFINICIÓN Sea $f(x)$ una función con una antiderivada que denotaremos por $F(x)$. Sean a y b dos números reales tales que $f(x)$ y $F(x)$ existen para todos los valores de x en el intervalo cerrado con puntos extremos a y b. Entonces, la **integral definida** de $\boldsymbol{f(x)}$ de $\boldsymbol{x = a}$ a $\boldsymbol{x = b}$ se denota por $\int_a^b f(x)dx$ y se define por

$$\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Los números a y b se denominan los **límites de integración**, a es el **límite inferior** y b es el **límite superior**. Por lo regular $a < b$, pero esto no es esencial.

Cuando evaluamos una integral definida, por conveniencia se acostumbra utilizar unos paréntesis rectangulares grandes en el lado derecho, de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Leemos esto como la *integral definida de* f(x) *de* x = a *a* x = b *es* F(x) *en b menos* F(x) *en* a. La notación de paréntesis que aparece enmedio significa que la función dentro de ellos debe evaluarse en los dos valores del argumento que aparecen después de los paréntesis. La diferencia entre estos dos valores de la función se toma en el siguiente orden: el valor en el argumento superior menos el valor en el argumento inferior.

Al evaluar integrales definidas, omitimos la constante de integración de la antiderivada de $f(x)$, porque esta constante de integración se cancela en la respuesta final. Sea $F(x) + C$ cualquier antiderivada de $f(x)$, en donde C es la constante de integración. Luego, por la definición anterior

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x) + C\Big]_a^b = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

y C ha desaparecido de la respuesta.

EJEMPLO 1 Evalúe las siguientes integrales definidas:

$$a)\ \int_a^b x^4\, dx \qquad b)\ \int_1^3 \frac{1}{t}\, dt \qquad c)\ \int_0^2 e^{3x}\, dx$$

Solución

a) Tenemos que $\int x^4\,dx = x^5/5$. Así que

$$\int_a^b x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_a^b = \frac{b^5}{5} - \frac{a^5}{5} = \frac{1}{5}(b^5 - a^5)$$

b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{t}\,dt = \Big[\ln|t|\Big]_1^3 = \ln|3| - \ln|1| = \ln 3$

(Nótese que $\ln 1 = 0$).

c) $\displaystyle\int_0^2 e^{3x}\,dx = \left[\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^2 = \frac{e^6}{3} - \frac{e^0}{3} = \tfrac{1}{3}(e^6 - 1)$ ☛ **1**

☛ **1.** Evalúe *a*) $\int_{-2}^{2} x^2\,dx$
b) $\int_{-3}^{3} x^5\,dx$ *c*) $\int_1^3 \ln t\,dt$

Respuesta *a*) $\frac{16}{3}$ *b*) 0
c) $3\ln 3 - 2$

Cuando evaluamos integrales definidas, en las cuales la antiderivada se encuentra por el método de sustitución, es importante observar que los límites de integración también cambian cuando la variable de integración se cambia. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Evalúe $\displaystyle\int_1^2 xe^{x^2}\,dx$

Solución Sea $I = \displaystyle\int_1^2 xe^{x^2}\,dx$. Para encontrar la antiderivada de xe^{x^2}, podemos utilizar el método de sustitución. Escribimos la integral dada como

$$I = \tfrac{1}{2}\int_1^2 e^{x^2}\cdot 2x\,dx$$

Ya que $2x\,dx$, la diferencial de x^2, aparece en la integral hacemos $x^2 = u$ de modo que $2x\,dx = du$. En consecuencia,

$$I = \tfrac{1}{2}\int_{x=1}^{x=2} e^u\,du$$

Hasta ahora hemos dejado los límites de integración sin cambio y hemos enfatizado que aún son límites para la variable original x. Podemos cambiarlos a límites para u: cuando $x = 1$, $u = 1^2 = 1$ y cuando $x = 2$, $u = 2^2 = 4$, por lo que los límites son $u = 1$ y $u = 4$. Así que

$$I = \tfrac{1}{2}\int_1^4 e^u\,du$$

Aquí, se entiende que los límites son con respecto a la nueva variable de integración u. Por lo que, finalmente,

$$I = \tfrac{1}{2}\Big[e^u\Big]_1^4 = \tfrac{1}{2}(e^4 - e^1) = \tfrac{1}{2}e(e^3 - 1)$$ ☛ **2**

☛ **2.** Evalúe *a*) $\int_0^2 x^2 e^{x^3}\,dx$
b) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{x}{x^2+1}\,dx$

Respuesta *a*) $\frac{1}{3}(e^8 - 1)$
b) $\frac{1}{2}\ln 5$

Nuestro principal interés en esta sección será el cálculo de áreas de regiones acotadas por curvas. Sea $f(x)$ una función dada definida y continua en un intervalo

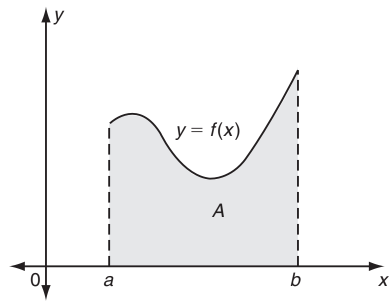


FIGURA 1

$a \leq x \leq b$ y que toma valores *no negativos* en tal intervalo. La gráfica de $y = f(x)$ se encuentra por completo por arriba del eje x, como se ilustra en la figura 1. Deseamos encontrar una fórmula para el área A que está entre tal gráfica, el eje x y las rectas verticales en $x = a$ y $x = b$. Esta área aparece sombreada en la figura 1.

Existe una estrecha relación entre el área A y la antiderivada de la función $f(x)$. Esta relación es el contenido del llamado *teorema fundamental del cálculo,* quizá el teorema más importante de todo el cálculo.

TEOREMA 1 (TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO) Sea $f(x)$ una función continua *no negativa* en $a \leq x \leq b$ y sea $F(x)$ una antiderivada de $f(x)$. Entonces A, el área entre $y = f(x)$, el eje x y las líneas verticales $x = a$ y $x = b,$ está dada por la integral definida

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Antes de presentar la demostración del teorema, ilustraremos su aplicación mediante algunos ejemplos.

EJEMPLO 3 Evalúe el área entre la gráfica $y = x^2$ y el eje x de $x = 0$ a $x = 2$.

Solución El área requerida está sombreada en la figura 2. Puesto $f(x) = x^2$ es no negativa, esta área es igual a la integral definida $\int_a^b f(x)dx$, en donde $f(x) = x^2, a =$ 0 y $b = 2$. Así que el área es

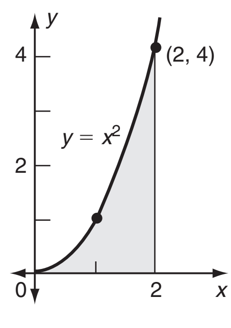


FIGURA 2

☛ **3.** Cálcule el área entre el eje x y
a) la gráfica de $y = x^2$ para $-2 \le x \le 1$
b) la gráfica de $y = 16 - x^2$ para $0 \le x \le 4$

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$ ☛ **3**

EJEMPLO 4 Determine el área acotada por la curva $y = 3x^2 + 2x + 5$, el eje x y las líneas $x = 1$ y $x = 3$.

Solución Es claro que $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ es no negativa para valores de x en el intervalo definido por $1 \le x \le 3$. Así, el área requerida está dada por la siguiente integral definida:

Respuesta *a*) 3 *b*) $\frac{128}{3}$

$$\int_1^3 (3x^2 + 2x + 5)\,dx = \Big[x^3 + x^2 + 5x\Big]_1^3$$
$$= [3^3 + 3^2 + 5(3)] - [1^3 + 1^2 + 5(1)]$$
$$= 51 - 7 = 44 \text{ unidades cuadradas}$$ ☛ **4**

☛ **4.** En el ejemplo 4, convénzase por usted mismo de que $f(x) \ge 0$ para $1 \le x \le 3$

Si $C(x)$ denota el costo total de producir x unidades de cierto artículo, se sigue que $C'(x)$ representa la función de costo marginal. Ahora, por la definición de integral definida,

$$\int_a^b C'(x)dx = \Big[C(x)\Big]_a^b = C(b) - C(a)$$

Pero $C(b) - C(a)$ representa el cambio en el costo total cuando el nivel de producción se incrementa de a a b unidades. Se sigue que $\int_a^b C'(x)$ también representa ese mismo cambio en el costo total.

Así que tenemos el siguiente importante resultado: el cambio en los costos de producción al incrementar el nivel de producción de a a b unidades es igual al área bajo la gráfica de la función de costo marginal ($y = C'(x)$) entre $x = a$ y $x = b$.

De manera similar, si $R'(x)$ es la función de ingreso marginal, entonces, el cambio en el ingreso cuando el nivel de ventas se incrementa de a a b unidades está dado por $\int_a^b R'(x)\,dx$. Una interpretación análoga puede darse a $\int_a^b P'(x)\,dx$ en donde $P'(x)$ es la función de utilidad marginal; es el cambio en la utilidad cuando x se incrementa de a a b.

EJEMPLO 5 La función de costo marginal de una empresa a un nivel de producción x es

$$C'(x) = 23.5 - 0.01x$$

Calcule el incremento en el costo total cuando el nivel de producción se incrementa de 1000 a 1500 unidades.

Solución El incremento en el costo total está dado por

Respuesta Cada uno de los tres términos en $f(x)$ es positivo cuando $x > 0$

$$\int_{1000}^{1500} C'(x)\,dx = \int_{1000}^{1500} (23.5 - 0.01x)\,dx$$

$$= \left[23.5x - 0.01\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_{1000}^{1500}$$

$$= 23.5(1500) - 0.005(1500^2)$$

$$- [23.5(1000) - 0.005(1000^2)]$$

$$= 35{,}250 - 11{,}250 - (23{,}500 - 5000) = 5500$$

El incremento en el costo es por consiguiente de \$5500 ☛ **5**

☛ **5.** La función de ingreso marginal es $(25 - 3x)$. ¿Cuál será el cambio en el ingreso, si el nivel de ventas se aumenta de $x = 2$ a $x = 4$?

Los teoremas 2 y 3 nos dan algunas propiedades sencillas de las integrales definidas.

TEOREMA 2 Si $f(t)$ es continua en $a \le t \le x$, se sigue que

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $F(t)$ una antiderivada de $f(t)$; entonces, por la definición de integral definida,

$$\int_a^x f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_a^x = F(x) - F(a)$$

Ésta es una función de x y puede derivarse con respecto a x. Así,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = \frac{d}{dx}[F(x) - F(a)] = F'(x)$$

Pero puesto que $F(t)$ es una antiderivada de $f(t)$, $F'(t) = f(t)$,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)$$

EJEMPLO 6 Evalúe $\frac{d}{dx}\left[\int_1^x te^t\,dt\right]$

Solución Por el teorema 2, tenemos que

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x te^t\,dt\right] = xe^x$$

Sería más tardado evaluar en primer término la integral, pero por supuesto la respuesta es la misma:

$$\int_1^x te^t\,dt = \left[(t-1)e^t\right]_1^x = (x-1)e^x \quad \text{(usando la fórmula 69 del apéndice II)}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x te^t\,dt\right] = \frac{d}{dx}[(x-1)e^x] = (x-1)e^x + 1 \cdot e^x = xe^x$$

Respuesta $\int_2^4 (25 - 3x)\,dx = 32$

EJEMPLO 7 Realice las siguientes operaciones:

$$a) \ \frac{d}{dx}\left[\int_0^1 x^3 e^{\sqrt{x}}\, dx\right] \qquad b) \ \int_0^1 \frac{d}{dx}(x^3 e^{\sqrt{x}})\, dx$$

Solución

a) En este caso, es importante observar que la integral definida $\int_0^1 x^3 e^{\sqrt{x}}\, dx$ tiene un valor constante que no depende de x. En consecuencia,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^1 x^3 e^{\sqrt{x}}\, dx\right] = 0$$

b) Por la definición de antiderivada, si $F'(x) = f(x)$,

$$\int f(x)\, dx = \int F'(x)\, dx = F(x) + C$$

Así,

$$\int \frac{d}{dx}(x^3 e^{\sqrt{x}})\, dx = x^3 e^{\sqrt{x}} + C$$

de modo que, omitiendo C,

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}(x^3 e^{\sqrt{x}})\, dx = \left[x^3 e^{\sqrt{x}}\right]_0^1 = 1^3 e^{\sqrt{1}} - 0 \cdot e^{\sqrt{0}} = e$$

Observación Vale la pena notar la diferencia entre las partes *a*) y *b*) del ejemplo 7. Las posiciones del signo de integral y del operador de diferenciación *d/dx* están invertidos. ☛ **6**

☛ **6.** Evalúe

a) $\int_0^1 \frac{d}{dx}(\ln(3+1))\, dx$

b) $\frac{d}{dx}\int_0^1 \ln(t^3+1)\, dt$

c) $\frac{d}{dx}\int_0^1 \ln(t^3+1)\, dt$

Respuesta *a*) ln 2 *b*) 0
c) $\ln(x^3+1)$

TEOREMA 3

a) $\int_a^a f(x)dx = 0$

b) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\, dx$

c) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ en donde c es cualquier número real

DEMOSTRACIÓN Sea $F(x)$ cualquier antiderivada de $f(x)$. Entonces, por la definición de integral definida, tenemos lo siguiente:

a) $\int_a^a f(x)\, dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$

b) Tenemos que

$$\int_a^b f(x)\, dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

y asimismo

$$\int_b^a f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_b^a = F(a) - F(b)$$

de modo que

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

c) La demostración de esta parte se deja como ejemplo ejercicio.

EJEMPLO 8

a) $\int_2^2 x^3 e^{\sqrt{x}}\,dx = 0$

b) $\int_0^2 x^2\,dx = \int_0^3 x^2\,dx + \int_3^2 x^2\,dx$ por el teorema 3(c)

$= \int_0^3 x^2\,dx - \int_2^3 x^2\,dx$ por el teorema 3(b)

(De la misma forma, puede verificar esto por medio de la evaluación de las tres integrales). ☛ **7**

☛ **7.** *a*) Dado que $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 3$ y $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = 1$, evalúe $\int_3^2 f(x)\,dx$

b) Evalúe $\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt$

Respuesta *a*) 2 *b*) $-f(x)$

Concluimos esta sección dando una demostración del teorema fundamental del cálculo. La demostración que daremos carecerá de rigor, dado que no dimos una definición matemática propia del área bajo una curva. Sin embargo, la demostración será convincente, y podemos asegurar a los lectores más escépticos que existe una demostración rigurosa.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO Empezamos probando el teorema en el caso particular en que $f(x)$ sea una función *creciente* no negativa en $a \le x \le b$, si bien es fácil extender la demostración a todas las funciones continuas.

Cuando $f(x) \ge 0$, buscamos una expresión para A, el área total bajo la curva $y = f(x)$. Definamos la función de área $A(x)$, que representa el área bajo la curva $y = f(x)$ desde el valor a hasta el valor x de la abscisa, en donde x es cualquier número tal que $a \le x \le b$.

$A(x)$ es el área sombreada de la figura 3. Así, $A(a) = 0$, porque es obvio que el área se reduce a cero cuando x tiende a a. Más aún, $A(b)$ es sin duda el área bajo la curva entre a y b, esto es, la cantidad A que requerimos es tal que $A(b) = A$.

Si x se cambia a $x + \Delta x$ ($\Delta x > 0$), el área $A(x)$ también se aumenta a $A(x) + \Delta A$, que es el área bajo la curva entre los valores a y $x + \Delta x$ de la abscisa. (Véase la figura 4). Es razonable esperar que ΔA sea igual al área que aparece sombreada en esta figura. (No podemos probar esto en forma estricta aquí, dado que no ofrecimos una definición rigurosa de área).

El área ΔA es mayor que el área del rectángulo inscrito con altura $f(x)$ y ancho Δx; ΔA es menor que el área del rectángulo circunscrito con altura $f(x + \Delta x)$

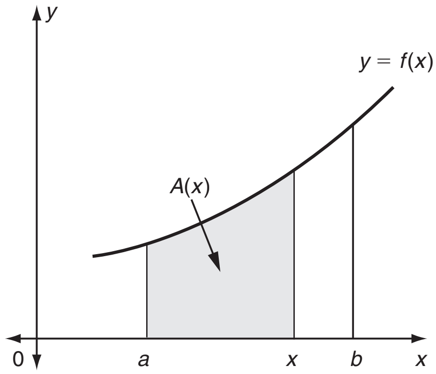


FIGURA 3

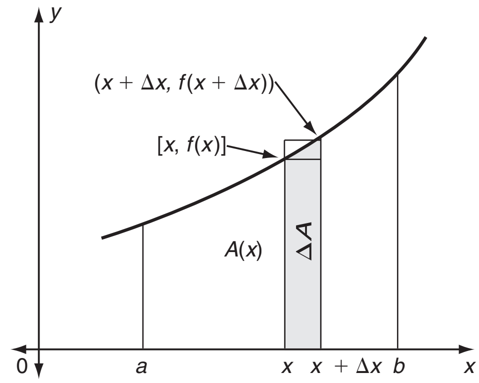


FIGURA 4

y ancho Δx. Por tanto,

$$f(x) \cdot \Delta x < \Delta A < f(x + \Delta x) \cdot \Delta x$$

Dividiendo toda la expresión anterior entre Δx, obtenemos

$$f(x) < \frac{\Delta A}{\Delta x} < f(x + \Delta x)$$

Puesto que $f(x)$ es continua, $f(x + \Delta x) \to f(x)$ cuando $\Delta x \to 0$. Después de tomar límites en las desigualdades anteriores cuándo $\Delta x \to 0$, se sigue que $\Delta A/\Delta x$ tiene un límite, y

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = f(x) \qquad \text{o bien} \qquad A'(x) = f(x)$$

Debido a que $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, se sigue que $F'(x) = f(x)$. En consecuencia, tanto $F(x)$ como $A(x)$ son antiderivadas de $f(x)$ y por ello sólo pueden diferir a lo más en una constante; esto es,

$$A(x) = F(x) + C \tag{1}$$

en donde C es alguna constante.

Haciendo $x = a$ y recordando que $A(a) = 0$, tenemos

$$A(a) = F(a) + C = 0$$

de modo que $C = -F(a)$. Reemplazando C por $-F(a)$ en la ecuación (1) anterior, obtenemos

$$A(x) = F(x) - F(a)$$

Por último, haciendo $x = b$ en la igualdad anterior, resulta que

$$A(b) = F(b) - F(a)$$

Pero $A(b) = A,$ o sea el área total requerida bajo la curva, y hemos probado que

$$A = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx$$

(por la definición de integral definida).

EJERCICIOS 16-1

(1-26) Evalúe las siguientes integrales definidas.

1. $\int_0^1 x^2\,dx$

2. $\int_{-1}^3 x^3\,dx$

3. $\int_{-1}^1 t^5\,dt$

4. $\int_0^1 x^{3/2}\,dx$

5. $\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx$

6. $\int_0^5 (u^2 + u + 1)\,du$

7. $\int_1^2 (3x^2 - 5x + 7)\,dx$

8. $\int_0^3 (x + 1)(2x - 3)\,dx$

9. $\int_1^2 \frac{(2x + 1)(x - 2)}{x}\,dx$

10. $\int_1^3 \left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$

11. $\int_0^1 t^4 \ln(e^t)\,dt$

12. $\int_1^4 \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}\,dx}$

13. $\int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1}\,dx$

14. $\int_0^1 x\,e^{x^2} dx$

15. $\int_1^0 (e^x + e^{-x})\,dx$

16. $\int_0^1 \frac{e^{5x} + e^{6x}}{e^{3x}}\,dx$

17. $\int_e^{e^2} \frac{\ln t}{t}\,dt$

18. $\int_1^e \frac{1}{y(1 + \ln y)}\,dy$

19. $\int_{-1}^2 \frac{x}{x^2 + 1}\,dx$

20. $\int_{-1}^1 x\sqrt{x^2 + 4}\,dx$

21. $\int_2^2 (x + 1)(x^2 + 2x + 7)^5\,dx$

22. $\int_3^3 (e^x - \sqrt{\ln x})\,dx$

23. $\int_0^1 \frac{d}{dt}\left[\frac{e^t + 2t - 1}{3 + \ln(1 + t)}\right] dt$

24. $\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{e^{2x} + e^x + 1}\right) dx$

25. $\int_1^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 + 1}{1 + e^x}\right) dx$

26. $\int_2^2 \frac{d}{du}\left(\frac{\ln u}{u + 7}\right) du$

(27-40) Calcule las áreas bajo las gráficas de las siguientes funciones entre los valores de x dados.

27. $y = 3x + 2$, $x = 1$ y $x = 3$

28. $y = 5x^2$, $x = 0$ y $x = 2$

29. $y = 4 - x^2$, $x = 0$ y $x = 2$

30. $y = 2x^2 + 3x - 1$, $x = 1$ y $x = 4$

31. $y = x^3$, $x = 0$ y $x = 3$

32. $y = 1 + x^3$, $x = 0$ y $x = 2$

33. $y = 2 + x - x^2$, $x = -1$ y $x = 2$

34. $y = x^3 - x$, $x = -1$ y $x = 0$

35. $y = \frac{1}{x + 1}$, $x = 0$ y $x = 1$

36. $y = \frac{2x}{x^2 + 4}$, $x = 1$ y $x = 3$

37. $y = xe^x$, $x = 0$ y $x = 1$

38. $y = xe^{x^2}$, $x = 0$ y $x = 1$

39. $y = \ln x$, $x = 1$ y $x = e$

40. $y = \frac{\ln x}{x}$, $x = 1$ y $x = e^2$

(41-46) Realice las siguientes operaciones.

41. $\frac{d}{dx}\left(\int_2^x \frac{e^t \ln t}{1 + t^2}\,dt\right)$

42. $\frac{d}{du}\left(\int_u^3 [e^x(\ln x)^4]\,dx\right)$

43. $\frac{d}{dx}\left(\int_1^2 \frac{e^t \ln(t^2 + 1)}{1 + t^3}\,dt\right)$

44. $\frac{d}{dt}\left(\int_2^5 \frac{e^{x^2}}{x + 1}\,dx\right)$

45. $\int_1^2 \frac{d}{dx}(x^2 e^{\sqrt{x}} \ln x)\,dx$

46. $\int_e^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{x^2 + 1}\right) dx$

47. *(Cambio en el ingreso)* La función de ingreso marginal de una empresa está dada por $R'(x) = 12.5 - 0.02x$. Determine el incremento en el ingreso total de la empresa cuando el nivel de ventas se incrementa de 100 a 200 unidades.

48. *(Incremento en las utilidades)* El costo marginal de cierta empresa está dado por $C'(x) = 15.7 - 0.002x$, mientras que su ingreso marginal es $R'(x) = 22 - 0.004x$. Determine el incremento en las utilidades de la empresa si las ventas se incrementan de 500 a 600 unidades.

49. *(Cambio en el ingreso)* En el ejercicio 47, el nivel de ventas primero decrece de 100 a 80 unidades y luego se incrementa a 150 unidades. Determine el incremento global en el ingreso total.

50. *(Cambio en las utilidades)* En el ejercicio 48, determine el cambio en las utilidades si las ventas decrecen de 500 a 400 unidades.

51. *(Reparación de un automóvil)* Si el costo promedio de reparación de un automóvil con t años de antigüedad es $10(6 + t + 0.6t^2)$ dólares por año, calcule el costo total de reparación durante los primeros 2 años y durante el periodo entre $t = 4$ y $t = 6$.

■ 16-2 MÁS SOBRE ÁREAS

En la sección 16-1, se estableció que el área bajo la curva $y = f(x)$ acotada por las líneas $x = a$, $x = b$ y $y = 0$ (el eje x) está dada por la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ en el caso en que $f(x) \geq 0$ en $a \leq x \leq b$.

Consideremos ahora el caso correspondiente a la región acotada por la curva $y = f(x)$, las líneas $x = a$, $x = b$ y el eje x cuando $f(x) \leq 0$ si $a \leq x \leq b$. Es claro que el área en cuestión está situada por completo por debajo del eje x, como se advierte en la figura 5.

Definamos $g(x) = -f(x)$ de modo que $g(x) \geq 0$ si $a \leq x \leq b$. El área acotada por $y = g(x)$ (o $y = -f(x)$), las líneas $x = a$, $x = b$ y el eje x se encuentra por arriba del eje x. (Véase figura 6). Esta área, como en la última sección, está dada por la integral definida $\int_a^b g(x)\,dx$. Ahora

$$\int_a^b g(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

en donde $G(x)$ es la antiderivada de $g(x)$. Pero ya que $g(x) = -f(x)$, debe seguirse que $F(x) = -G(x)$ es una antiderivada de $f(x)$. Así que, $G(b) - G(a) = -F(b) +$

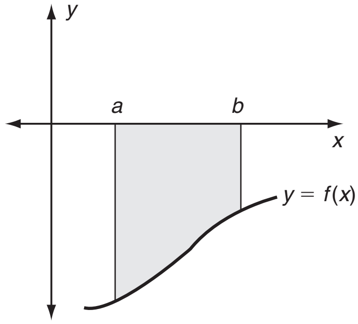


FIGURA 5

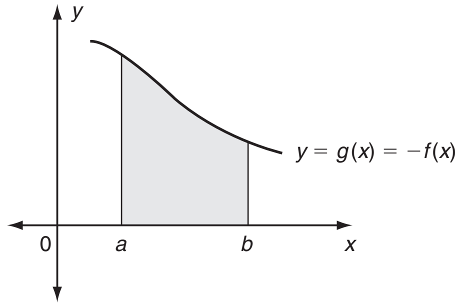


FIGURA 6

$F(a)$, o bien,

$$\int_a^b g(x)\,dx = -[F(b) - F(a)] = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Comparando las figuras 5 y 6, es claro que las dos regiones sombreadas tienen áreas de igual magnitud, dado que una región puede obtenerse reflejando la otra con respecto al eje x. En consecuencia, el área situada por debajo del eje x, acotada por la curva $y = f(x)$ y las líneas $x = a$ y $x = b$, está dada por la integral definida

$$-\int_a^b f(x)\,dx$$

EJEMPLO 1 Determine el área acotada por $y = x^2 - 9$, $x = 0$, $x = 2$ y el eje x.

Solución La gráfica de $y = x^2 - 9$ está debajo del eje x si $0 \leq x \leq 2$. El área requerida (que aparece sombreada en la figura 7) está dada por

$$\begin{aligned}
-\int_0^2 (x^2 - 9)\,dx &= \int_0^2 (9 - x^2)\,dx \\
&= \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 \\
&= \left(9(2) - \frac{2^3}{3}\right) - \left(9(0) - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{46}{3} \text{ unidades cuadradas}
\end{aligned}$$

Consideremos ahora el área de la región acotada por la curva $y = f(x)$ y las líneas $x = a$, $x = b$ y el eje x en el caso que $f(x)$ es algunas y otras veces negativa en el intervalo $a \leq x \leq b$. (Véase la figura 8). Tal región tiene partes por debajo del eje x y otras por encima del eje x. Supondremos que podemos determinar los pun-

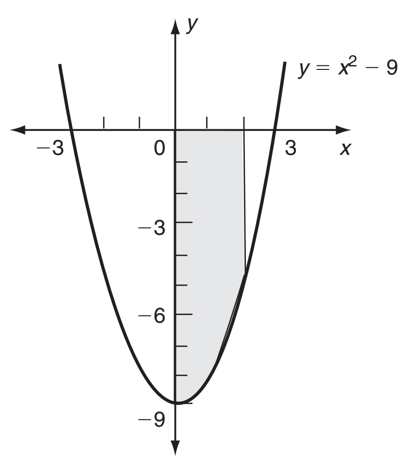


FIGURA 7

tos en que la gráfica $y = f(x)$ cruza al eje x, esto es, los valores de x en que $f(x) = 0$. En la figura 8, ilustramos el caso en que hay dos de tales puntos, denotados por $x = p$ y $x = q$. En este caso,

$$f(x) \geq 0 \quad \text{para} \quad a \leq x \leq p$$

$$f(x) \leq 0 \quad \text{para} \quad p \leq x \leq q$$

y asimismo

$$f(x) \geq 0 \quad \text{para} \quad q \leq x \leq b$$

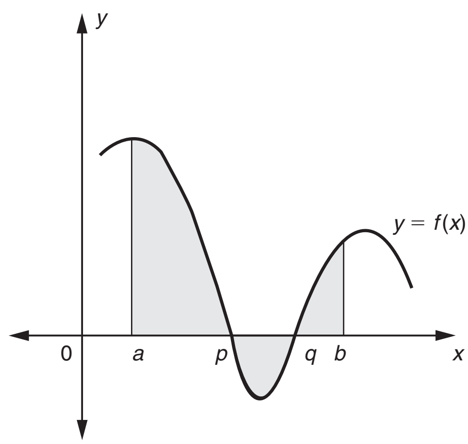


FIGURA 8

En un problema de este tipo, calculamos el área en cada subintervalo por separado; el área requerida es, entonces, la suma de todas estas áreas. En la figura 8, las áreas entre $x = a$ y $x = p$ y entre $x = q$ y $x = b$ están por encima del eje x, mientras que el área entre $x = p$ y $x = q$ está por debajo del eje x. Por consiguiente, el área requerida es igual a

$$\int_a^p f(x)\, dx + \left[-\int_p^q f(x)\, dx\right] + \int_q^b f(x)\, dx$$

EJEMPLO 2 Determine el área acotada por el eje x, la curva $y = x^2 - 9$, y las líneas $x = 0$ y $x = 4$.

Solución La gráfica de $y = x^2 - 9$ aparece en la figura 7. Si $0 \leq x < 3$, está por debajo del eje x; mientras que si $3 < x < 4$, está por encima. Por tanto, el área requerida está dada por

$$\int_0^3 -(x^2 - 9)\, dx + \int_3^4 (x^2 - 9)\, dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 9x\right]_0^3 + \left[\frac{x^3}{3} - 9x\right]_3^4$$

☛ **8.** Determine el área entre el eje x y la gráfica de $y = 4 - x^2$ para
a) $2 \leq x \leq 3$
b) $-2 \leq x \leq 4$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + 9 \cdot 3\right) - \left(-\frac{0^3}{3} + 9 \cdot 0\right) + \left(\frac{4^3}{3} - 9 \cdot 4\right) - \left(\frac{3^3}{3} - 9 \cdot 3\right)$$

$$= 18 - 0 + (-\tfrac{44}{3}) - (-18) = \tfrac{64}{3} \text{ unidades cuadradas}$$ ☛ **8**

Área de regiones entre curvas

Consideremos ahora el área acotada entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las líneas $x = a$ y $x = b$. En primer lugar, supondremos que $f(x) > g(x) \geq 0$ en $a \leq x \leq b$ de modo que ambas curvas están arriba del eje x y la curva $y = f(x)$ está por encima de la curva $y = g(x)$. El área considerada aparece en la figura 9. Es claro que esta área es la diferencia entre el área de la región acotada por $y = f(x)$, y el eje x y el área de la región acotada por $y = g(x)$ y el eje x; esto es, el área de la región *CDEF* entre las dos curvas es igual al área de *ABEF* menos el área de *ABDC*.

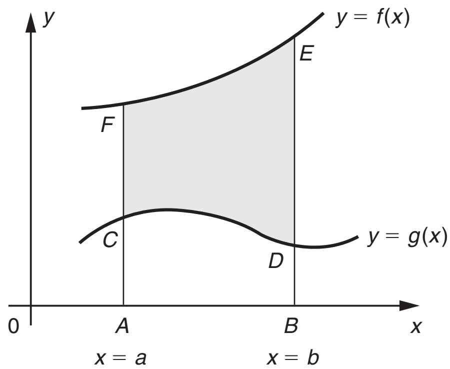


FIGURA 9

Por tanto, el área requerida está dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Note que en el integrando $[f(x) - g(x)]$, el primer término está relacionado con la curva superior y el segundo término $g(x)$ con la curva inferior. Una manera conveniente de recordar esta fórmula es, por consiguiente,

$$\boxed{\int_a^b (y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}})\,dx}$$

Esta forma también puede usarse a fin de calcular el área entre dos curvas cuando una o ambas están por debajo del eje x y, asimismo, si las dos curvas se cruzan entre sí.

Respuesta *a*) $\frac{7}{3}$ *b*) $\frac{64}{3}$

EJEMPLO 3 Determine el área entre las curvas $y = x^2 + 5$ y $y = x^3$ y las líneas $x = 1$ y $x = 2$.

Solución La gráfica de $y = x^2 + 5$ está por encima de la curva $y = x^3$ el intervalo $1 \le x \le 2$. Así que el área requerida (que aparece sombreada en la figura 10) está dada por

$$A = \int_1^2 (y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}})\, dx = \int_1^2 (x^2 + 5) - x^3]\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 5x - \frac{x^4}{4}\right] = (\tfrac{8}{3} + 10 - 4) - (\tfrac{1}{3} + 5 - \tfrac{1}{4}) = 3\tfrac{7}{12}$$

o $3\frac{7}{12}$ unidades cuadradas ☛ **9**

☛ **9.** Evalúe el área entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = x$ para
a) $0 \le x \le 1$
b) $1 \le x \le 2$

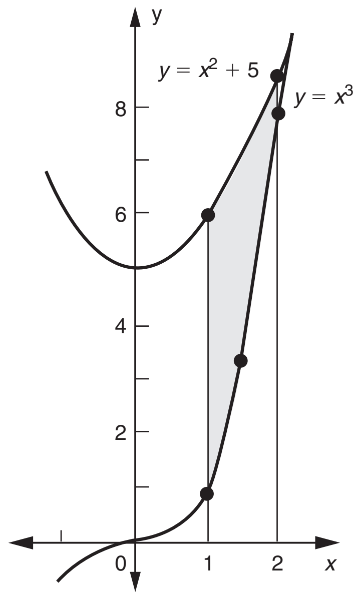


FIGURA 10

EJEMPLO 4 Determine el área de la región encerrada por las curvas $y = -x^2$ y $y = x^2 - 8$.

Solución En este caso no se dan los límites de integración. La primera etapa es bosquejar las gráficas de las dos curvas para determinar el área requerida que encierran además de los límites de integración. En la figura 11 aparecen las gráficas de las dos curvas, en la cual se ha sombreado la región en cuestión.

Con el objetivo de encontrar los puntos de intersección de las curvas, debemos manejar las ecuaciones de las curvas como ecuaciones simultáneas y resolverlas para x y y. En este ejemplo particular, al igualar las dos expresiones de y resulta:

$$-x^2 = x^2 - 8 \quad \text{o} \quad 2x^2 - 8 = 0$$

Respuesta *a*) $\frac{1}{6}$ *b*) $\frac{5}{6}$

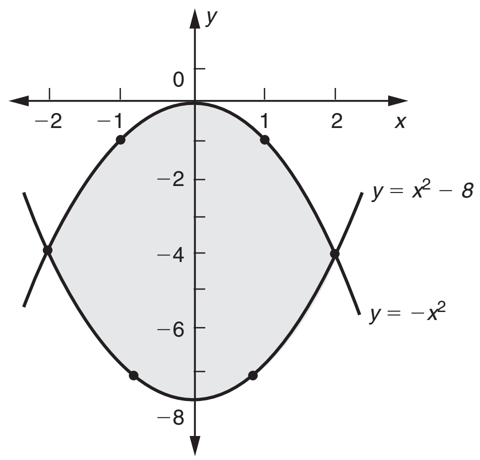


FIGURA 11

En consecuencia, $x = \pm 2$. En la región que aparece en la figura 11, x varía entonces entre -2 y $+2$. Por consiguiente,

$$\text{Área} = \int_{-2}^{2} (y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}})\, dx$$

Esta fórmula conocida aún se aplica, aunque ambas gráficas estén por debajo del eje x. La manera más fácil de ver esto es añadir una constante suficientemente grande a las y, con la finalidad de mover ambas gráficas por encima del eje x (para este caso, bastará sumar 8). Cuando formamos la diferencia entre y_{superior} y y_{inferior}, esta constante que se suma desaparecerá. En este caso, la curva superior es $y = -x^2$, de modo que

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \int_{-2}^{2} [(-x^2) - (x^2 - 8)]\, dx \\ &= \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)\, dx = \left[8x - \tfrac{2}{3}x^3\right]_{-2}^{2} \\ &= (16 - \tfrac{16}{3}) - (-16 + \tfrac{16}{3}) = \tfrac{64}{3} \text{ unidades cuadradas}\end{aligned}$$ ☛ **10**

☛ **10.** Determine el área encerrada entre $y = 3 - x^2$ y $y = x^2 - 5$

EJEMPLO 5 Determine el área acotada por las curvas $y = 1/x$ y $y = x^2$ entre $x = \frac{1}{2}$ y $x = 2$.

Solución Las curvas $y = 1/x$ y $y = x^2$ se intersectan si $1/x = x^2$ o $x^3 = 1$; esto es, cuando $x = 1$. (Véase la figura 12). En este caso, dividimos el problema en dos partes, debido a que si $\frac{1}{2} < x < 1$, $y_{\text{superior}} = 1/x$, pero cuando $1 < x < 2$, $y_{\text{superior}} = x^2$.

Así que el área requerida está dada por

$$A = \int_{1/2}^{1} \left(\frac{1}{x} - x^2\right) dx + \int_{1}^{2} \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) dx$$

Respuesta $\frac{64}{3}$

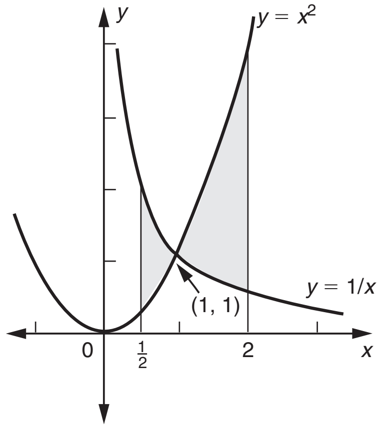


FIGURA 12

☛ **11.** Determine el área encerrada entre $y = x^2 + x + 1$ y $y = x^3 + x^2 + 1$
[*Sugerencia*: Encuentre los intervalos en los que $y_1 - y_2 = x - x^3$ es positiva y en los que es negativa].

$$= \left[\ln x - \frac{x^3}{3}\right]_{1/2}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - \ln x\right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{49}{24} \text{ unidades cuadradas} \quad ☛ \ \mathbf{11}$$

Concluimos esta sección dando la expresión para el área acotada por la curva $x = g(y)$, el eje y y las líneas horizontales $y = c$ y $y = d$. Esta área (cuya región aparece sombreada en la figura 13) está dada por

$$\int_c^d g(y)\, dy$$

en donde $d \geq c \geq 0$. Podemos advertir esto si dibujamos de nuevo la figura con el eje y horizontal y el eje x vertical, como se aprecia en la figura 14. Así, el área en cuestión se convierte en el área entre la curva y el eje horizontal, y está dada por la integral definida. Sólo se han intercambiado las variables x y y.

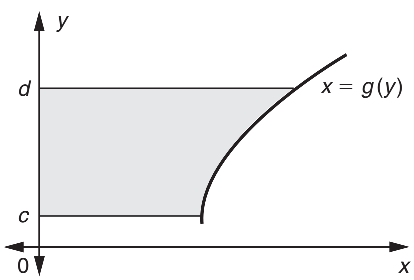


FIGURA 13

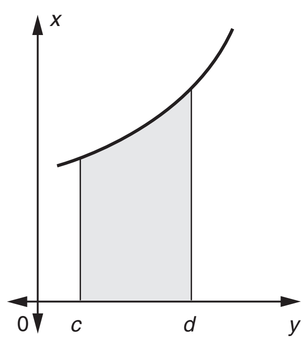


FIGURA 14

Respuesta
Área $= \int_0^1 (x - x^3)\, dx + \int_{-1}^0 (x^3 - x)\, dx = \frac{1}{2}$

EJEMPLO 6 Encuentre el área acotada por la parábola $y^2 = 4x$, el eje y y las líneas horizontales $y = 1$ y $y = 3$.

☛ **12.** Haga un bosquejo del área encerrada entre las gráficas de $x = y^2$ y $x = y + 2$. Exprésela como una integral con respecto a y y luego evalúela.

Solución El área requerida se observa en la figura 15. Aquí $x = y^2/4$, de modo que $g(y) = y^2/4$. En consecuencia, el área que se busca es

$$\int_1^3 \frac{y^2}{4}\,dy = \left[\frac{1}{4}\cdot\frac{y^3}{3}\right]_{y=1}^{3} = \frac{1}{12}(3^3 - 1^3) = \frac{13}{6} \text{ unidades cuadradas} \quad ☛ \ \mathbf{12}$$

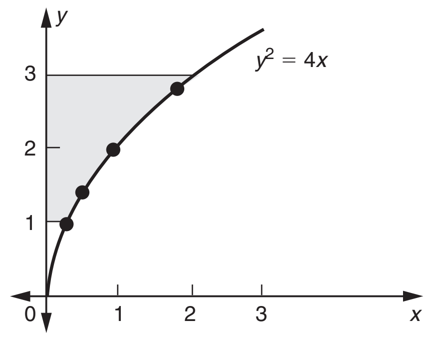


FIGURA 15

Integrales impropias

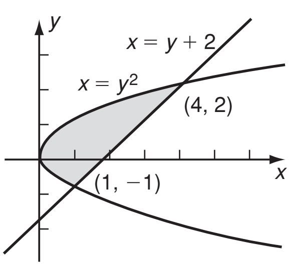
Algunas veces necesitamos evaluar integrales en las cuales el intervalo de integración se extiende a $+\infty$ o a $-\infty$ o ambos. Estas integrales están definidas como sigue:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Respuesta



Área $= \int_{-1}^{2} (y + 2 - y^2)\,dy = \frac{9}{2}$

suponiendo que el límite pertinente exista. Dichas integrales son **integrales impropias**.* Una aplicación importante sobre estas integrales es en la teoría de la probabilidad. (Véase la sección 16-8).

---

* Hay otro tipo de integrales impropias, en las cuales el integrando no está acotado en algún punto. Por ejemplo, definimos

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0+}[2\sqrt{x}]_a^1 = \lim_{a\to 0+}(2 - 2\sqrt{a}) = 2$$

☛ **13.** Evalúe las integrales impropias siguientes, si existen:

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ *b*) $\int_{-1}^{-2} \frac{1}{x^3}\, dx$

c) $\int_0^{\infty} e^{-kx}\, dx \quad (k > 0)$

Respuesta *a*) No existe *b*) $-\frac{1}{8}$ *c*) $\frac{1}{k}$

EJEMPLO 7 Evalúe las siguientes integrales siempre y cuando existan.

$$a)\ \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \qquad b)\ \int_{-\infty}^{0} e^x\, dx \qquad c)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\, dx$$

Soluciones

$$a)\ \int_1^{\infty} x^{-2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} x^{-2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left[-x^{-1}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} [1 - b^{-1}] = 1 - 0 = 1$$

$$b)\ \int_{-\infty}^{0} e^x\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^x\, dx = \lim_{a\to-\infty} \left[e^x\right]_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty} [1 - e^a] = 1 - 0 = 1$$

$$c)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\, dx = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{x}{x^2+1}\, dx$$

Hacemos la sustitución $x^2 + 1 = u$. Entonces, $2x\, dx = du$ y

$$\int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \int \frac{1}{2u}\, du = \frac{1}{2} \ln u = \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1)$$

(ignorando la constante de integración). Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\, dx = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{2} \ln (b^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln(a^2 + 1)\right]$$

Ahora cuando $b \to \infty$, el primer término de la derecha se vuelve infinitamente grande, por lo cual el límite no existe. Por tanto, la integral impropia en esta parte no existe. (Nótese que **no debemos** hacer $a = -b$ y simplemente hacer $b \to \infty$. Debemos hacer $a \to -\infty$ como un límite distinto y separado de $b \to \infty$). ☛ **13**

EJERCICIOS 16-2

(1-8) En cada uno de los siguientes ejercicios, determine el área de la región acotada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las líneas $x = a$ y $x = b$.

1. $y = -x^2; \quad x = 0, x = 3$

2. $y = 1 - \sqrt{x}; \quad x = 1, x = 9$

3. $y = -e^x; \quad x = \ln 2, x = \ln 5$

4. $y = x^3; \quad x = -1, x = 1$

5. $y = x^2 - 4; \quad x = 0, x = 3$

6. $y = x^2 - 3x + 2; \quad x = 0, x = 3$

7. $y = 1 - x^2; \quad x = 0, x = 2$

8. $y = 2x - 1; \quad x = 0, x = 1$

(9-14) Encuentre el área entre los siguientes pares de curvas y entre las líneas verticales dadas.

9. $y = x^2, y = 3x; \quad x = 1, x = 2$

10. $y = x^2, y = 2x - 1; x = 0, x = 2$

11. $y = \sqrt{x}, y = x^2; x = 0, x = 1$

12. $y = x^2, y = x^3; \quad x = 0, x = 2$

13. $y = e^x$, $y = x^2$; $x = 0$, $x = 1$

14. $y = x^3$, $y = 3x - 2$; $x = 0$, $x = 2$

(15-18) Determine el área de la región encerrada entre los siguientes pares de curvas.

15. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$

16. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$

17. $y = x^3$, $y = x^2$

18. $y = x^2$, $y = 2x$

(19-20) Encuentre el área acotada por las siguientes curvas y las líneas.

19. $y = x^2$, $y = 0$, $y = 4$ y $x = 0$ (eje y)

20. $y^2 = x$, $y = 0$, $y = 2$ y $x = 0$

(21-30) Determine las siguientes integrales impropias, si existen.

21. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$

22. $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x - 2)^2}\, dx$

23. $\int_{-\infty}^{0} (2 - x)^{-3/2}\, dx$

24. $\int_{-1}^{\infty} (2x + 3)^{-4}\, dx$

25. $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1}\, dx$

26. $\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)^2}\, dx$

27. $\int_{-\infty}^{2} \frac{x - 1}{(x^2 - 2x + 2)^2}\, dx$

28. $\int_1^{\infty} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\, dx$

29. $\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-x^2}\, dx$

30. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{|x|}\, dx$

■ 16-3 APLICACIONES EN LA ADMINISTRACIÓN Y LA ECONOMÍA

Coeficientes de desigualdad para distribuciones de ingreso

Sea y la proporción del ingreso total de cierta población que se recibe por la proporción x de captadores de ingresos cuyo ingreso es mínimo. Por ejemplo, suponga que cuando $x = \frac{1}{2}$ entonces $y = \frac{1}{4}$. Esto significaría que al 50% de la población que recibe el ingreso más bajo corresponde el 25% del ingreso total. O si $y = 0.7$ cuando $x = 0.9$, entonces el 90% de la población con los ingresos más bajos recibiría el 70% del ingreso total. En general, dado que x y y son fracciones de un todo, están entre 0 y 1 incluso ($0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$) y y es una función de x, esto es, $y = f(x)$.

Supondremos que no hay personas que reciban un ingreso cero, de modo que $f(0) = 0$. Más aún, todo el ingreso es recibido por el 100% de los captadores de ingresos, y así $f(1) = 1$. La gráfica de la función $f(x)$ que describe la distribución de ingreso real se denomina una **curva de Lorentz**.

Suponga que una curva de Lorentz está dada por la ecuación $y = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x$. (Véase la figura 16). Cuando $x = 0.2$, tenemos

$$y = \tfrac{15}{16}(0.2)^2 + \tfrac{1}{16}(0.2) = 0.05$$

Esto significa que el 20% de la gente con los ingresos más bajos sólo recibe el 5% del ingreso total. De manera similar, si $x = 0.5$, tenemos

$$y = \tfrac{15}{16}(0.5)^2 + \tfrac{1}{16}(0.5) = 0.2656$$

esto es, que el 50% de tal gente sólo recibe 26.56% del ingreso total.

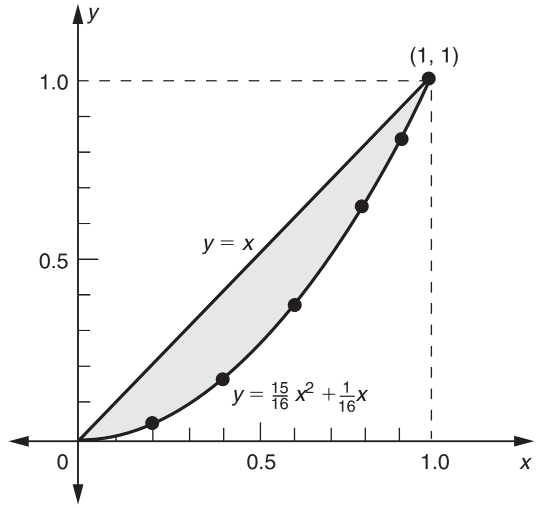


FIGURA 16

La equidad perfecta de la distribución del ingreso está representada por la línea $y = x$. Por ejemplo, de acuerdo con esto el 10% de la gente recibe el 10% del ingreso total, 20% de las personas reciben el 20% del ingreso total, etc. La desviación de la distribución de ingreso real de la equidad perfecta se mide por el grado en que la curva de Lorentz real se aparta de la línea recta $y = x$. Si la curva de Lorentz está cerca de la línea recta, el ingreso estará distribuido casi de manera uniforme, mientras que una gran desviación de la línea indica una considerable desigualdad en la distribución. Definimos el **coeficiente de desigualdad** de la curva de Lorentz como

$$L = \frac{\text{Área entre la curva y la línea } y = x}{\text{Área bajo la línea } y = x}$$

Ahora bien, el área bajo la línea $y = x$ es un triángulo rectángulo, de modo que está dada por

$$\tfrac{1}{2}(\text{base}) \times (\text{altura}) = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \tfrac{1}{2}$$

En consecuencia, el coeficiente de desigualdad de una curva de Lorentz está dado por

$$\boxed{\begin{aligned} L &= 2 \cdot \text{Área entre la curva de Lorentz y la línea } y = x \\ &= 2\int_0^1 [x - f(x)]\,dx \end{aligned}}$$

en donde $y = f(x)$ es la ecuación de la curva de Lorentz.

Por ejemplo, el coeficiente de desigualdad de la curva de Lorentz dada por $y = f(x) = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x$ es

$$L = 2\int_0^1 \left[x - \left(\frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x\right)\right] dx$$

$$= 2\int_0^1 \left(\frac{15}{16}x - \frac{15}{16}x^2\right) dx$$

$$= 2 \cdot \frac{15}{16}\int_0^1 (x - x^2)\, dx = \frac{15}{8}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{15}{8}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0 + 0\right) = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{16}$$

☛ **14.** Calcule el coeficiente de la desigualdad para la curva de Lorentz dada por $y = ax^2 + (1 - a)x$, en donde a es una constante. Verifique el resultado en el ejemplo dado en el texto.

El coeficiente de desigualdad siempre está entre 0 y 1, como es evidente por su definición geométrica. Cuando el coeficiente es cero, el ingreso está distribuido de manera uniforme perfecta; cuanto más cerca esté de 1, mayor será la desigualdad en la distribución del ingreso. ☛ **14**

Curvas de aprendizaje

En producción industrial, la administración a menudo debe estimar de antemano el número total de horas-hombre que requerirá con la finalidad producir un número determinado de unidades de su producto. Por ejemplo, esto se requiere para establecer el precio de venta, la fecha de entrega o la concertación de un contrato. Una herramienta que con frecuencia se utiliza para tal predicción se denomina *curva de aprendizaje.*

Se sabe que una persona tiende a requerir menos tiempo en la ejecución de una tarea particular si ya la ha realizado antes un número de veces. En otras palabras, cuanto más repita una persona una tarea, será más eficiente y empleará menos tiempo al realizarla de nuevo. Así, entre más unidades se produzcan en una serie de producción, el tiempo necesario para producir cada unidad irá descendiendo.

Sea $T = F(x)$ el tiempo (por ejemplo, en horas-hombre) necesario en la producción de las primeras x unidades. Un incremento Δx en la producción demanda un incremento ΔT en el tiempo, y la razón $\Delta T/\Delta x$ es el tiempo promedio por unidad adicional producida cuando el número de unidades producidas cambia de x a $x + \Delta x$. En el límite cuando $\Delta x \to 0$, esta razón se aproxima a la derivada $dT/dx = F'(x)$, que es el tiempo requerido por unidad adicional cuando ocurre un pequeño incremento en la producción. Al igual que las otras tasas marginales, esta cantidad es casi igual al tiempo requerido en la producción de la siguiente unidad; esto es, la unidad número $(x + 1)$.

Si hacemos $F'(x) = f(x)$, la función que por lo regular se utiliza en tal situación es de la forma

$$f(x) = ax^b$$

en donde a y b son constantes con $a > 0$ y $-1 \le b < 0$. La elección de ax^b con $-1 \le b < 0$ asegura que el tiempo requerido por unidad disminuye a medida que se producen más y más unidades. (Véase la figura 17). La gráfica de $f(x)$ se denomina una **curva de aprendizaje**. En la práctica, las constantes a y b se determinarían con base en series de producción preliminar o por experiencias con productos similares.

Respuesta $\frac{1}{3}a$. El ejemplo en el texto corresponde a $a = \frac{15}{16}$

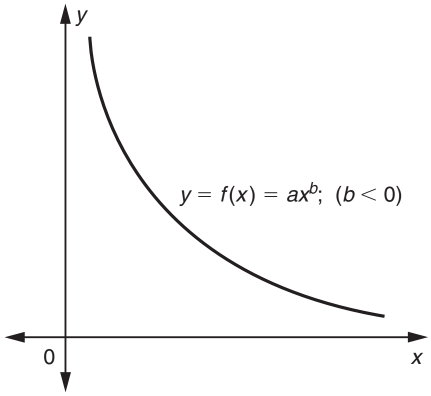


FIGURA 17

☛ **15.** Una curva de aprendizaje está dada por $f(x) = 1 + 3x^{-0.2}$. Calcule el número de horas de trabajo necesarias para producir las primeras 100 unidades y las segundas 100 unidades.

A condición de que el mejoramiento en la eficiencia o el aprendizaje sea lo bastante regular, la curva de aprendizaje (una vez que se ha establecido) puede utilizarse en la predicción del número total de horas-hombre requeridas en niveles de producción futuros. *El número total de horas-hombre ΔT requeridas para producir unidades numeradas $c + 1$ hasta d está dado por*

$$\begin{aligned}\Delta T &= (\text{horas-trabajo para unidades producidas } d) \\ &\quad -(\text{horas-trabajo para producir las primeras } c \text{ de ellas} \\ &= F(d) - F(c)\end{aligned}$$

Esto es,

$$\boxed{\Delta T = \int_c^d f(x)\,dx = \int_c^d ax^b\,dx}$$

EJEMPLO 1 Después de producir 1000 televisores, una empresa determina que su planta de ensamblado está siguiendo una curva de aprendizaje de la forma

$$f(x) = 20x^{-0.152}$$

en donde $f(x)$ es el número de horas-hombre requeridos con el propósito de ensamblar el televisor número $(x + 1)$. Estime el número total de horas-hombre requeridas en el ensamblado de 4000 televisores adicionales.

Solución El número total de horas-hombre requeridas en el ensamblado de 4000 televisores adicionales después de los primeros 1000 está dado por

$$\begin{aligned}\Delta T &= \int_{1000}^{5000} f(x)\,dx = \int_{1000}^{5000} 20x^{-0.152}\,dx = \left[20 \cdot \frac{x^{-0.152+1}}{-0.152 + 1}\right]_{1000}^{5000} \\ &= \frac{20}{0.848}\,[(5000)^{0.848} - (1000)^{0.848}] = 23.59(1370 - 350) \\ &= 24{,}060\end{aligned}$$

☛ **15**

Respuesta 249.3 y 210.6

Maximización de la utilidad con respecto al tiempo

Existen ciertas empresas como la explotación de minas y la perforación de pozos petroleros que se tornan no rentables después de cierto periodo. En tales operaciones, la tasa de ingreso $R'(t)$ (digamos dólares por mes) puede ser muy alta al inicio de la operación, aunque puede decrecer a medida que transcurre el tiempo debido al agotamiento del recurso. Esto es, $R'(t)$ a la larga se convierte en una función decreciente con respecto al tiempo. Por otra parte, la tasa de costo $C'(t)$ de operación es pequeña en un principio pero con frecuencia se incrementa a medida que el tiempo transcurre por el incremento en el mantenimiento, costo de extracción más altos y muchos otros factores. Por ello, la tasa de costo $C'(t)$ a menudo es una función creciente con respecto al tiempo. En tales operaciones existe un instante en que el costo de mantener la operación se hace más alto que el ingreso y la empresa empieza a perder dinero. El administrador de tal operación afronta el problema de seleccionar un instante para cerrar la empresa que resultaría en la utilidad máxima obtenida.

Denotemos con $C(t)$, $R(t)$ y $P(t)$ el costo total, el ingreso total y la utilidad total hasta el instante t (medidas desde el inicio de la operación), respectivamente. Se sigue que

$$P(t) = R(t) - C(t) \qquad \text{y asimismo} \qquad P'(t) = R'(t) - C'(t)$$

La utilidad máxima total ocurre cuando

$$P'(t) = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad R'(t) = C'(t)$$

En otras palabras, la operación debería realizarse hasta el instante t_1, en que $R'(t_1) = C'(t_1)$, esto es, hasta el instante en que la tasa de ingreso y la tasa de costo sean iguales. (Véase la figura 18).

La utilidad total en el instante t_1 está dada por

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} P'(t)\, dt = \int_0^{t_1} [R'(t) - C'(t)]\, dt$$

Ésta es la máxima utilidad que puede obtenerse y sin duda puede interpretarse como el área de la región acotada por las gráficas de $R'(t)$ y $C'(t)$ situada entre $t = 0$ y $t = t_1$.

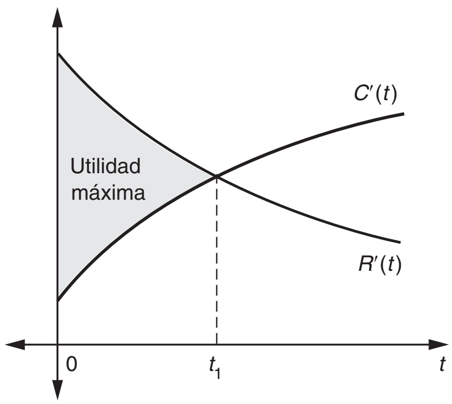


FIGURA 18

Observación Puesto que $t = 0$ es el instante en que la operación inicia la producción, el ingreso total $R(0)$ en este instante es cero. En el análisis anterior, habíamos supuesto también que el costo total $C(0)$ era cero. En general, esto no puede ser cierto, debido a los costos fijos (esto es, costos de apertura) que deben realizarse antes de que la producción se inicie. Así que, en la práctica, debemos restar estos costos fijos de la expresión anterior de $P(t_1)$ a fin de obtener la utilidad máxima real.

EJEMPLO 2 Las tasas de costo e ingreso de cierta operación minera están dados por

$$C'(t) = 5 + 2t^{2/3} \qquad \text{y} \qquad R'(t) = 17 - t^{2/3}$$

en donde C y R se miden en millones de dólares y t en años. Determine qué tanto deberá prolongarse la operación y encuentre la utilidad total que puede obtenerse durante este periodo.

Solución El instante óptimo t_1 que dará como resultado la utilidad máxima es el instante en que las dos tasas (de costo y de ingreso) son iguales. Es decir,

$$\begin{aligned} C'(t) &= R'(t) \\ 5 + 2t^{2/3} &= 17 - t^{2/3} \\ 3t^{2/3} &= 17 - 5 = 12 \\ t^{2/3} &= 4 \\ t &= 4^{3/2} = 8 \end{aligned}$$

En consecuencia, la operación deberá mantenerse por $t_1 = 8$ años. La utilidad que puede obtenerse durante este periodo de 8 años está dada por

$$\begin{aligned} P &= \int_0^8 [R'(t) - C'(t)]\, dt \\ &= \int_0^8 [17 - t^{2/3} - (5 + 2t^{2/3})]\, dt \\ &= \int_0^8 (12 - 3t^{2/3})\, dt = \left[12t - 3\,\frac{t^{5/3}}{5/3}\right]_0^8 \\ &= 96 - \tfrac{9}{5}(32) = 38.2 \text{ (millones de dólares)} \end{aligned}$$

Valor presente de un ingreso continuo

En la sección 6-1 expusimos el concepto del valor presente de un ingreso futuro. En los ejemplos como el que acabamos de dar, donde un ingreso está repartido a lo largo de un número de años futuros, a veces es útil calcular el valor presente de este ingreso. Esto puede ser particularmente valioso cuando una compañía tiene que elegir entre tasas alternativas para explotar sus recursos.

Como en estos casos el ingreso se obtiene continuamente sobre un periodo, es necesario utilizar descuentos continuos para calcular el valor presente. De acuerdo con este método, el valor presente de un ingreso I obtenido t años futuros es Ie^{-rt}, donde $r = R/100$ y R es la tasa de interés nominal (véase la sección 6-1). Si $f(t)$ es la tasa de utilidad en el tiempo t, entonces, el valor presente de la utilidad total obtenida entre $t = 0$ y $t = T$ está dada por

$$\text{Valor presente} = \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt \tag{1}$$

☛ **16.** ¿Cuál es el valor presente de un centavo por minuto recibido de manera continua durante el periodo de los siguientes 5 años?
Suponga una tasa de interés anual de 6%

Otra aplicación de esta idea es el caso de una anualidad que se paga sobre un periodo desde $t = 0$ hasta $t = T$. Si la anualidad se paga frecuentemente, podemos verla al menos aproximadamente como si se pagara de manera continua. El valor presente (o sea, el valor en $t = 0$) de la anualidad está dado por la ecuación (1), donde $f(t)$ es la tasa de la anualidad (en dólares por año). ☛ **16**

Respuesta
$\text{V.P.} = \int_0^5 (60 \cdot 24 \cdot 365)e^{-0.06t}\,dt$
$= 2{,}270{,}432$ centavos
$= \$22{,}704.32$

EJEMPLO 3 ***(Estrategia de desarrollo de recursos)*** Una compañía minera debe decidir entre dos estrategias para explotar sus recursos. Invirtiendo \$10 millones en maquinaria será capaz de producir una utilidad neta de \$3 millones anuales de manera que el recurso durará 10 años. Alternativamente, la compañía puede invertir \$15 millones en una maquinaria mejor para obtener una utilidad neta de \$5 millones al año por un periodo de 7 años. Suponiendo una tasa de descuento nominal de 10%, ¿cuál estrategia deberá utilizar la compañía?

Solución La primera estrategia tiene una razón de utilidad de $f(t) = 3$, así que su valor presente es ($r = 0.1$, $T = 10$)

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_0^{10} 3e^{-0.1t}\,dt - 10 \\ &= \Big[-30e^{-0.1t}\Big]_0^{10} - 10 \\ &= 30(1 - e^{-1}) - 10 = \$8.964 \text{ millones.} \end{aligned}$$

☛ **17.** Una persona estima que su ingreso anual t años a partir de hoy será de $(60 + 2t)$ miles de dólares. Calcule el valor presente de este ingreso en los siguientes 20 años, suponiendo que el ingreso se recibe de manera continua y utilizando una tasa de interés anual de 8%.

(Nótese que la inversión inicial de \$10 millones se debe restar del valor presente de la utilidad). Similarmente, el valor presente de la segunda estrategia es

$$P_2 = \int_0^7 5e^{-0.1t}\,dt - 15 = 50(1 - e^{-0.7}) - 15 = \$10.171 \text{ millones}$$

La segunda estrategia es mejor que la primera, por aproximadamente \$1.2 millones. ☛ **17**

Superávit del consumidor y del productor

Respuesta
$\text{V.P.} = \int_0^{20} (60 + 2t)e^{-0.08t}\,dt$
$= 747.04$ miles de dólares

Sea $p = f(x)$ la curva de demanda de cierto artículo y $p = g(x)$ la curva de la oferta del mismo artículo. Aquí x denota la cantidad del artículo que puede venderse o suministrarse a un precio p por unidad. En general, la función de demanda $f(x)$ es una función decreciente indicando que los consumidores dejarán de comprar si el precio se incrementa. Por otro lado, la función de la oferta $g(x)$ por lo regular es una función creciente porque los productores con todo gusto proveerán más si consiguen

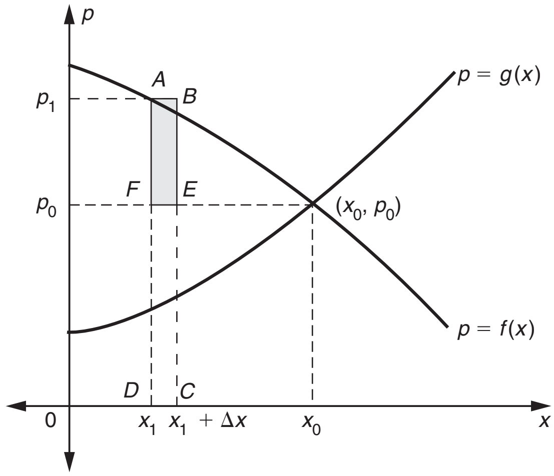


FIGURA 19

precios más altos. El equilibrio del mercado (x_0, p_0) es el punto de intersección de las curvas de demanda y de oferta. (Véase la figura 19).

A partir de la gráfica de la curva de demanda, es claro que a medida que el precio se incrementa, la demanda decrece. Esto implica que hay algunos consumidores que estarían dispuestos a comprar el artículo a un precio más alto, que el precio en el equilibrio del mercado p_0 que en realidad deberían pagar. Por tanto, estos consumidores ahorran dinero como resultado de la operación del mercado de libre competencia.

Considere la cantidad Δx de unidades entre x_1 y $x_1 + \Delta x$. El área $p_1\Delta x$ del rectángulo *ABCD* de la figura anterior puede interpretarse como la cantidad total de dinero que los consumidores pagarían por estas Δx unidades si el precio fuera $p_1 = f(x_1)$ por unidad. En el precio de equilibrio del mercado p_0, la cantidad real gastada por los consumidores en estas Δx unidades es $p_0\Delta x$. En otras palabras, los consumidores ahorran una cantidad igual a $p_1\Delta x - p_0\Delta x = [f(x_1) - p_0]\Delta x$ en estas unidades. Este ahorro es igual al área del rectángulo sombreado *ABEF* de la figura 19. Si dividimos el rango de $x = 0$ a $x = x_0$ en un gran número de intervalos de longitud Δx, obtenemos un resultado similar en cada intervalo: los ahorros de los consumidores son iguales al área de un rectángulo como *ABEF* situado entre la curva de demanda y la línea horizontal $p = p_0$. Sumando todos esos ahorros entre $x = 0$ y $x = x_0$, obtenemos el monto total (o ahorro) de los consumidores. Éste se conoce como el **superávit de los consumidores** (SC) y está dado por el área entre la curva de demanda $p = f(x)$ y la línea horizontal $p = p_0$. (Véase la figura 20).

El superávit de los consumidores está representado por la integral definida

$$\boxed{\mathrm{SC} = \int_0^{x_0} [f(x) - p_0]\, dx = \int_0^{x_0} f(x)\, dx - p_0x_0}$$

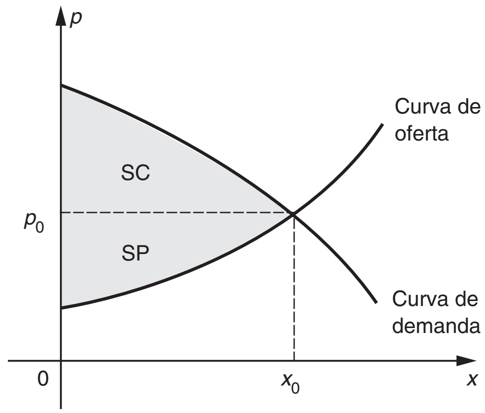


FIGURA 20

De manera similar, en un mercado de libre competencia existen también productores que estarían dispuestos a vender el artículo a un precio menor, que el de equilibrio de mercado p_0 que los consumidores en realidad pagan. En tal situación, los productores también se benefician; este beneficio de los productores se denomina el **superávit de los productores** (SP).

Usando un razonamiento similar al que se acaba de exponer, podemos comprobar que la ganancia total de los productores o superávit de los productores (SP) está dado por el área entre la curva de oferta y la recta horizontal $p = p_0$. (Véase la figura 20). Esto es,

$$\boxed{\text{SP} = \int_0^{x_0} [p_0 - g(x)]\,dx = p_0x_0 - \int_0^{x_0} g(x)\,dx}$$

en donde $p = g(x)$ es la relación de la oferta.

EJEMPLO 4 Las funciones de la oferta y la demanda de cierto producto están dadas por

$$S: \quad p = g(x) = 52 + 2x \tag{2}$$

$$D: \quad p = f(x) = 100 - x^2 \tag{3}$$

Determine el superávit del consumidor y del productor, suponiendo que se ha establecido el equilibrio del mercado.

Solución El punto de equilibrio (x_0, p_0) se obtiene resolviendo las ecuaciones de oferta y demanda simultáneamente para x y p. Igualando las dos expresiones de p de las ecuaciones (1) y (2),

$$52 + 2x = 100 - x^2$$

$$x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$(x - 6)(x + 8) = 0$$

☛ **18.** Calcule el superávit del consumidor y del productor, si las ecuaciones de la demanda y de la oferta son $3p + 5x = 28$ y $p = 2x + 2$, respectivamente.

que da $x = 6$ o $x = -8$. Dado que el valor negativo de x es inadmisible, nos quedamos con $x = 6$. Sustituyendo este valor en la ecuación (2), obtenemos que $p = 52 + 12 = 64$. Por consiguiente, tenemos los valores de equilibrio $x_0 = 6$ y $p_0 = 64$. El superávit del consumidor está dado ahora por

$$\text{SC} = \int_0^{x_0} [f(x) - p_0]\, dx$$

$$= \int_0^{6} [(100 - x^2) - 64]\, dx$$

$$= \left[36x - \frac{x^3}{3}\right]_0^6 = 216 - \frac{216}{3} = 144$$

Y el superávit de los productores es

$$\text{SP} = \int_0^{x_0} [p_0 - g(x)]\, dx$$

$$= \int_0^{6} [64 - (52 + 2x)]\, dx$$

$$= \left[12x - x^2\right]_0^6 = 72 - 36 = 36$$ ☛ **18**

Respuesta
$\text{SC} = \frac{10}{3}$, $\text{SP} = 4$

EJERCICIOS 16-3

1. *(Curva de Lorentz)* La distribución del ingreso de cierto país está descrita por la curva de Lorentz $y = \frac{19}{20}x^2 + \frac{1}{20}x$, en donde x es la proporción de captadores de ingresos y y es la proporción del ingreso total recibido.

a) ¿Qué proporción recibe el 20% de la gente más pobre?

b) Determine el coeficiente de desigualdad de la curva de Lorentz.

2. *(Curva de Lorentz)* Repita el ejercicio 1 en el caso de la curva de Lorentz $y = 0.94x^2 + 0.06x$.

3. *(Curva de aprendizaje)* Después de pintar los primeros 40 automóviles, un establecimiento de pintado de automóviles estima que la curva de aprendizaje es de la forma $f(x) = 10x^{-0.25}$. Encuentre el número total de horas-hombre que se requerirán para pintar 60 automóviles más.

4. *(Curva de aprendizaje)* Sonido X & Y produce radiorreceptores en su línea de ensamblado. Se sabe que los primeros 100 aparatos (1 unidad) les lleva un total de 150 horas-hombre y por cada unidad adicional de 100 aparatos, se requirió menos tiempo de acuerdo con la curva de aprendizaje $f(x) = 150x^{-0.2}$, en donde $f(x)$ es el número de horas-hombre requeridas para ensamblar la unidad número $(x + 1)$. ¿Cuántas horas-hombre se requerirán con el objetivo de ensamblar 5 unidades (esto es, 500 radiorreceptores) después de que se han ensamblado las primeras 5 unidades?

5. *(Curva de aprendizaje)* Electrónica Morales produce calculadoras electrónicas en su línea de ensamblado. Las primeras 50 calculadoras demandan 70 horas, y por cada unidad adicional de 50 calculadoras, se requiere menos tiempo de acuerdo con la curva de aprendizaje $f(x) = 70x^{-0.32}$. ¿Cuánto tiempo demandará el ensamblado de 500 calculadoras después de que se han ensamblado las primeras 200 calculadoras?

6. *(Curva de aprendizaje)* Suponiendo que existe una mejora del 20% cada vez que la producción se duplica (por ejemplo, la sexta unidad requiere 80% del tiempo consumido por la tercera unidad, la vigésima unidad requiere 80% del tiempo demandado por la décima unidad, etc.) determine el valor de la constante b para la curva de aprendizaje $f(x) = ax^b$.

7. *(Maximización de la utilidad)* Las tasas de ingreso y costo en una operación de perforación petrolera están dados por

$$R'(t) = 14 - t^{1/2} \qquad \text{y} \qquad C'(t) = 2 + 3t^{1/2}$$

respectivamente, en donde el tiempo t se mide en años y R y C se miden en millones de dólares. ¿Cuánto deberá prolongarse la perforación para obtener la utilidad máxima? ¿Cuál es esta utilidad máxima?

8. *(Maximización de la utilidad)* Las tasas de ingreso y de costo de cierta operación minera están dadas por

$$R'(t) = 10 - 2t^{1/3} \quad \text{y} \quad C'(t) = 2 + 2t^{1/3}$$

respectivamente, en donde t se mide en años y R y C se miden en millones de dólares. Determine por cuánto tiempo deberá continuarse la operación con la finalidad de obtener una utilidad máxima. ¿Cuál es el monto de la utilidad máxima, suponiendo que los costos fijos de operación inicial son de \$3 millones?

(9-14) *(Superávit del consumidor y del productor)* Determine el superávit del consumidor y del productor en el caso de un producto cuyas funciones de demanda y de oferta aparecen enseguida. (Suponga que se ha establecido el equilibrio del mercado).

9. $D: p = 15 - 2x$
$S: p = 3 + x$

10. $D: p = 17 - 0.5x$
$S: p = 5 + 0.3x$

11. $D: p = 1200 - 1.5x^2$
$S: p = 200 + x^2$

12. $D: p = 120 - x^2$
$S: p = 32 + 3x$

13. $D: p = \dfrac{280}{x + 2}$
$S: p = 20 + 2.5x$

14. $D: p = \dfrac{370}{x + 6}$
$S: p = 3.8 + 0.2x$

15. *(Decisión de inversión)* Una compañía puede reducir sus gastos laborales automatizando su planta. Sin embargo, la automatización de la planta requiere mantenimiento sustancial extra, el cual se incrementa con el tiempo. El ahorro neto anual después de t años está dado por $S'(t) = 120 - 4t - (1/2)t^2$ (millones de dólares por año). Calcule el ahorro total sobre los 8 primeros años. ¿Cuántos años debe conservarse el equipo automatizado antes de que los ahorros totales empiecen a decrecer? ¿Cuál es el valor máximo de los ahorros totales?

16. *(Decisión de inversión)* Una compañía está considerando la compra de una nueva maquinaria con un costo de \$5000. Se estima que la máquina ahorrará dinero a la compañía a una tasa de $160(5 + t)$ dólares anuales en un tiempo t después de la adquisición. ¿Se pagará la máquina a sí misma durante los próximos 5 años?

17. *(Decisión de inversión)* Para tomar la decisión correcta en el ejercicio anterior, la compañía debe calcular el valor presente de sus ahorros futuros y compararlos con el costo de la máquina. Calcule el valor presente de los ahorros en los primeros 5 años después de la adquisición de la máquina, suponiendo una tasa de interés nominal del 8%. ¿Se pagará la máquina a sí misma ahora en este periodo de 5 años?

18. *(Maximización de utilidad)* En una operación de extracción de petróleo las tasas de ingresos y costos son

$$R'(t) = 20 - t, \qquad C'(t) = 4$$

donde t está en años, R y C en millones de dólares. Encuentre el número de años que tiene que funcionar la operación para asegurar una utilidad total máxima. Calcule el valor presente de la utilidad total suponiendo una tasa nominal de descuento de 10%.

19. *(Maximización de utilidad)* Repita el ejercicio anterior si

$$R'(t) = 50 - 2t, \qquad C'(t) = 20 + t$$

y la tasa de descuento nominal es 12.5%

20. *(Estrategia de desarrollo)* Una compañía minera puede escoger entre dos estrategias para explotar sus recursos. La primera implica un costo inicial de \$25 millones y producirá una utilidad neta de \$10 millones anuales durante los próximos 20 años. La segunda representa un costo inicial de \$60 millones y producirá una utilidad neta de \$20 millones anuales por un periodo de 10 años. Calcule el valor presente de estas dos estrategias suponiendo una tasa de descuento nominal de 10%. ¿Cuál es la mejor estrategia?

21. *(Estrategia de desarrollo)* Repita el ejercicio 20 cuando la tasa de utilidad para la primera estrategia es $P'(t) = (20 - t)$ millones de dólares y la tasa de utilidad para la segunda es de $P'(t) = (40 - 4t)$ millones de dólares. Suponga los mismos costos y tasa de descuentos iniciales.

22. *(Ahorro de maquinaria y costos)* Una compañía adquirió una máquina nueva a un costo de \$19,000. Estiman que esta máquina ahorrará dinero a la compañía a razón de $1000(5 + t)$ dólares por año en un tiempo de t años después de su adquisición. Sin embargo, el costo de operación de la máquina en ese tiempo será $(1500 + 135t^2)$ dólares anuales. Calcule el ahorro neto total de la compañía durante los primeros t años. Pruebe que después de 5 años estos ahorros netos han sobrepasado el precio de adquisición. Determine el número de años que la compañía deberá quedarse con la máquina y el ahorro neto total durante ese tiempo.

23. *(Crecimiento del capital)* Si $A(t)$ es el capital de una empresa en el instante t e $I(t)$ es la tasa de inversión, se sigue que $dA/dt = I$. Determine el incremento en el capital entre $t = 4$ y $t = 9$ si la tasa de interés está dada por $I(t) = 4 + \sqrt{t}$ (en miles de dólares por año).

(24-26) *(Crecimiento de capital)* Durante el periodo $0 \le t \le T$, un capital es invertido continuamente en una empresa a una tasa $I(t)$. Si la inversión crece continuamente a una tasa de interés nominal R, entonces, el capital invertido en un tiempo t habrá crecido en valor por el factor $e^{r(T-t)}$ al final del periodo ($r = R/100$). Por tanto, el valor final de la inversión es igual a

$$A(T) = \int_0^T I(t)e^{r(T-t)}\, dt$$

Calcule el valor final si $r = 0.1$ y $T = 10$ en los siguientes casos.

24. $I(t) = I$, constante

25. $I(t) = \begin{cases} 2I & \text{si } 0 \leq t \leq 5 \\ 0 & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}$

26. $I(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq 5 \\ 2I & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}$

¿Cuál de las tres estrategias en los ejercicios 24-26 da el valor final máximo? ¿Por qué?

***27.** *(Superávit del consumidor y del productor)* Si la curva de demanda es $p = f(x)$, demuestre que

$$\left(\frac{d}{dx_0}\right)(\text{SC}) = -x_0 f'(x_0)$$

[*Sugerencia*: si $x_0 \to x_0 + \Delta x_0$, se sigue que $\Delta(\text{SC}) \approx x_0(-\Delta p_0)$]. Si la curva de oferta es $p = g(x)$, pruebe que

$$\left(\frac{d}{dx_0}\right)(\text{SP}) = x_0 g'(x_0)$$

Demuestre también que

$$\text{SC} = -\int_0^{x_0} xf'(x)\, dx \qquad \text{y} \qquad \text{SP} = \int_0^{x_0} xg'(x)\, dx$$

Usando integración por partes, obtenga las expresiones de SC y SP dadas en el texto.

28. Pruebe que

$$\text{SP} = \int_0^{p_0} x\, dp \qquad \text{y} \qquad \text{SC} = \int_{p_0}^{p_m} x\, dp$$

en donde p_m es el precio en que la demanda cae a cero.

***29.** *(Rentabilidad financiera)* En una empresa en que los bienes de capital se consideran fijos, sea $P(x)$ el valor en dólares de la producción cuando se emplean por semana x horas-hombre de mano de obra. La derivada $P'(x)$ se denomina la **productividad marginal de la mano de obra**. Si w es la tasa de salarios (en dólares por hora-hombre), la función de utilidad está dada por $P(x) - wx$ (ignorando costos fijos). Demuestre que tiene sentido contratar x_0 horas-hombre en donde x_0 es la solución de la ecuación $P'(x_0) = w$. Luego, pruebe que la utilidad está dada por

$$\int_0^{x_0} [P'(x) - P'(x_0)]\, dx$$

e interprete esto como un área apropiada. Esta cantidad se conoce como la **rentabilidad financiera** de los bienes de capital dados. Encuentre la rentabilidad financiera si la productividad marginal está dada por $P'(x) = 120(x + 400)^{-1/2}$, en donde la tasa de salarios es:

a) \$3 por hora

b) \$4 por hora

c) \$5 por hora

■ 16-4 VALOR PROMEDIO DE UNA FUNCIÓN

Sea $y = f(x)$ una función definida en los n puntos $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$. Entonces el valor promedio de los n valores de la función correspondientes $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$ se denota por $\overline{f}$ o $\overline{y}$ y está dado por

$$\overline{y} = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

Esta definición puede extenderse al caso cuando $f(x)$ está definida y es *continua* para todos los puntos en un intervalo $[a, b]$. Entonces, el valor promedio de $f(x)$ sobre $[a, b]$ está definido como

$$\boxed{\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx}$$

Si $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$, entonces podemos interpretar $\overline{f}$ geométricamente como sigue. De la definición anterior de $\overline{f}$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{f}(b - a) \tag{1}$$

Pero $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área entre el eje x, la curva $y = f(x)$, y las rectas verticales $x = a$, $x = b$. De la ecuación (1), esta área es igual $\overline{f}(b - a)$, la cual es igual al área de un rectángulo de altura $\overline{f}$ y ancho $b - a$, como se muestra en la figura 21. Así, $\overline{f}$ es la altura del rectángulo que contiene la misma área que aquélla bajo la curva.

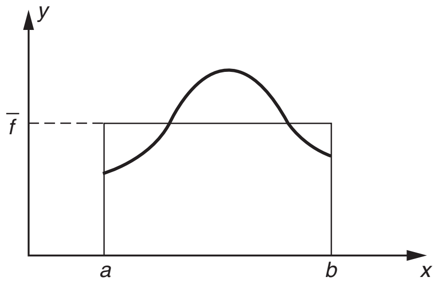


FIGURA 21

EJEMPLO 1 Encuentre el valor promedio de la función $f(x) = x^3$ en el intervalo $[1, 3]$, e interprete geométricamente el resultado.

Solución Tenemos

$$\overline{f} = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{3 - 1}\int_1^3 x^3\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = 10$$

☛ **19.** Calcule *a*) el valor promedio de e^x en $-1 \leq x \leq 1$ *b*) el valor promedio de x en $a \leq x \leq b$

Un rectángulo de altura 10 y ancho $b - a = 3 - 1 = 2$ tiene la misma área que la región bajo la curva $y = x^3$ entre $x = 1$ y $x = 3$. ☛ **19**

EJEMPLO 2 Una dosis de 2 miligramos de cierta droga es inyectada en el torrente sanguíneo de una persona. La cantidad de droga que queda en la sangre después de t horas está dada por $f(t) = 2e^{-0.32t}$. Encuentre la cantidad promedio de la droga en el torrente sanguíneo durante la segunda hora.

Solución Aquí tenemos que encontrar el valor promedio de $f(t)$ en el intervalo desde $t = 1$ a $t = 2$. Por definición tenemos

$$\overline{f} = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2 - 1}\int_1^2 2e^{-0.32t}\,dt = 2\left[\frac{e^{-0.32t}}{-0.32}\right]_1^2$$

$$= \frac{-1}{0.16}(e^{-0.64} - e^{-0.32}) = 1.24$$

Respuesta
a) $\frac{1}{2}(e - e^{-1})$ *b*) $\frac{1}{2}(a + b)$

☛ **20.** En el ejemplo 3, calcule la utilidad promedio esperada semanal durante el segundo año, suponiendo que la tasa de crecimiento permanece igual.

EJEMPLO 3 Una compañía introduce un producto nuevo, al que le pone un precio de \$5. El costo de producir x unidades semanales es $(1000 + 2x)$ dólares. Se proyecta que durante el primer año, las ventas semanales aumentarán a una tasa constante de 200 a 600 unidades. Calcule la utilidad promedio esperada semanal durante el primer año.

Solución El ingreso de x unidades semanales es $5x$ dólares. Por tanto, la función de utilidad semanal es

$$P(x) = \text{Ingreso} - \text{Costo} = 5x - (1000 + 2x) = 3x - 1000$$

El valor promedio de esta función en el intervalo $200 \leq x \leq 600$ es, entonces,

$$\overline{P}(x) = \frac{1}{600 - 200}\int_{200}^{600}(3x - 1000)\, dx = \frac{1}{400}\left[\frac{3}{2}x^2 - 1000x\right]_{200}^{600} = 200$$

Por tanto, la utilidad promedio es \$200 semanales durante el primer año. ☛ **20**

Respuesta \$1400

EJERCICIOS 16-4

(1-12) Encuentre el valor promedio de las funciones en los intervalos dados.

1. $f(x) = 3$; $[a, b]$

2. $f(x) = 2x + 5$; $[1, 4]$

3. $f(x) = x^2$; $[0, 2]$

4. $f(x) = 4 - 3x^2$; $[-1, 1]$

5. $f(x) = x^3$; $[0, 2]$

6. $f(x) = 5 - 4x^3$; $[1, 2]$

7. $f(x) = x^2 + 2x$; $[1, 3]$

8. $f(x) = x\sqrt{x^2 + 16}$; $[0, 3]$

9. $f(x) = e^x$; $[0, \ln 2]$

10. $f(x) = (\ln x)/x$; $[1, 5]$

11. $f(x) = 1/x$; $[1, e]$

12. $f(x) = \ln x$; $[1, 3]$

13. *(Costo promedio)* El costo semanal C (en dólares) de producir x unidades de un producto está dado por

$$C(x) = 5000 + 16x + 0.1x^2$$

El fabricante estima que la producción será entre 200 y 300 unidades. ¿Cuál será el costo promedio semanal en ese intervalo?

14. *(Ingreso promedio)* La función de demanda de un producto es $p = 20 - 0.05x$, donde x unidades pueden venderse a un precio de p cada una. Encuentre el ingreso promedio en el intervalo de venta desde $x = 100$ hasta $x = 200$.

15. *(Valor promedio de una inversión)* Si una suma de \$1000 se invierte al 6% compuesto continuamente, entonces el valor V de la inversión después de t años es $V = 1000e^{0.06t}$. Encuentre el valor promedio de una inversión a 5 años.

16. *(Tamaño promedio de una población)* La población de un pueblo pequeño era de 2000 en 1987 y ha crecido de acuerdo con la fórmula $p(t) = 2000e^{0.03t}$, donde t se mide en años y $t = 0$ corresponde a 1987. Encuentre la población promedio del pueblo entre los años 1987 y 1997.

17. *(Inventario promedio)* Un almacén pide a un fabricante 100 artículos cada 4 semanas. Durante las primeras 4, los artículos se venden a razón de 20 por semana, durante las segundas 4 se venden 30 artículos por semana. Calcule el número promedio de artículos almacenados durante un periodo de 8 semanas.

18. *(Rendimiento promedio)* El ingreso de una inversión minera es cero durante los primeros dos años y después varía de acuerdo con la fórmula $R(t) = 5e^{-0.1(t-2)}$ $(t \geq 2)$, donde t es el tiempo en años. Calcule la ganancia promedio anual en el intervalo $0 \leq t \leq 10$.

19. *(Tamaño promedio de una población)* Una población está disminuyendo de acuerdo con la fórmula $P(t) = 2 \times 10^6/(1 + t)$, donde t es el tiempo. Encuentre el tamaño promedio de la población entre $t = 1$ y $t = 3$.

20. *(Temperatura promedio)* Cierto día entre las 6 A.M. y las 6 P.M., la temperatura en Vancouver varía de acuerdo con la fórmula $T(t) = 13 + 3t - \frac{3}{16}t^2$. (Donde t es el tiempo en horas y $t = 0$ corresponde a las 6 a.m.) Calcule la temperatura promedio:

a) Entre las 6 A.M. y mediodía

b) Entre mediodía y las 6 P.M.

21. *(Velocidad promedio)* La velocidad de un objeto arrojado verticalmente al aire está dado por $V(t) = 64 - 32t$, donde t es el tiempo en segundos. Calcule la velocidad promedio:

a) Durante el primer segundo

b) Entre $t = 1$ y $t = 3$

22. *(Costo promedio y curva de aprendizaje)* Una fábrica de televisores encuentra que la curva de aprendizaje para una línea de montaje es $f(x) = 20x^{-0.152}$, donde $f(x)$ es el número de horas de trabajo necesarias para armar el aparato número $(x + 1)$. Calcule el número promedio de horas de trabajo en armar aparatos:

a) Durante los primeros 1000

b) De 3001 a 4000

23. *(Presión promedio de la sangre)* En el transcurso de la reunión muy tensa de un comité, la presión sistolítica de la sangre del presidente de la sesión aumentó de acuerdo con la fórmula $P(t) = 140 + 4t + \frac{1}{2}t^2$, donde t es el tiempo en horas. Calcule la presión promedio de la sangre:

a) Durante la primera media hora

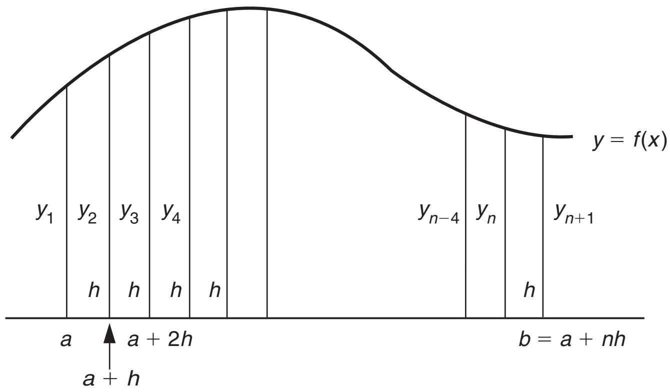
b) Durante la tercera hora

■ 16-5 INTEGRACIÓN NUMÉRICA (SECCIÓN OPCIONAL)

Considere la integral $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\, dx$. Como $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$ es continua y no negativa en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, esta integral representa el área bajo la curva $y = \sqrt{1 + x^4}$ entre $x = 0$ y $x = 1$. Pero no podemos encontrar la antiderivada de $\sqrt{1 + x^4}$ por los métodos estudiados en este libro. De hecho, esta antiderivada no puede expresarse en términos de funciones elementales. En realidad, hay muchas de esas funciones cuyas antiderivadas no pueden encontrarse por los métodos de integración conocidos. Por ejemplo, otra función es $f(x) = e^{-x^2/2}$, la cual se usa frecuentemente en estadística y cuya antiderivada no puede encontrarse en términos de funciones elementales. En esos casos, no podemos usar el teorema fundamental del cálculo para evaluar la integral definida. Pero existen métodos que nos permiten calcular valores aproximados de cualquier integral definida y el proceso se conoce como **integración numérica**. En esta sección describiremos dos de estos métodos para evaluar aproximadamente la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$.

Regla del trapecio

Considere la integral $\int_a^b f(x)\, dx$. Para deducir la regla del trapecio, primero dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales, de longitud h cada uno, de manera que $h = (b - a)/n$. Los extremos de los subintervalos son $a, a + h, a + 2h, a + 3h, \ldots,$ y denotamos los valores de $f(x)$ en esos puntos por $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n+1}$, como se muestra en la figura 22. En cada subintervalo, aproximamos el área bajo la curva por el área del trapecio que consiste en la figura de cuatro lados con dos lados verticales y cuyo lado superior se obtiene uniendo los dos puntos de la gráfica correspondientes a los extremos del subintervalo. (Véase la figura 23). Entonces, el área total bajo la curva desde $x = a$ a $x = b$ es aproximadamente igual a la suma de las áreas de los n trapecios.



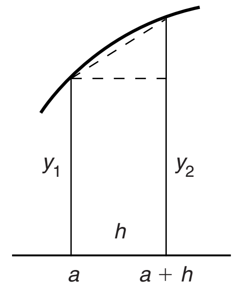


FIGURA 22

FIGURA 23

Considere el trapecio en el primer subintervalo. El área de este trapecio es igual a la suma de las áreas del rectángulo de altura y_1, y ancho h y del triángulo de base h y altura $(y_2 - y_1)$, como se muestra en la figura 23. Por tanto, el área de este trapecio es

$$h \cdot y_1 + \frac{1}{2}h(y_2 - y_1) = \frac{h}{2}(y_1 + y_2)$$

Análogamente, las áreas de los trapecios en los otros subintervalos son

$$\frac{h}{2}(y_2 + y_3), \; \frac{h}{2}(y_3 + y_4), \ldots, \; \frac{h}{2}(y_n + y_{n+1})$$

Así,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &\simeq \text{Suma de las áreas de los trapecios} \\
&= \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \frac{h}{2}(y_2 + y_3) + \frac{h}{2}(y_3 + y_4) \\
&\quad + \cdots + \frac{h}{2}(y_n + y_{n+1}) \\
&= \frac{h}{2}[y_1 + 2(y_2 + y_3 + \cdots + y_n) + y_{n+1}]
\end{aligned}$$

Podemos resumir la regla del trapecio como sigue.

Regla del trapecio

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}[y_1 + 2(y_2 + y_3 + \cdots + y_n) + y_{n+1}]$$

donde $h = (b - a)/n$ y $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n+1}$ son los valores de $y = f(x)$ en $x = a, a + h, a + 2h, \ldots, a + nh = b$

Es intuitivamente claro que tendremos una mejor aproximación incrementando el número de subintervalos n.

EJEMPLO 1 Encuentre el valor aproximado de $\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$ usando la regla del trapecio con $n = 6$.

Solución Aquí $a = 0$ y $b = 3$, así que

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = 0.5$$

Entonces los extremos de los seis subintervalos son $x = 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ y 3, y los valores correspondientes de $y = e^{-x^2}$, están dados en la tabla 1. Entonces, por la regla del trapecio tenemos

$$\int_0^3 e^{-x^2}\,dx \simeq \frac{h}{2}\,[(y_1 + y_7) + 2(y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6)]$$

$$\simeq \frac{0.5}{2}\,[(1 + 0.0001) + 2(0.7788 + 0.3679 + 0.1054 + 0.0183 + 0.0019)]$$

$$\simeq 0.8862$$ ☛ **21**

☛ **21.** Utilice la regla del trapecio para aproximar $\int_0^5 x^2\,dx$ utilizando
a) 5 subintervalos
b) 10 subintervalos.
¿Cuál es el valor exacto?

TABLA 1

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	e^{0} 1 y_1	$e^{-0.25}$ 0.7788 y_2	e^{-1} 0.3679 y_3	$e^{-2.25}$ 0.1054 y_4	e^{-4} 0.0183 y_5	$e^{-6.25}$ 0.0019 y_6	e^{-9} 0.0001 y_7

Regla de Simpson

En la evaluación aproximada mediante la regla del trapecio de $\int_a^b f(x)\,dx$, aproximamos la curva $y = f(x)$ por un conjunto de segmentos de rectas. En la regla de Simpson aproximamos la curva $y = f(x)$ por un conjunto de arcos parabólicos. La fórmula resultante da una mejor aproximación a la integral que la regla del trapecio con el mismo número n de subintervalos.

Regla de Simpson (enunciado)

Si $y = f(x)$ es continua en el intervalo $a \le x \le b$, entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\,[y_1 + y_{n+1} + 2(y_3 + y_5 + \cdots)\ 4(y_2 + y_4 + \cdots)]$$

donde n es **par** $h = (b - a)/n$, y $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n+1}$ son los valores de $y = f(x)$ en $x = a, a + h, a + 2h, \ldots, a + nh = b$.

Respuesta *a*) 42.5; *b*) 41.875
(valor exacto = 41.666. . .)

La demostración de esta regla es complicada y se omite.

Forma práctica de la regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\,[X + 2O + 4E]$$

donde

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{\text{Número de subintervalos (par)}}$$

X = Suma de las ordenadas **extremas** (o sea, la primera y la última ordenadas)

O = Suma de las **otras** ordenadas **impares** (o sea, omitiendo la primera y la última ordenadas)

E = Suma de las ordenadas **pares**

Nota Aquí X representa a *Ex*, las primeras dos letras de la palabra **extremas**.

EJEMPLO 2 Aplique la regla de Simpson de integración aproximada para aproximar $\int_2^{10} \frac{1}{x+1}\,dx$ tomando $n = 8$ subintervalos iguales. Dé la respuesta correcta con tres cifras decimales.

Solución Cuando calculamos la respuesta correcta con tres cifras decimales, primero calculamos cada término correcto con cuatro decimales (uno más) y después redondeamos la respuesta a tres decimales. Aquí $y = f(x) = 1/(x + 1)$, $a = 2$, $b = 10$ y $n = 8$ (par). Por tanto $h = (b - a)/n = (10 - 2)/8 = 1$. Así los valores de x, llamados $a, a + h, a + 2h, \ldots, a + 8h$, son 2, 3, 4, . . . , 10, y los valores de $y = f(x)$, llamados $y_1, y_2, y_3, \ldots,$ están dados por la tabla 2. Ahora,

$$X = \text{Suma de las ordenadas extremas} = y_1 + y_9$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{11} = 0.3333 + 0.0909 = 0.4242$$

$$O = \text{Suma de las otras ordenadas impares (excluyendo la primera y la última)}$$

$$= y_3 + y_5 + y_7 = \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$$

$$= 0.2000 + 0.1429 + 0.1111 = 0.4540$$

$$E = \text{Suma de las ordenadas pares} = y_2 + y_4 + y_6 + y_8$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10}$$

$$= 0.2500 + 0.1667 + 0.1250 + 0.1000 = 0.6417$$

Por tanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}[X + 2O + 4E]$$

TABLA 2

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y = f(x)$	$\frac{1}{3}$ y_1	$\frac{1}{4}$ y_2	$\frac{1}{5}$ y_3	$\frac{1}{6}$ y_4	$\frac{1}{7}$ y_5	$\frac{1}{8}$ y_6	$\frac{1}{9}$ y_7	$\frac{1}{10}$ y_8	$\frac{1}{11}$ y_9

☛ **22.** Utilice la regla de Simpson para aproximar $\int_0^x x^4\,dx$ utilizando
a) 4 subintervalos
b) 8 subintervalos
¿Cuál es el valor exacto?

o

$$\int_2^{10} \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{3}[0.4242 + 2(0.4540) + 4(0.6417)] \simeq 1.300$$

(El valor real es $\frac{11}{3} \simeq 1.299$). ☛ **22**

EJEMPLO 3 Use la regla de Simpson para encontrar el área aproximada entre el eje x, las rectas $x = 2$, $x = 8$ y una curva continua que pasa por los puntos listados en la siguiente tabla.

TABLA 3

x	2	3	4	5	6	7	8
y	3.2	3.7	4.1	5	4.3	3.5	3.1

Solución Aquí $f(x)$ no está dada en forma explícita. De los datos dados, la longitud de cada subintervalo es $h = 1$ y los valores de y_1, y_2, . . . están dados. Nótese que tenemos los resultados que se muestran en la tabla 4. Así,

$$X = \text{Suma de las ordenadas extremas} = y_1 + y_7$$

$$= 3.2 + 3.1 = 6.3$$

$$O = \text{Suma de las otras ordenadas impares} = y_3 + y_5$$

$$= 4.1 + 4.3 = 8.4$$

$$E = \text{Suma de las ordenadas pares} = y_2 + y_4 + y_6$$

$$= 3.7 + 5 + 3.5 = 12.2$$

TABLA 4

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
3.2	3.7	4.1	5	4.3	3.5	3.1

Respuesta *a*) 6570.67
b) 6554.67 (valor exacto = 6553.6)

Por tanto, por la regla de Simpson, el área aproximada está dada por

$$\int_2^8 f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}[X + 2O + 4E]$$

$$\simeq \frac{1}{3}[6.3 + 2(8.4) + 4(12.2)]$$

$$\simeq 24.0 \text{ unidades} \qquad \text{(redondeado a un decimal).}$$

Las fórmulas para la evaluación numérica aproximada de las integrales como las que acabamos de dar se calculan muy bien utilizando una computadora digital. En esos casos se puede tomar un número muy grande de subintervalos n y se pueden obtener valores en extremo exactos para muchas de las integrales. Si ha tomado un curso de programación puede encontrar interesante escribir programas para calcular integrales usando cualquiera de las dos reglas dadas en esta sección. Pruebe sus programas con varios valores de n para los ejercicios dados en la sección 16-l.

EJERCICIOS 16-5

(1-4) Utilice la regla del trapecio de integración aproximada para evaluar las siguientes integrales definidas. Redondee la respuesta a tres decimales. (En los ejercicios 1 y 4 verifique la exactitud de la respuesta por antiderivación).

1. $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ tomando cuatro intervalos iguales

2. $\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx$ tomando cuatro intervalos iguales

3. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx$ tomando cinco intervalos iguales

4. $\int_4^8 \frac{1}{x - 3}\,dx$ tomando ocho intervalos iguales

(5-8) Utilizado la regla de Simpson, encuentre los valores aproximados para las siguientes integrales definidas (con tres decimales).

5. $\int_4^8 \frac{1}{x}\,dx$ tomando ocho intervalos iguales

6. $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx$ tomando cuatro intervalos iguales

7. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{2 + x}}\,dx$ tomando seis intervalos iguales

8. $\int_0^1 e^{-x^2/2}\,dx$ tomando cuatro intervalos iguales

9. Use la regla de Simpson para encontrar el valor aproximado de $\int_{-3}^3 x^4\,dx$ tomando siete ordenadas equidistantes. Compárelo con el valor exacto.

10. Sabiendo que $e^0 = 1$, $e^1 = 2.718$, $e^2 = 7.389$, $e^3 = 20.086$ y $e^4 = 54.598$ utilice la regla de Simpson para encontrar el valor aproximado de $\int_0^4 e^x\,dx$ y compárelo con el valor exacto utilizando antiderivación.

11. Use ambas reglas, la del trapecio y la de Simpson, para encontrar el área aproximada bajo la curva continua que pasa por los puntos:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	1.82	4.19	6.90	9.21	11.65	14.36	16.72

12. Repita el ejercicio 11 para la curva que pasa por los puntos:

x	0	0.5	1	1.5	2
y	2	2.03	2.24	2.72	3.46

13. *(Área de una sección transversal)* Un río tiene 80 pies de ancho. La profundidad d a una distancia de x pies de una de las orillas está dada por la siguiente tabla:

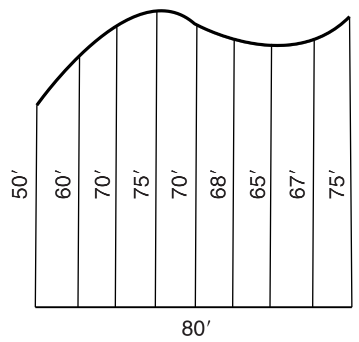
x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
y	0	4	7	9	12	15	14	8	3

pruebe que el área aproximada de la sección transversal es de 710 pies cuadrados de acuerdo con la regla de Simpson.

14. *(Medida de terrenos)* Una parcela tiene un frente de 80 pies de largo. En la figura se muestran los anchos a intervalos de 10 pies. Encuentre el área aproximada del terreno utilizando:

a) La regla del trapecio

b) La regla de Simpson



■ 16-6 ECUACIONES DIFERENCIALES: UNA INTRODUCCIÓN

Existe una gran cantidad de situaciones en la administración y la economía en que la formulación matemática de un problema da como resultado una ecuación en que interviene la derivada de una función desconocida. Por ejemplo, considere, la siguiente situación.

Un monto de capital A_0 se invierte a una tasa de interés nominal del R por ciento anual, en donde la inversión está sujeta a un crecimiento que se capitaliza en cada instante, esto es, el interés de la inversión es compuesto continuo. (Véase la sección 6-1). Suponga que deseamos determinar el valor total de la inversión $A(t)$ en cualquier instante t. Elegimos $t = 0$ correspondiente al instante en que se realiza la inversión inicial. En otras palabras, $A(0) = A_0$.

Con la finalidad de formular este problema en forma matemática, en primer lugar calculamos el valor de la inversión $A(t)$ cuando la tasa de interés se capitaliza n veces en un año. Si Δt denota la duración de cada periodo y hay n periodos de interés en cada año, entonces $n \cdot \Delta t = 1$ o $\Delta t = 1/n$ años. Si $A(t)$ y $A(t + \Delta t)$ son los montos de la inversión en los instantes t y $t + \Delta t$, se sigue que el interés ganado durante el lapso entre t y $t + \Delta t$ está dado por la diferencia

$$A(t + \Delta t) - A(t) = \Delta A$$

Este interés ΔA es generado por el capital inicial que era $A(t)$ al inicio del intervalo de tiempo dado. Pero si la tasa de interés anual nominal es del R por ciento, con n periodos por año, se sigue que el porcentaje de interés durante un periodo es de R/n. De modo que el interés efectivo durante Δt es igual a

$$(\text{Capital inicial}) \times (\text{Porcentaje de interés})/100 = A(t)(R/100n) = A(t)r\Delta t$$

en donde $r = R/100$ y $\Delta t = 1/n$. En consecuencia,

$$\Delta A = rA\,\Delta t \qquad \text{o bien,} \qquad \frac{\Delta A}{\Delta t} = rA$$

Si el interés ha de capitalizarse en forma continua, debemos incrementar el número de periodos de interés en un año indefinidamente, esto es, debemos tomar

☛ **23.** Proporcione el orden de las ecuaciones diferenciales siguientes y establezca si son lineales o no lineales:

a) $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4 - y$

b) $\frac{dy}{dt} - t\frac{d^2y}{dt^2} = t^3y$

c) $\frac{du}{dy} - y^2u = 2$

Respuesta *a*) Primer orden, no lineal
b) segundo orden, lineal
c) primer orden, lineal (u es la variable dependiente, no y)

el límite cuando $n \to \infty$. Si $n \to \infty$, $\Delta t = 1/n \to 0$ y $\Delta A/\Delta t \to dA/dt$. Así, la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{dA}{dt} = rA \tag{1}$$

Ahora dA/dt representa la tasa de cambio en el valor de la inversión en cualquier instante t. Por consiguiente, la ecuación anterior establece que la *tasa de crecimiento de la inversión es proporcional al valor de la inversión en el instante* t *en que el interés se capitaliza en forma continua.*

El valor de la inversión $A(t)$ en cualquier instante t debe satisfacer la ecuación (1) en que interviene la derivada de la función desconocida $A(t)$. Esta ecuación es un ejemplo de lo que se conoce como *ecuaciones diferenciales.* Damos ahora algunas definiciones formales.

DEFINICIÓN Sea $y = f(t)$ una función diferenciable de la variable independiente t y denotemos con $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ las derivadas de y con respecto a t hasta de orden n. Entonces una **ecuación diferencial de orden *n*** para la función y es una ecuación que relaciona las variables $t, y, y', \ldots, y^{(n)}$. El **orden** n corresponde a la derivada de orden más alto que aparece en la ecuación diferencial.

EJEMPLO 1

a) $dy/dt = ry$ es una ecuación diferencial de primer orden. [Sólo hemos escrito de otra manera la ecuación (1)].

b) $d^2y/dt^2 - e^{ty} = 0$ es una ecuación diferencial de segundo orden.

c) $d^4y/dt^4 - t^2(d^3y/dt^3) = t^2 + 1$ es una ecuación diferencial de cuarto orden.

DEFINICIÓN Una ecuación diferencial para y, una función de t, se dice que es **lineal** si los términos en la ecuación consisten en y o una de sus derivadas multiplicadas por una función de t o si no sólo de una función de t.

EJEMPLO 2

a) En el ejemplo 1, las ecuaciones diferenciales de las partes *a*) y *c*) son lineales. Pero la correspondiente a la parte *b*) es no lineal porque y aparece en el término e^{ty}, que no es una función lineal de y.

b) $d^2y/dt^2 = 3(dy/dt)^2$ es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden.

c) $d^2y/dt^2 = 3t^2(dy/dt)$ es una ecuación diferencial lineal de segundo orden.

Observe que y y sus derivadas aparecen linealmente. El hecho de que la variable independiente t aparezca como el factor t^2 no da como resultado que la ecuación sea no lineal. ☛ **23**

DEFINICIÓN Se dice que una función $y(t)$ es una **solución** de una ecuación diferencial si, al sustituir $y(t)$ y sus derivadas en la ecuación diferencial, esta ecuación se satisface para todos los valores de t en el dominio de $y(t)$.

EJEMPLO 3

a) La función $y = t^2$ es una solución de la ecuación diferencial

$$t\frac{dy}{dt} - 2y = 0$$

Esto es así porque $dy/dt = 2t$ de modo que

$$t\frac{dy}{dt} = t \cdot 2t = 2t^2 = 2y$$

b) La función $y = e^{kt}$, en donde k es una constante, es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - k^2y = 0$$

ya que

$$\frac{dy}{dt} = ke^{kt} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = k^2e^{kt} = k^2y$$

c) La función $y = 2\ln t$ es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0$$

Tenemos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{t} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2}{t^2}$$

y así

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = -\frac{2}{t^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{t}\right)^2 = 0$$ ☛ **24**

☛ **24.** Demuestre que $y = x^2$ es una solución de la ecuación

$$xy\frac{dy}{dx} = y^2 + x^4$$

EJEMPLO 4 Resuelva la ecuación diferencial deducida anteriormente para composición continua:

$$\frac{dA}{dt} = rA$$

en donde r es una constante y $A(0) = A_0$

Solución La ecuación dada puede escribirse como

$$\frac{dA}{A} = r\,dt$$

en donde hemos multiplicado ambos lados por la diferencial dt y dividido entre A. El propósito de hacer esto es tener todos los términos con A en un lado y los términos que incluyen a t en el otro. Integrando ambos lados, obtenemos

$$\int \frac{1}{A}\, dA = \int r\, dt$$

En consecuencia,

$$\ln A = rt + C_1$$

(debido a que $A > 0$) en donde C_1 es la constante de integración. Despejando A, obtenemos

$$A = e^{rt + C_1} = e^{C_1} \cdot e^{rt} = Ce^{rt} \tag{2}$$

en donde $C = e^{C_1}$ es otra constante. El valor de C puede determinarse aplicando el hecho adicional de que $A(0) = A_0$. Por tanto, haciendo $t = 0$ en la ecuación (2),

$$A_0 = A(0) = Ce^{r(0)} = C$$

Por consiguiente, a partir de la ecuación (2), obtenemos

$$A(t) = A_0 e^{rt}$$

En otras palabras, cuando el interés se capitaliza en forma continua la inversión crece en forma exponencial. El resultado es consistente con el ya encontrado en la sección 6-1.

Podemos resumir el resultado principal del último ejemplo como sigue:

> La ecuación diferencial $dy/dt = ky$ en donde k es una constante dada, tiene la solución $y = Ce^{kt}$, en donde C es una constante arbitraria.

Observe la presencia de la constante arbitraria C en la solución. A consecuencia de esto $y = Ce^{kt}$ se denomina **solución general** de esta ecuación diferencial. La ecuación diferencial no determina de manera única la solución; la solución general contiene una constante desconocida.

Para determinar el valor de la constante C necesitamos una información adicional además de la ecuación diferencial. Por ejemplo, en el ejemplo 4 se nos dio el valor inicial de la inversión $A(0) = A_0$. En general (excepto para ciertos casos irregulares), la solución de cualquier ecuación diferencial de primer orden contiene una constante arbitraria, y se requiere de una información adicional para determinarla. Por lo regular, esta información toma la forma del valor de la variable dependiente dada para un valor particular de la variable independiente, tal como $A = A_0$ en $t = 0$. Este tipo de información se denomina **condición inicial**.

EJEMPLO 5 ***(Crecimiento poblacional)*** Sea $P(t)$ el tamaño (en millones) de la población de Estados Unidos en el instante t, medido en años, con $t = 0$ correspondiendo a 1900. Suponga que esta cantidad satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

donde $k = 0.02 \ln 2 \approx 0.01386$. La población en el año 1950 fue de 150 millones. Encuentre una expresión para la población en un instante general t y utilice esta fórmula para evaluar la población en 1900 y en 1980.

Solución La ecuación diferencial es del mismo tipo que la del ejemplo 4. Por tanto, su solución general es

$$P(t) = Ce^{kt}$$

en donde C es una constante arbitraria. Para determinar C utilizamos la información adicional de que $P = 150$ cuando $t = 50$ (esto es, en 1950). Sustituyendo estos valores en la solución general, tenemos

$$150 = Ce^{k(50)} = Ce^{(0.02 \ln 2)(50)} = Ce^{\ln 2} = 2C$$

en donde hemos sustituido el valor dado de k y usado el hecho de que $e^{\ln a} = a$, para cualquier número real positivo a. Por tanto, $C = 75$.

Sustituyendo este valor de C en la solución general, obtenemos la siguiente expresión para la población en el instante t,

☛ **25.** Determine la solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = -2y$ que satisface la condición inicial $y(1) = 3$

$$P(t) = 75e^{kt} = 75e^{(0.01386)t}$$

En 1900 ($t = 0$) la población tiene el valor $P(0) = 75e^{(0.01386)(0)} = 75$ millones. En 1980 ($t = 80$) la población es $P(80) = 75e^{(0.01386)(80)} = 75e^{1.109} = 75(3.03) = 227$ millones. ☛ **25**

Ecuación lineal de primer orden con coeficientes constantes

Continuamos considerando la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky + b \tag{3}$$

donde k y b son dos constantes dadas. Más adelante, en esta sección, mostraremos cómo tal ecuación diferencial puede utilizarse como un modelo de crecimiento poblacional cuando se incluyen efectos, tales como migración o recolección (cosecha). Sin embargo, primero deduciremos su solución general.

Podemos escribir la ecuación diferencial en la forma

$$\frac{dy}{dt} = k\left(y + \frac{b}{k}\right)$$

Ahora cambiamos la variable dependiente a $z = y + b/k$. Entonces, $dz/dt = dy/dt$ y así la ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{dz}{dt} = kz$$

Respuesta $y = 4 - 3e^{-2(t-1)}$

Pero, del análisis anterior, ya sabemos que la solución general de esta ecuación es $z = Ce^{kt}$. Por tanto, como $y = z - b/k$, la solución general para y es

$$y = Ce^{kt} - \frac{b}{k} \tag{4}$$

Nuevamente, observe la presencia de la constante arbitraria. Podemos resumir este resultado como sigue:

> La ecuación diferencial $dy/dt = ky + b$, en donde k y b son constantes dadas, tiene la solución general $y = Ce^{kt} - b/k$, en donde C es una constante arbitraria.

EJEMPLO 6 Determine la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 2y + 1$$

que satisface la condición inicial $y(0) = 3$.

Solución Procedemos como en la deducción del caso general. Primero escribimos la ecuación diferencial como

$$\frac{dy}{dt} = 2(y + \tfrac{1}{2})$$

Entonces, transformamos la nueva variable $z = y + \frac{1}{2}$. La ecuación diferencial se transforma en $dz/dt = 2z$ y su solución general es $z = Ce^{2t}$. Por tanto, como $y = z - \frac{1}{2}$, la solución general para y es

$$y = Ce^{2t} - \tfrac{1}{2}$$

Por supuesto, podríamos haber obtenido esta solución por la simple sustitución de $k = 2$ y $b = 1$ en la fórmula (4), deducida anteriormente para el caso general.

La constante C es arbitraria y debe determinarse a partir de la condición inicial dada que $y(0) = 3$. Haciendo $t = 0$ y $y = 3$ en la última ecuación, obtenemos

$$3 = Ce^{2(0)} - \tfrac{1}{2} = C - \tfrac{1}{2} \qquad \text{o} \qquad C = \tfrac{7}{2}$$

Así, sustituyendo C en la solución general, obtenemos

$$y = \tfrac{7}{2}e^{2t} - \tfrac{1}{2}$$ ☛ **26**

☛ **26.** Determine la solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = 4 - y$ que satisface la condición inicial $y(0) = 3$

***

Ahora analizaremos algunas aplicaciones de la ecuación diferencial $dy/dt = ky + b$. Primero considere el crecimiento de una inversión compuesta n veces por año con tasa de interés nominal anual de $R\%$. Sea $A(t)$ el valor de la inversión en el instante t y sea $\Delta t = 1/n$ el intervalo de tiempo entre las composiciones. Entonces, como estudiamos al inicio de esta sección, el incremento en A de una composición a la siguiente está dado por

Respuesta $y = 4 - e^{-t}$

$$\Delta A = A(t + \Delta t) - A(t) = rA(t)\,\Delta t$$

en donde $r = R/100$. Ahora, suponga que una cantidad adicional I se invierte cada año en la cuenta en montos iguales, justo antes de cada composición. Entonces, cada inversión adicional es $I \div n = I\,\Delta t$ de modo que el incremento en el valor de la cuenta es

$$\Delta A = \text{Interés durante } \Delta t + \text{Nueva inversión durante } \Delta t$$

$$\Delta A = rA(t)\Delta t + I\,\Delta t$$

Así,

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = rA + \mathrm{I}$$

La composición continua corresponde al límite cuando $n \to \infty$, que significa $\Delta t \to 0$. En este límite, la ecuación anterior se transforma en la ecuación diferencial

$$\frac{dA}{dt} = rA + I$$

que es exactamente del tipo que hemos estado estudiando.

Una aplicación mucho más importante de la ecuación diferencial (3) es al crecimiento poblacional. La ecuación diferencial $dy/dt = kt$ que corresponde al caso especial $b = 0$, puede aplicarse en muchos casos en donde una población aumenta en un ambiente que no pone restricción sobre su crecimiento. La constante k se denomina **tasa de crecimiento específico** de la población. La ecuación diferencial establece que la tasa de crecimiento natural es proporcional al tamaño de la población. Su solución es una función exponencial de crecimiento en la variable t.

La ecuación más general $dy/dt = ky + b$ puede utilizarse para poblaciones que se desarrollan no sólo a través de su propio crecimiento natural sino también como resultado de una inmigración constante de miembros del exterior. El lado izquierdo de la ecuación diferencial proporciona la tasa total de crecimiento del tamaño de la población y, el primer término de la derecha es la contribución debida a la tasa de crecimiento del desarrollo natural, mientras que el segundo término, b, es la tasa de crecimiento debida a la inmigración. Si la tasa de inmigración es constante, podemos utilizar el método desarrollado anteriormente para encontrar la solución.

El caso de una población que pierde miembros a través de la emigración es similar: la única diferencia es que la constante b se vuelve negativa, con $-b$ como la tasa de emigración. Sin embargo, tal vez el caso más importante es el de una población que pierde miembros como resultado de la caza o recolección (cosecha). Tales ejemplos son fundamentales para la conservación de reservas de ciertas especies que se recolectan para el consumo humano.

EJEMPLO 7 Cierta especie de pez tiene un tamaño inicial de población de 100 unidades, cada unidad es de 1 millón de peces, y tiene una tasa de crecimiento natural específico de 0.25, con el tiempo medido en años. La población será recolectada a

☛ **27.** Una población tiene una tasa de crecimiento específico de 0.01 anual y se captan miembros por medio de inmigración a la tasa de 100,000 por año. Escriba la ecuación diferencial que describe el crecimiento del tamaño, y, de la población (en millones). Si inicialmente y es de 20 millones, ¿cuánto será dentro de t años?

Respuesta

$$\frac{dy}{dt} = 0.01y + 0.1$$

$$y = 30e^{0.01t} - 10$$

la tasa de h unidades por año, de modo que el tamaño y satisface la ecuación diferencial y condición inicial:

$$\frac{dy}{dt} = 0.25y - h \qquad y(0) = 100$$

Determine y como una función de t en los casos *a*) $h = 20$; *b*) $h = 25$; *c*) $h = 30$. Analice el significado de los resultados.

Solución La ecuación diferencial dada es del tipo bajo estudio con $k = 0.25$ y $b = -h$. La solución puede obtenerse siguiendo el mismo procedimiento que antes, o sencillamente sustituyendo estos valores de k y b en la solución general (4). Encontramos

$$y = Ce^{0.25t} + 4h$$

Haciendo $t = 0$ y $y = 100$, encontramos el valor de C: $C = 100 - 4h$. Así,

$$y = (100 - 4h)e^{0.25t} + 4h$$

Para los tres valores dados de la tasa de recolección, esta expresión se transforma en

$$\begin{aligned} h &= 20: & y &= 20e^{0.25t} + 80 \\ h &= 25: & y &= 100 \\ h &= 30: & y &= 120 - 20e^{0.25t} \end{aligned}$$

El significado de estos resultados es el siguiente. Cuando la tasa de recolección es de 25 unidades por año, la recolección equilibra de manera exacta el crecimiento natural de la población y el tamaño permanece constante. En este caso, tenemos un rendimiento estable y sustentable con base en la recolección. Cuando h es menor que 25, como se ilustró para $h = 20$, el crecimiento natural compensa en exceso las recolecciones más grandes en el futuro. Cuando h es mayor que 25, como se ilustró por medio del resultado para $h = 30$, el tamaño de la población decrece, ya que el término exponencial tiene un coeficiente negativo. Eventualmente, la población está siendo llevada a la extinción por esta sobrerrecolección. (Verifique que $y = 0$ cuando $t = 4 \ln 6 \approx 7.2$) ☛ **27**

EJERCICIOS 16-6

(1-4) Demuestre que las funciones que se dan enseguida satisfacen las ecuaciones diferenciales dadas.

1. $y = t^{-4}$; $\quad t\, dy/dt + 4y = 0$

2. $y = t \ln t$; $\quad t^2\, d^2y/dt^2 - t\, dy/dt + y = 0$

3. $y = te^{-t}$; $\quad t\, dy/dt + ty = y$

4. $y = t^3 + 2\sqrt{t}$; $\quad 2t^2\, d^2y/dt^2 - 5t\, dy/dt + 3y = 0$

(5-16) Encuentre la solución general de las ecuaciones diferenciales siguientes.

5. $dy/dt = t^2 + 1/t$

6. $dy/dx = xe^x$

7. $dy/dt - 4y = 0$

8. $2\, dy/dt + y = 0$

9. $dy/dt - \sqrt{t} = 0$

10. $2\, dy/dt + \ln t = 0$

11. $dy/dt = y + 5$

12. $dy/dt = 1 - 3y$

13. $dy/dt - 2y = 1$

14. $3\, dy/dt + y = 2$

15. $2\, dy/dt + 2y = 3$

16. $dy/dt - 0.5y + 2 = 0$

(17-22) Determine las soluciones de las ecuaciones diferenciales siguientes que satisfagan las condiciones iniciales dadas.

17. $dy/dt + 2y = 0; \quad y = 1$ cuando $t = 1$

18. $2\, dy/dt - y = 0; \quad y = 3$ cuando $t = \frac{1}{4}$

19. $dy/dt - 2e^t = 0; \quad y = 7$ cuando $t = 0$

20. $dy/dx = xe^{x^2}; \quad y = 3$ cuando $t = 0$

21. $dy/dt = 2y + 3; \quad y = 5$ cuando $t = 0$

22. $dy/dt + 2y = 4; \quad y = 3$ cuando $t = 0$

23. *(Interés compuesto capitalizable en forma continua)* Una inversión inicial de $10,000 crece continuamente a una tasa de interés nominal del 5%

a) Determine el valor de la inversión en cualquier instante t.

b) ¿Cuál es el valor de la inversión después de 8 años?

c) ¿Después de cuántos años el valor de la inversión ascenderá a $20,000?

24. *(Crecimiento continuo del valor de una acción)* Una acción con valor inicial de $2000 crece continuamente a una tasa constante del 6% anual.

a) Encuentre el valor de la acción al cabo de t años.

b) ¿Después de cuánto tiempo la acción tendrá un valor de $3000?

25. *(Crecimiento de la población)* Suponga que la tasa de crecimiento proporcional $y'(t)/y(t)$ de la población de la Tierra es una constante. La población en 1930 era de 2 mil millones y en 1975 fue de 4 mil millones. Considerando a 1930 como $t = 0$, determine la población $y(t)$ de la Tierra en el instante t. De acuerdo con este modelo, ¿cuál debió ser la población en 1960?

26. *(Radiactividad)* Para datar el coral y las conchas se utiliza el torio. Su desintegración satisface la ecuación diferencial $dy/dt = -9.2 \times 10^{-6}\, y$ donde t está medido en años. ¿Cuál es la vida media del torio radiactivo? (Véase el ejercicio 38 en la sección 6-4).

27. *(Crecimiento poblacional con inmigración)* Una población tiene un tamaño inicial de 10,000 y una tasa de crecimiento específico de 0.04 (el tiempo medido en años). Si la población aumenta debido a la inmigración a la tasa de 100 por año, ¿cuál será el tamaño de la población después de t años?

28. Repita el ejercicio 27 en el caso cuando, debido a la emigración, la población pierde miembros a una tasa de 150 por año.

29. *(Propagación de epidemias)* Una enfermedad infecciosa se propaga lentamente a una población numerosa. Sea $p(t)$ la proporción de la población que ha sido expuesta a la enfermedad en los t años de su introducción. Si $p'(t) = \frac{1}{5}[1 - p(t)]$ y $p(0) = 0$, encuentre $p(t)$ para $t > 0$. ¿Después de cuántos años la proporción ha crecido a 75%?

30. *(Crecimiento con inmigración)* Una población tiene tamaño $y(t)$ en el instante t. La tasa de crecimiento específico es 0.1 y debido a la inmigración, existe una captación de población a una tasa constante de r.

a) Escriba la ecuación diferencial que es satisfecha por $y(t)$ y determine su solución general.

b) Determine la solución particular en el caso cuando $r = 100$ y el tamaño inicial de la población en $t = 0$ es 2000.

31. *(Epidemias)* Considere la diseminación de una enfermedad que tiene la propiedad de que una vez que un individuo se infecta permanece todo el tiempo infectado. Aunque una pequeña proporción de la población esté infectada con la enfermedad, su diseminación puede ser modelada razonablemente mediante la ecuación diferencial $dy/dt = ky$ (donde y es el número de individuos infectados al tiempo t). Obtenga y como función de t suponiendo que en el tiempo $t = 0$ hay 587 individuos infectados y en el tiempo $t = 1$ año hay 831 individuos infectados en la población.

***32.** *(Flujo de contaminación)* Un lago pequeño con un volumen de 10^6 metros cúbicos ha sido contaminado accidentalmente por 10,000 kilogramos de una sustancia muy tóxica. Un río entra y después sale del lago a razón de 20,000 metros cúbicos por hora. Suponiendo que la entrada del río contiene agua fresca y que la sustancia tóxica se está mezclando en todo el lago, escriba una ecuación diferencial para la masa del contaminante en el lago. Encuentre la solución y calcule el número de horas para que la masa del contaminante decrezca a 100 kilogramos.

***33.** *(Contaminación)* El lago en el ejercicio 32 se recobra eventualmente del accidente por contaminación, pero después alguien construye una fábrica río arriba y empieza a arrojar mercurio en el río a razón de 0.01 kilogramos por hora. Escriba una ecuación diferencial para la masa del mercurio en el lago y encuentre su solución. ¿Cuánto mercurio contendrá el lago finalmente?

***34.** *(Medicina)* Se inyecta una sustancia en el torrente sanguíneo de un paciente a razón de R miligramos por minuto y ésta se absorbe del torrente sanguíneo a razón kM, donde k es una constante y M es el número de miligramos en el torrente sanguíneo en el tiempo t. Escriba una ecuación diferencial para $M(t)$ y encuentre la solución, suponiendo que la inyección empieza en $t = 0$. ¿Cuál es la cantidad límite de la sustancia en el torrente sanguíneo?

***35.** *(Crecimiento de capital)* Una inversión crece de acuerdo con la ecuación diferencial

$$\frac{dA}{dt} = rA + I(t)$$

donde $100r$ es la tasa de interés nominal e $I(t)$ es la tasa de inversión del capital nuevo. Resuelva esta ecuación cuando $I(t)$ es constante y $A(0) = 0$. Compare su respuesta con el ejercicio 24 de la sección 16-3.

***38.** *(Precio en un mercado no equilibrado)* Para cierto bien las ecuaciones de oferta y de demanda son las siguientes.

$$D\text{:}\ \ p + 2x_D = 25$$
$$S\text{:}\ \ p - 3x_S = 5$$

Supongamos que si el mercado no está en equilibrio ($x_D \neq x_S$), entonces, el precio cambia en razón proporcional al exceso de demanda sobre la oferta:

$$\frac{dp}{dt} = k(x_D - x_S)$$

Sustituya x_D y x_S y resuelva la ecuación diferencial resultante para $p(t)$. Pruebe que no importa cuál sea el precio inicial, el mercado se aproxima eventualmente al equilibrio en $p = 17$.

37. *(Ley de enfriamiento de Newton)* La temperatura T de un cuerpo que se está enfriando cambia de acuerdo con la ecuación diferencial $dT/dt = k(T_s - T)$, donde T_s es la temperatura ambiente. Encuentre una fórmula para $T(t)$ en el caso cuando T_s es constante y $T(0) = T_0$.

***38.** *(Utilidad y publicidad)* Suponga que las utilidades, P, de una compañía como función del gasto, A, en publicidad satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dA} = k(C - A)$$

en donde k y C son constantes positivas. Considerando el signo de dp/dA para $A < C$ y para $A > C$, proporcione el significado de la constante C. Resuelva la ecuación diferencial para $P(A)$ dado que $P(0) = P_0$. Si $P_0 = 100$, $P(100) = 1100$, $P(200) = 1600$, calcule el gasto óptimo en publicidad.

■ 16-7 ECUACIONES DIFERENCIALES SEPARABLES

☛ **28.** ¿Son separables las ecuaciones diferenciales siguientes?

a) $xy\dfrac{dy}{dx} = y + 1$

b) $\dfrac{dy}{dx} = x + y$

c) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = xy$

Respuesta *a*) Sí *b*) no *c*) sí.

Se dice que una ecuación diferencial de primer orden es **separable** si puede expresarse en la forma

$$\frac{dy}{dt} = f(y)g(t)$$

Esto es, el lado derecho es el producto de una función de y por una función de t. ☛ **28**

Una ecuación separable puede resolverse moviendo todos los términos que incluyan y a la izquierda (dividiendo entre $f(y)$) y moviendo todos los términos que incluyan t a la derecha (multiplicando por dt):

$$\frac{1}{f(y)}\, dy = g(t)\, dt$$

Las variables se dice que se han **separado**. Ahora se pueden integrar ambos miembros:

$$\int \frac{1}{f(y)}\, dy = \int g(t)\, dt$$

En la práctica, estas integrales pueden ser difíciles de integrar, o incluso imposible de evaluar, pero aparte de esta dificultad, siempre podemos resolver de esta forma una ecuación separable.

Reconocerá que éste es precisamente el método utilizado en la sección 16-6 para obtener la solución general de la ecuación diferencial $dy/dt = ky$. También podemos utilizar este método en vez del método usado anteriormente para resolver la ecuación $dy/dt = ky + b$. Podemos separar las variables en esta ecuación escribiéndola como

$$\frac{1}{ky + b}\, dy = dt$$

Entonces, integrando ambos lados obtenemos $\int \frac{1}{ky + b}\, dy = \int dt$, o suponiendo que $y + \frac{b}{k} > 0$,

$$\frac{1}{k} \ln\left(y + \frac{b}{k}\right) = t + B$$

en donde B es una constante arbitraria. Resolviendo esto para y, obtenemos

☛ **29.** Determine la solución general de la ecuación diferencial $xy\frac{dy}{dx} = y + 1$ para el caso $y > -1$

$$y + \frac{b}{k} = e^{kt+kB} = Ce^{ky}$$

donde $C = e^{kB}$. Ésta es la misma solución que antes. Le dejamos que verifique que esta misma forma se obtiene para la solución si $y + b/k < 0$. ☛ **29**

EJEMPLO 1 Determine la solución de la ecuación diferencial

$$e^x \frac{dy}{dx} = y^2$$

que satisface la condición inicial $y = 2$ cuando $x = 0$.

Solución Observe que aquí la variable independiente es x, no t. Podemos escribir la ecuación diferencial dada como

$$\frac{1}{y^2}\, dy = \frac{1}{e^x}\, dx \quad \text{o} \quad y^{-2}\, dy = e^{-x}\, dx$$

en donde hemos separado todos los términos que contienen y en el lado izquierdo y aquellos que tienen a x en el derecho. Integrando ambos miembros, obtenemos

$$\int y^{-2}\, dy = \int e^{-x}\, dx$$

Por tanto,

$$\frac{y^{-1}}{-1} = \frac{e^{-x}}{-1} + C \quad \text{o} \quad \frac{1}{y} = e^{-x} - C$$

donde C es una constante de integración. Resolviendo para y obtenemos

$$y = \frac{1}{e^{-x} - C} = \frac{e^x}{1 - Ce^x}$$

Respuesta $y - \ln(y + 1) = \ln x + C$, o de manera equivalente, $x(y + 1)e^{-y} = B$

Para determinar C utilizamos la condición inicial. Haciendo $y = 2$ y $x = 0$ en la solución general, tenemos

$$2 = \frac{e^0}{1 - Ce^0} = \frac{1}{1 - C}$$

de la cual se sigue que $C = \frac{1}{2}$. Sustituyendo esto en la solución general,

$$y = \frac{e^x}{1 - \frac{1}{2}e^x}$$

que proporciona la solución particular para las condiciones iniciales dadas.

EJEMPLO 2 ***(Función de demanda)*** Si la elasticidad de la demanda para cierto bien es $-\frac{1}{2}$ para todos los valores de su precio unitario, determine la relación de demanda.

Solución Sea x el número de unidades demandadas al precio p. Sabemos que la elasticidad de la demanda η está dada por medio de la fórmula

$$\eta = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp}$$

(Véase la sección 14-3). Como $\eta = -\frac{1}{2}$ tenemos que la ecuación diferencial

$$\frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = -\frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \frac{dx}{dp} = -\frac{x}{2p}$$

Separando las variables,

$$\frac{2}{x}\,dx = -\frac{1}{p}\,dp$$

e integrando ambos miembros,

$$\int \frac{2}{x}\,dx = -\int \frac{1}{p}\,dp \quad \text{o} \quad 2 \ln x = -\ln p + C$$

en donde C es la constante de integración. Entonces, combinando los logaritmos tenemos $\ln (px^2) = C$. Podemos escribir esto en forma exponencial como

$$px^2 = D$$

donde $D = e^C$. Nuevamente D es una constante arbitraria que no puede determinarse sin información adicional. Ésta es la relación de demanda requerida.

Ecuación diferencial logística

La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = py(m - y) \tag{1}$$

en donde p y m son constantes, se denomina **ecuación logística**. Su importancia provino originalmente por ser un modelo de crecimiento poblacional en un ambiente restringido, pero se han encontrado varias aplicaciones subsecuentes. Algunas de estas aplicaciones adicionales se encontrarán en los ejercicios.

La ecuación diferencial $dy/dt = ky$ se aplica a una población cuando el ambiente no restringe su crecimiento. Sin embargo, en la mayor parte de los casos, se alcanza una etapa en donde ya no es posible un crecimiento adicional de la población, y el nivel del tamaño de la población se nivela en algún valor que es la población máxima (población límite) que puede sustentarse por el ambiente dado. Denotemos este valor máximo por m. Entonces, cualquier ecuación diferencial que describa el crecimiento debe satisfacer la condición de que la tasa de crecimiento se aproxima a cero conforme y se aproxima a m; esto es,

$$\frac{dy}{dt} \to 0 \quad \text{cuando} \quad y \to m$$

Además, si para alguna elección del tamaño de la población sucede que excede m, entonces, ésta debe decrecer; esto es,

$$\frac{dy}{dt} < 0 \quad \text{si} \quad y > m$$

Observe que la ecuación diferencial (1) satisface estos requisitos.

También existe un requisito adicional, que cualquier modelo razonable de crecimiento poblacional debe satisfacer. Si el tamaño de la población es muy pequeño, entonces las restricciones impuestas por el medio ambiente tendrán un efecto insignificante, y el crecimiento será aproximadamente exponencial. En la ecuación (1), si y es mucho menor que m, entonces $m - y \approx m$, y la ecuación diferencial se transforma en aproximadamente

$$\frac{dy}{dt} \approx pmy$$

En realidad, esto da un crecimiento poblacional aproximado y la tasa de crecimiento específico es $k = pm$. La ecuación logística (1) no es la única ecuación diferencial que satisface estos requerimientos para crecimiento restringido, pero es la ecuación más sencilla que lo hace.

Ahora pasamos a la solución de la ecuación logística. Deduciremos la solución para constantes generales m y p, pero si tiene alguna dificultad en seguir esto, trate de examinar primero el argumento con algunos valores particulares, tales como $m = 2$ y $p = 3$. Separando las variables en (1),

$$\frac{1}{y(m - y)}\, dy = p\, dt$$

e integrando ambos miembros,

$$\int \frac{1}{y(m - y)}\, dy = \int p\, dt$$

Aquí, la integral del lado izquierdo puede evaluarse usando la fórmula 15 del apéndice II. Sin embargo, en vez de esto, le mostraremos un método útil para encontrar tales integrales (de hecho, ésta es la manera en que se dedujo la fórmula 15). El truco es expresar el integrando en términos de fracciones parciales. En el caso que tenemos, es fácil ver que

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{m - y} = \frac{m}{y(m - y)}$$

(Simplemente, combine las dos fracciones de la izquierda con su común denominador). Así, después de multiplicar todo por m, la ecuación integrada anterior se transforma en

$$\int \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{m - y}\right] dy = \int mp\, dt$$

Ahora podemos integrar ambos miembros, y obtenemos

$$\ln y - \ln (m - y) = mpt + B$$

en donde B es la constante de integración. Aquí, hemos supuesto que $0 < y < m$ de modo que los argumentos de los logaritmos son positivos y no necesitamos utilizar signos de valor absoluto. Combinando los logaritmos y haciendo $k = mp$, obtenemos

$$\ln\left(\frac{y}{m - y}\right) = kt + B$$

Así,

$$\frac{y}{m - y} = e^{B+kt} = e^{B}e^{kt} = A^{-1}e^{kt}$$

donde hemos escrito $A^{-1} = e^{B}$. La razón para definir A como esto es para hacer más sencilla la respuesta final. Luego resolviendo para y, obtenemos

$$Ae^{-kt}y = m - y, \qquad y(1 + Ae^{-kt}) = m, \qquad y = \frac{m}{1 + Ae^{-kt}} \tag{2}$$

Ésta es la forma usual en la que se da la solución general y con frecuencia se conoce como la función logística. La constante A se determina como es usual a partir del valor inicial de y.

☛ **30.** Determine la solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = y(y - 1)$ para el caso cuando $0 < y < 1$

Lo dejamos como un ejercicio para usted, con la finalidad de que verifique que la solución general aún esta dada por medio de la fórmula (2) en el caso cuando $y > m$, la única diferencia es que la constante A es negativa. ☛ **30**

EJEMPLO 3 ***(Crecimiento exponencial)*** Para cierta población de conejos el crecimiento sigue la ecuación logística (1) con la constante $k = pm$ teniendo el valor 0.25 cuando el tiempo se mide en meses. La población de manera repentina, por una epidemia de mixamatosis, se reduce de su valor estable m a un tamaño igual al 1% de m. ¿Cuántos meses pasarán para que la población se recupere al 90% de su valor máximo? Determine una expresión para el tamaño de la población después de t meses.

Solución El tamaño de la población $y(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = py(m - y) = \frac{0.25}{m}y(m - y)$$

Respuesta $y = \frac{1}{1 + Ae^{t}}$

ya que se da $p = k/m = 0.25/m$. Separando las variables, obtenemos

$$\frac{m}{y(m - y)}\,dy = 0.25\,dt$$

y procediendo para integrar ambos lados utilizando fracciones parciales en el lado izquierdo, como lo hicimos anteriormente, llegamos al resultado

$$\ln\left(\frac{y}{m - y}\right) = 0.25t + C \qquad \text{(i)}$$

En este problema, $y > 0$ y $y < m$, así que el argumento del logaritmo es positivo y no requerimos de signos de valor absoluto. En $t = 0$, el tamaño inicial es $y = 0.01m$ y la sustitución de estos valores permite que C se determine:

$$\ln\left(\frac{0.01m}{m - 0.01m}\right) = 0.25(0) + C$$

o $C = -\ln 99$. Sustituyendo este valor de C en (i) y combinando los logaritmos, podemos escribir la solución como

$$\ln\left(\frac{99y}{m - y}\right) = 0.25t$$

La primera parte de la pregunta puede responderse de manera directa a partir de esta ecuación. La población alcanza 90% de su tamaño máximo cuando $y = 0.9m$, y obtenemos

$$0.25t = \ln\left(\frac{99(0.9m)}{m - 0.9m}\right) = \ln 891$$

De aquí, $t = 4 \ln 891 \approx 27.2$. Así que toma 27.2 meses para que la población se recupere al 90% de su valor máximo.

Para completar la solución para y, la escribimos como

$$\frac{99y}{m - y} = e^{0.25t}$$

y entonces de ésta despejamos a y. El resultado es

$$y = \frac{m}{1 + 99e^{-0.25t}}$$

EJERCICIOS 16-7

(1-10) Determine la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $dy/dx = xy$

2. $dy/dx = x + xy$

3. $dy/dt + 2ty^2 = 0$

4. $dy/dt = e^{t+y}$

5. $dy/dt = 3t^2e^{-y}$

6. $dy/dt + 6t^2\sqrt{y} = 0$

7. $dy/dt = y(y - 1)$

8. $dy/dt + y^2 = 4$

9. $t\,dy/dt + ty = y$

10. $t\,dy/dt - ty = 2y$

(11-18) Determine las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales que satisfagan las condiciones iniciales dadas.

11. $dy/dx = 2xy \qquad y = 1$ cuando $x = 0$

12. $dy/dt = y/\sqrt{t}$; $y = e$ cuando $t = 0$

13. $dy/dt = 3t^2y$; $y = 2$ cuando $t = 0$

14. $dy/dx = y(y - 1)$, $y > 1$; $y = 2$ cuando $x = 0$

15. $dy/dt = 2y(3 - y)$, $0 < y < 3$; $y = 2$ cuando $t = 0$

16. $2\ dy/dt = y(4 - y)$, $y > 4$; $y = 2$ cuando $t = 0$

17. $dy/dt = te^{t+y}$; $y = 0$ cuando $t = 0$

18. $du/dy = e^{u-y}$; $u = 0$ cuando $y = 0$

19. *(Elasticidad)* La elasticidad de la demanda para cierto bien es $\eta = -\frac{2}{3}$. Determine la relación de demanda $p = f(x)$, si $p = 2$ cuando $x = 4$.

20. *(Elasticidad)* La elasticidad de la demanda para cierto bien está dada por $\eta = -2$. Determine la función de demanda $p = f(x)$, si $p = \frac{1}{2}$ cuando $x = 4$.

21. *(Elasticidad)* La elasticidad de la demanda para cierto bien está dada por $\eta = (x - 200)/x$. Determine la función de demanda $p = f(x)$, si $0 < x < 200$ y $p = 5$ cuando $x = 190$.

22. *(Elasticidad)* La elasticidad de la demanda es $\eta = p/(p - 10)$. Determine la función de demanda $p = f(x)$, si $0 < p < 10$ y $p = 7$ cuando $x = 15$.

23. *(Bioquímica)* De acuerdo con la ecuación de Michaelis-Menten, la velocidad a la que ocurre una reacción de enzimas está dada por

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{My}{K + y}$$

en donde M y K son constantes y y es la cantidad del sustrato presente en el instante t que será transformado por la enzima. Determine una ecuación implícita para expresar y como una función de t.

24. *(Modelo de crecimiento limitado)* El modelo de crecimiento limitado de von Bertalanffy puede obtenerse a partir de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 3ky^{2/3}(y_m^{1/3} - y^{1/3})$$

Determine una expresión para y como función de t. (*Sugerencia:* Sustituya $y^{1/3} = u$ en la integral que se evaluará).

25. *(Modelo logístico)* En un pueblo cuya población es 2000, la propagación de una epidemia de influenza sigue la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = py(2000 - y)$$

en donde y es el número de personas infectadas en el instante t (t se mide en semanas) y $p = 0.002$. Si inicialmente dos personas estaban enfermas, encuentre y como una función de t. ¿Cuánto tiempo pasará antes de que tres cuartos de la población esté infectada?

26. *(Modelo logístico)* Podemos construir un modelo sencillo de la propagación de una infección a una población de la siguiente manera. Sea n el número total de individuos susceptibles (*i.e.*, no inmunes) en la población original. Sea $y(t)$ el número de individuos infectados en el instante t. Entonces $n - y(t)$ proporciona el número de susceptibles que permanecen sin infectarse. El modelo consiste en formular

$$\frac{dy}{dt} = ky(n - y)$$

en donde k es una constante. (Observe que dy/dt es la velocidad de propagación de la infección). Determine la solución para y como una función de t, y haga un bosquejo de su gráfica.

27. *(Modelo logístico)* Una población que está creciendo de acuerdo con la ecuación diferencial $dy/dt = 0.1y(1 - 10^{-6}y)$ cuando t se mide en años. ¿Cuántos años le tomará a la población aumentar desde un tamaño inicial de 10^5 a un tamaño de 5×10^5?

■ 16-8 APLICACIONES A PROBABILIDAD (SECCIÓN OPCIONAL)

La probabilidad se ocupa de observaciones o mediciones tomadas de situaciones en que el resultado tiene algún grado de impredicibilidad. En tales casos empleamos el término *variable aleatoria* para denotar una variable, cuyo valor medido puede variar de una observación a otra. Por ejemplo, si se lanza un dado estándar, el número de puntos que aparecen es una variable aleatoria; la cara que cae hacia arriba puede mostrar cualquiera de los valores 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

En contraste con esto, se presentan muchas situaciones u observaciones en que la variable aleatoria puede tomar cualquier valor de un conjunto de valores *con-*

tinuos de un intervalo dado. Por ejemplo, si la variable aleatoria X denota la altura (en pies) de una persona adulta aleatoriamente seleccionada en Nueva York, entonces X puede tomar cualquier número real situado en el intervalo $3 \leq X \leq 8$ (suponiendo que el adulto más bajo tiene, al menos, una estatura de 3 pies y el más alto a lo más 8 pies de estatura). En tal caso, la variable aleatoria se conoce como *variable aleatoria continua.*

Al manejar una variable aleatoria continua por lo regular nos interesa la probabilidad de que el valor medido caiga en algún intervalo dado. Por ejemplo, podríamos necesitar conocer la probabilidad de que un adulto de Nueva York tenga una estatura entre 6 y 6.5 pies. (Estas preguntas se las formulan los fabricantes de ropa). En general, si X es una variable aleatoria continua que toma valores en el intervalo $a \leq X \leq b$, estaremos interesados en la probabilidad de que el valor medido de X esté entre c y d, con $c \leq d$ dos números entre a y b. Escribimos esta probabilidad como $P(c \leq X \leq d)$.

En el caso de la mayoría de las variables aleatorias continuas existe una función $f(x)$ denominada *función de densidad de probabilidad** tal que su probabilidad está determinada por la siguiente integral definida:

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)\, dx \tag{1}$$

Puesto que la probabilidad de la izquierda debe ser no negativa para todos los valores de c y d ($c \leq d$), el integrando no puede ser negativo. Esto es,

$$f(x) \geq 0 \tag{2}$$

en todos los valores de x en que esté definida.

En vista de la relación entre integrales definidas y áreas bajo curvas, advertimos que $P(c \leq X \leq d)$, como se da en la ecuación 1, es igual al área bajo la gráfica $y = f(x)$ situada entre las líneas verticales $x = c$ y $x = d$. (Véase la figura 24). Esta asociación de probabilidades con áreas bajo la gráfica de f es la que da a la función de densidad su utilidad.

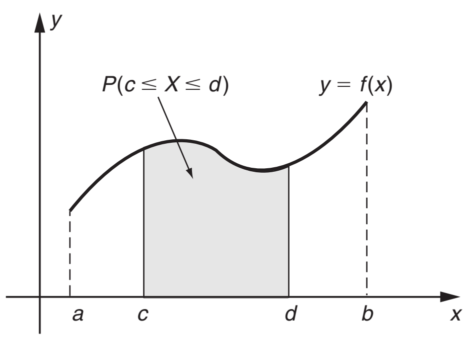


FIGURA 24

*Abreviada f.d.p. El estudiante debe tener cuidado pues algunos autores escriben f.d.p. con el significado "función de distribución de probabilidad", que es distinto del que tiene la función densidad de probabilidad.

☛ **31.** Para la función de densidad de probabilidad $f(x) = 2x$ en el intervalo $0 \le x \le 1$, calcule las probabilidades

a) $P(0 \le x \le \frac{1}{2})$

b) $P(\frac{1}{2} \le x \le 1)$

c) $P(\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{4})$

Respuesta *a*) $\frac{1}{4}$ *b*) $\frac{3}{4}$ *c*) $\frac{5}{16}$

Debido a que el evento de que la variable aleatoria X esté en su intervalo total $[a, b]$ es seguro que ocurra, entonces, su probabilidad es 1. Esto es,

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = 1 \tag{3}$$

En otras palabras, el área total bajo la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ debe ser igual a 1. ☛ **31**

EJEMPLO 1 Dada $f(x) = \frac{1}{4}(2x + 3)$. Determine la constante c de modo que $f(x)$ represente la f.d.p. de alguna variable aleatoria continua en el intervalo $0 \le x \le c$. Calcule también la probabilidad de que esta variable aleatoria tome un valor menor que $c/3$.

Solución Si $f(x)$ representa una f.d.p. en el intervalo $0 \le x \le c$, debe tenerse que

$$1 = \int_0^c f(x)\,dx = \int_0^c \tfrac{1}{4}(2x + 3)\,dx = \tfrac{1}{4}\Big[(x^2 + 3x)\Big]_0^c = \tfrac{1}{4}(c^2 + 3c)$$

o $c^2 + 3c - 4 = 0$. Por consiguiente,

$$c = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = 1, -4$$

Puesto que el valor requerido de c no puede ser negativo en el problema, el único valor posible de c es 1. Incluso debemos verificar que $f(x) = \frac{1}{4}(2x + 3)$ sea no negativa en $0 \le x \le 1$. Esto es cierto, como puede advertirse de la gráfica de $f(x)$ que aparece en la figura 25. Así,

$$f(x) = \tfrac{1}{4}(2x + 3) \text{ sobre } 0 \le x \le c$$

representa una f.d.p. con tal que $c = 1$

$$\begin{aligned} P\left(X < \frac{c}{3}\right) &= P(0 \le X < \tfrac{1}{3}) \\ &= \int_0^{1/3} f(x)\,dx = \int_0^{1/3} \tfrac{1}{4}(2x + 3)\,dx \\ &= \Big[\tfrac{1}{4}(x^2 + 3x)\Big]_0^{1/3} = \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{9} + 1) = \tfrac{5}{18} \end{aligned}$$ ☛ **32**

☛ **32.** Determine c tal que $f(x) = \frac{5}{6} - \frac{1}{4}x$ sea una función de densidad de probabilidad del intervalo $0 \le x \le c$

Respuesta $c = 2$
(si $c = 3$, $f(x)$ toma valores negativos)

Describiremos ahora algunas distribuciones de probabilidad ampliamente utilizadas. La primera de ellas es la *distribución uniforme,* que describe una situación o experimento en que los resultados del intervalo $a \le x \le b$ son igualmente posibles de que ocurran. La f.d.p. en este caso es simplemente la función constante dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b - a} & \text{para } a \le x \le b \\ 0 & \text{en cualquier otra parte} \end{cases}$$

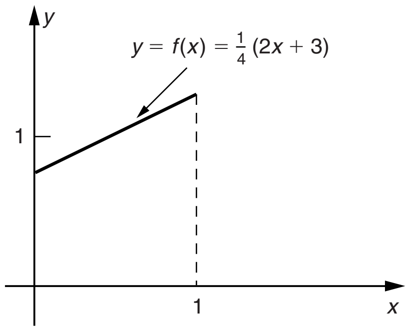


FIGURA 25

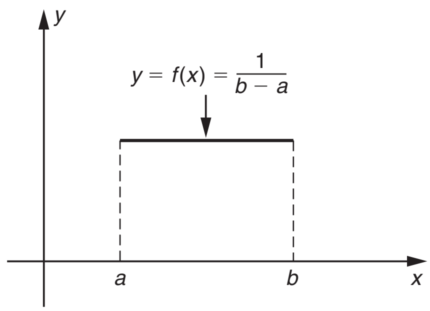


FIGURA 26

La gráfica de una función de densidad uniforme es como se muestra en la figura 26. La función $f(x)$ es sin duda una densidad, porque $f(x) \geq 0$ sobre $a \leq x \leq b$ (dado que $b - a > 0$) y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = \left[\frac{x}{b-a}\right]_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

EJEMPLO 2 ***(Tiempo de espera)*** El autobús urbano parte de la terminal de la ciudad universitaria hacia el centro de la ciudad cada 20 minutos. Un estudiante llega a la parada del autobús al azar y lo espera. ¿Cuál es la probabilidad de que deba esperar al menos 5 minutos antes de abordar el autobús?

Solución La variable aleatoria X, que es el tiempo de espera hasta la llegada del próximo autobús, está distribuida uniformemente en el intervalo $0 \leq X \leq 20$. Así que la f.d.p. está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{20} & \text{para } 0 \leq x \leq 20 \\ 0 & \text{en cualquier otra parte} \end{cases}$$

En consecuencia,

$$P(X \geq 5) = \int_5^{20} f(x)\,dx$$

$$= \int_5^{20} \frac{1}{20}\,dx = \left[\frac{x}{20}\right]_5^{20} = \frac{20}{20} - \frac{5}{20} = \frac{3}{4} \quad ☛ \ \mathbf{33}$$

☛ **33.** Escriba la función de densidad de probabilidad uniforme $f(x)$ en el intervalo $1 \leq x \leq 9$ Determine $P(2 \leq x \leq 5)$

A menudo necesitamos considerar variables aleatorias continuas, cuyos valores no están en un intervalo finito $a \leq X \leq b$ sino en un intervalo semiinfinito del tipo $a \leq X < \infty$ o el intervalo infinito completo $-\infty < X < \infty$. En tales casos, debemos hacer que $b \to \infty$ y (en el segundo caso) $a \to -\infty$; entonces, ciertas probabilidades están dadas por integrales impropias (véase la sección 16-2). Por ejemplo, si X asume valores en $-\infty < X < \infty$, entonces, la probabilidad de que $X \leq d$ está dada por

$$P(X \leq d) = \int_{-\infty}^{d} f(t)\,dt = \lim_{a \to -\infty} \int_a^d f(t)\,dt$$

Respuesta $f(x) = \frac{1}{8}$; $\frac{3}{8}$

Una segunda distribución de probabilidad que tiene múltiples aplicaciones es la denominada *distribución exponencial* y la f.d.p. en este caso es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}\, e^{-x/k} & \text{para } 0 \le x < \infty \\ 0 & \text{en cualquier otra parte} \end{cases}$$

en donde k es cierta constante positiva. Es claro que, $f(x) \ge 0$ y

$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{k}\, e^{-x/k}\, dx = \lim_{b\to\infty} \Big[-e^{-x/k}\Big]_0^b = \lim_{b\to\infty} (-e^{-b/k} + e^0) = 1$$

debido a que $e^{-b/k} \to 0$ cuando $b \to \infty$ y $e^0 = 1$. Así que $f(x)$, tal como se definió, satisface las dos condiciones requeridas por una función de densidad. La gráfica de una función de densidad típica aparece en la gráfica 27. ☛ **34**

☛ **34.** ¿Para qué valor de A es $f(x) = \dfrac{Ax}{(1 + x^2)^2}$ una función de densidad de probabilidad en el intervalo $0 \le x < \infty$? Evalúe $P(0 \le x \le 2)$

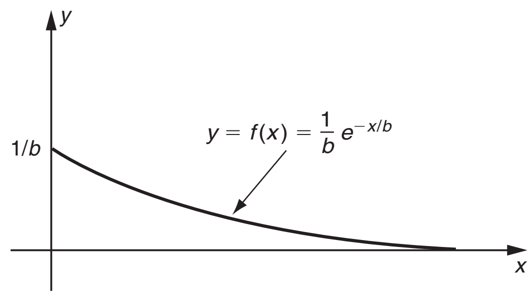


FIGURA 27

EJEMPLO 3 ***(Vida útil de focos incandescentes)*** El tiempo de vida útil de cierto tipo de focos incandescentes (en horas) obedece una distribución exponencial cuya función de densidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{200}\, e^{-x/200} \qquad 0 \le x < \infty$$

Determine la probabilidad de que un foco incandescente aleatoriamente seleccionado dure: *a*) más de 100 horas pero menos de 300 horas; *b*) más de 200 horas.

Solución Si X denota la vida útil de un foco aleatoriamente seleccionado, se sigue que la probabilidad de que la vida útil esté entre los dos valores dados c y d es

$$P(c \le X \le d) = \int_c^d f(x)\, dx = \int_c^d \frac{1}{200}\, e^{-x/200}\, dx$$

$$= \frac{1}{200}\Big[-200e^{-x/200}\Big]_c^d = e^{-c/200} - e^{-d/200}$$

a) Haciendo $c = 100$ y $d = 300$, obtenemos

$P(100 \le X \le 300) = e^{-100/200} - e^{-300/200} = e^{-1/2} - e^{-3/2} \approx 0.38$

b) Tomando $c = 200$ y haciendo que $d \to \infty$, resulta que

Respuesta $A = 2$
$P(0 \le x \le 2) = \frac{4}{5}$

$$P(X \geq 200) = \lim_{d\to\infty} P(200 \leq X < d)$$

$$= \lim_{d\to\infty} (e^{-200/200} - e^{-d/200}) = e^{-1} \approx 0.37$$

ya que $e^{-d/200} \to 0$ cuando $d \to \infty$

La distribución de probabilidad exponencial es de gran importancia y tiene múltiples aplicaciones. El ejemplo del foco incandescente es representativo de un rango de aplicaciones en problemas de confiabilidad (esto es, problemas en que nos interesa la probabilidad de falla de algún componente o sistema). Otra área de aplicación de esta distribución se relaciona con la ocurrencia de eventos aleatorios en el tiempo. Por ejemplo, podríamos considerar la variable T como el tiempo transcurrido antes del siguiente desastre en una refinería de petróleo. Entonces, T se comportará como una distribución exponencial.

En el ejemplo 3 determinamos las probabilidades de que la vida útil de un foco incandescente aleatoriamente seleccionado esté entre 100 y 300 horas o sobrepase las 200 horas. Otra pregunta que podríamos formular es: ¿Cuál es la vida útil promedio de los focos? La respuesta a esta pregunta requiere del concepto de **valor esperado** o **media** de una variable aleatoria X que en general se denota por μ (léase "mu"). Esta cantidad se define por

$$\boxed{\mu = \int_a^b xf(x)\, dx}$$

en donde $f(x)$ es la f.d.p. El significado de μ es que mide el valor promedio de la variable aleatoria si se realizaran un gran número de mediciones.

EJEMPLO 4 Sea X la vida útil en horas de un foco incandescente de cierto tipo aleatoriamente seleccionado. La función de densidad de probabilidad de X es $f(x) = (1/k)e^{-x/k}$, en donde k es una constante conocida. Determine la media de X, esto es, la vida útil promedio de los focos incandescentes en cuestión.

Solución

$$\mu = \int_a^b xf(x)\, dx = \int_0^\infty \frac{x}{k} e^{-x/k}\, dx$$

Observe que los límites de integración son 0 e ∞ ya que la vida útil puede ser cualquier número real positivo. A partir de la fórmula 69 del apéndice II con $a = -1/k$ (o usando integración por partes) obtenemos el resultado

$$\int_0^\infty xe^{-x/k}\, dx = \lim_{b\to\infty}\left[\int_0^b xe^{-x/k}\, dx\right] = \lim_{b\to\infty}\left[(-kx - k^2)e^{-x/k}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} [(-kb - k^2)e^{-b/k} + k^2] = k^2$$

El valor de la integral en el límite superior es cero puesto que $e^{-x/k} \to 0$ y $xe^{-x/k} \to 0$ cuando $x \to \infty$. (En general, $x^n e^{-cx} \to 0$ cuando $x \to \infty$ para cualesquiera valores positivos de n y c). En consecuencia,

$$\mu = \frac{1}{k}\int_0^\infty xe^{-x/k}\, dx = k$$

☛ **35.** Determine el valor esperado para
a) la densidad de probabilidad uniforme en el intervalo $[a, b]$;
b) la función de densidad de probabilidad $f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, e^{-(t/2)x^2}$ en el intervalo $[0, \infty)$

La constante k que aparece en la función de densidad representa la vida útil media de los focos. Por ejemplo, si la función densidad es $f(x) = (1/200)e^{-x/200}$, la vida media útil sería de 200 horas. ☛ **35**

Recordemos que hemos definido la distribución exponencial correspondiente a la función de densidad $f(x) = (1/k)e^{-x/k}$. Probamos ahora que la distribución exponencial tiene media $\mu = k$. Debido a esto, el parámetro k a menudo se reemplaza por el símbolo μ y la función de densidad se escribe en la forma

$$f(x) = \frac{1}{\mu}\, e^{-x/\mu}$$

EJEMPLO 5 Los consumidores llegan a cierta gasolinería de acuerdo con la distribución exponencial con un promedio de 20 clientes por hora. Si el encargado deja su puesto para fumarse rápidamente un cigarrillo en 2 minutos, encuentre la probabilidad de que llegue un cliente mientras no está el encargado.

Solución Puesto que llegan en promedio 20 consumidores cada hora, el tiempo promedio entre llegadas es de $\frac{1}{20}$ de hora o 3 minutos. Por eso, definiendo la variable aleatoria como el lapso hasta que el próximo consumidor llegue, X estará distribuida exponencialmente con $\mu = 3$. Por tanto, la f.d.p. es

$$f(x) = \frac{1}{\mu}\, e^{-x/\mu} = \frac{1}{3}\, e^{-x/3}$$

La probabilidad de que un cliente llegue en menos de 2 minutos es

$$P(X \leq 2) = \int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^2 \frac{1}{3}\, e^{-x/3}\, dx = \Big[-e^{-x/3}\Big]_0^2 = 1 - e^{-2/3} \approx 0.49$$

Así el encargado tiene 51% de posibilidades de poder fumar sin que llegue ningún consumidor.

Concluimos esta sección después de haber descrito brevemente una de las distribuciones más empleadas: la **distribución normal**. La f.d.p. en este caso está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad \text{para } -\infty < x < \infty$$

en donde μ denota la media de la variable aleatoria normal. La gráfica de $f(x)$ es la bien conocida curva en forma de campana que es simétrica con respecto a la línea $x = \mu$; como se observa en la figura 28.

El parámetro σ (sigma) que aparece en la función densidad de la variable aleatoria normal se denomina *desviación estándar.* Representa una medida del ancho de

Respuesta *a*) $\frac{1}{2}(a + b)$ *b*) $\sqrt{2/\pi}$

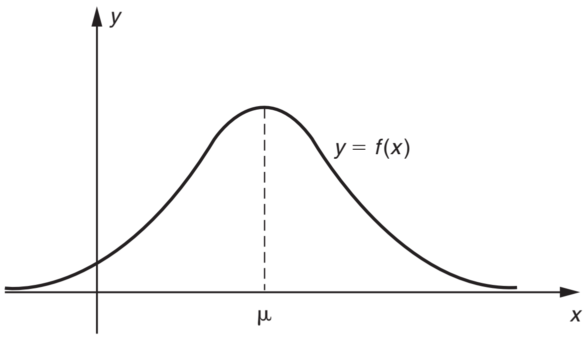


FIGURA 28

la curva con forma de campana. Si σ es muy pequeña, la curva es una campana espigada, lo cual significa que los valores medidos de la variable aleatoria casi siempre estarán muy cerca de μ. Si σ es grande, la curva es baja y extendida. En este caso, las mediciones se localizan bastante esparcidas, con frecuencia lejos de la media μ.

La probabilidad de que una variable normal X tome cualquier valor entre c y d está dada por el área bajo la curva situada entre $x = c$ y $x = d$, esto es,

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{(x-\mu)^2/2\sigma^2}\, dx$$

El caso especial $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ se denomina **distribución normal estándar**. Denotando, en este caso, la variable aleatoria por Z tenemos

$$P(c \leq Z \leq d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^d e^{-x^2/2}\, dx$$

Esta integral no puede evaluarse usando métodos elementales, sino que debe evaluarse numéricamente, como en la sección 16-5. Sus valores pueden encontrarse en cualquier libro de estadística elemental.

EJERCICIOS 16-8

(1-8) En cada uno de los siguientes ejercicios, determine la constante c de modo que $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad en el intervalo dado. Encuentre también la media μ en cada caso.

1. $f(x) = cx(3 - x)$ sobre $0 \leq x \leq 3$

2. $f(x) = \frac{1}{4}x + c$ sobre $-1 \leq x \leq 1$

3. $f(x) = \frac{1}{2}e^{-cx}$ sobre $0 \leq x < \infty$

4. $f(x) = ce^{-3x}$ sobre $0 \leq x < \infty$

5. $f(x) = \frac{2}{3}(x + 1)$ sobre $0 \leq x \leq c$

6. $f(x) = \frac{1}{12}(2x + 1)$ sobre $0 \leq x \leq c$

7. $f(x) = \dfrac{c}{(1 + x)^4}$ sobre $0 \leq x < \infty$

(*Sugerencia:* Haga $u = 1 + x$ en la integral para μ).

8. $f(x) = \dfrac{c}{(x - 2)^5}$ sobre $3 \leq x < \infty$

9. Dado que $f(x) = 2x - 4$ en $0 \leq x \leq c$ y $\int_0^c f(x)\, dx = 1$, determine c. ¿Es $f(x)$ una f.d.p.? Si es así, calcule $P(X \leq c/3)$.

10. Dado que $f(x) = \frac{1}{6}(4x + 1)$ en $0 \le x \le c$ y que $\int_0^c f(x)\,dx = 1$, determine c. ¿Es $f(x)$ una f.d.p.? Si es así, encuentre $P(c/3 \le X \le 2c/3)$.

11. Determine la media de una distribución uniforme definida en el intervalo $a \le x \le b$.

12. *(Tiempo de espera en una parada de autobús)* Una persona llega a la parada de autobús más cercana (al azar) y espera el autobús proveniente del centro de la ciudad, el cual sale cada media hora.

a) Calcule la probabilidad de que deba esperar: (**i**) a lo más 10 minutos antes de abordar el autobús; (**ii**) al menos 5 minutos antes de que llegue el autobús; (**iii**) al menos cinco minutos pero no más de 15 minutos.

b) ¿Cuál es el tiempo promedio de espera en este caso?

13. *(Tiempo de espera en aeropuertos)* El servicio aéreo de Montreal a Nueva York se presta cada hora. Una persona que no conoce el programa, llega al aeropuerto al azar y espera volar a Nueva York.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que deberá esperar: (**i**) entre 10 y 20 minutos; (**ii**) a lo más 15 minutos; (**iii**) no menos de 40 minutos?

b) ¿Cuál es el tiempo promedio en este caso?

14. *(Tiempo promedio de viaje)* Dependiendo de las condiciones del tránsito, a Susana le lleva entre 25 y 40 minutos conducir desde su casa al colegio. Si ella deja su casa a las 9:00 a.m. para su clase de las 9:30, ¿cuál es la probabilidad de que no llegue tarde a su clase? ¿Cuál es el tiempo promedio de viaje de su casa al colegio? (Suponga una distribución uniforme).

15. *(Distribución uniforme)* Cierta máquina completa su operación cada 20 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que llega al azar deba esperar al menos 5 minutos para que se complete la operación? Calcule la media del tiempo de espera.

16. *(Distribución uniforme)* En término medio el peso de los huevos se distribuye uniformemente entre 38 y 42 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de que un huevo elegido al azar pese más de 40 gramos? ¿Cuál es el peso promedio de estos huevos?

17. *(Duración de llamadas telefónicas)* Si X denota la duración de las llamadas telefónicas realizadas por los empleados de cierta empresa, se sabe que X obedece una distribución exponencial con f.d.p.

$$f(x) = 0.4e^{-0.4x}$$

Indique la probabilidad de que una llamada aleatoria:

a) Dure al menos 5 minutos.

b) No dure más de 3 minutos.

18. *(Vida útil de automóviles)* Si X es la vida útil (en años) de cierto modelo de automóviles, se sigue que la función de densidad de X es $\frac{1}{8}e^{-x/8}$. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de estos automóviles dure:

a) menos de 5 años?

b) más de 10 años?

19. *(Errores tipográficos)* La variable aleatoria X denota el número de palabras con que cierta mecanógrafa comete algún error. La función de densidad de X es $c^{-1}e^{-x/c}$, en donde $c = 1000$. ¿Cuál es la probabilidad de que la mecanógrafa no cometa el siguiente error antes de escribir 200 palabras?

20. *(Reclamaciones a compañías de seguros)* Una gran compañía de seguros clasifica un accidente como "catastrófico" si da como resultado demandas que excedan los 10 millones de dólares. El intervalo de tiempo T (medido en meses) entre tales catástrofes es una variable aleatoria continua, cuya función de densidad es $\frac{1}{20}e^{-t/20}$. Calcule:

a) $P(10 \le T \le 20)$

b) $P(T \ge 15)$

21. *(Póliza de garantía de un producto)* La empresa Electrónica de Occidente, que fabrica televisores, descubre a partir de datos previos que el tiempo en que sus televisores nuevos requieren la primera reparación mayor puede describirse mediante una función de densidad exponencial $f(x) = 0.2e^{-0.2x}$ (x está en años).

a) Si la empresa garantiza sus aparatos por 2 años, ¿qué proporción de televisores les devolverán requiriendo reparaciones mayores durante el periodo de garantía?

b) Si la empresa vende 10,000 aparatos, ¿cuántos televisores puede esperar que le devolverán exigiendo reparaciones dentro del primer año después de la venta?

22. *(Póliza de garantía de un producto)* Un fabricante de automóviles sabe que el tiempo en que su nuevo automóvil requerirá una reparación mayor está descrito por la función de densidad exponencial

$$f(x) = \frac{1}{5}e^{-x/5}$$

Si el fabricante vende 20,000 automóviles en un año determinado y dio un año de garantía por lo que respecta a reparaciones mayores, ¿qué número de automóviles puede esperar que necesiten su primera reparación mayor durante este periodo de garantía?

23. *(Distribución uniforme)* El peso de los huevos de tipo mediano se distribuye uniformemente. Si uno de tales huevos se selecciona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos el 80% de dichos huevos pesen más que el elegido?

24. *(Distribución del ingreso)* Sea X el ingreso de una familia elegida aleatoriamente en cierto país (en miles de dólares). Si la función de densidad de X es $\dfrac{1}{100}xe^{-x/10}$, determine la probabilidad de que:

    a) X esté entre 10 y 20

    b) X sea mayor de 10

25. *(Volumen de ventas)* El número de pares de zapatos vendidos cada día por un almacén de zapatos es una variable aleatoria continua, cuya función de densidad es $f(x) = cxe^{-(x/40)^2}$. Determine el valor de c. Encuentre también la probabilidad de que se vendan más de 50 pares de zapatos un día cualquiera.

26. *(Botánica)* La duración máxima de vida (medida en días) de cierta especie de plantas en un ambiente dado es una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x) = \frac{1}{100}\, e^{-x/100}$. Determine:

    a) la vida promedio de las plantas.

    b) la probabilidad de que una planta dada muera dentro de 50 días.

27. *(Tiempo de digestión)* Sea T el tiempo de digestión en horas de una unidad de comida. Entonces T es una variable aleatoria y supongamos que su función de densidad de probabilidad es $f(x) = 9xe^{-3x}$ en el intervalo $0 \le x < \infty$. Encuentre $P(0 \le T \le x)$ y utilice esto para calcular:

    a) La probabilidad de que una unidad de comida se digiera durante 2 horas.

    b) La probabilidad de que todavía no sea digerida después de 3 horas.

28. La variable aleatoria X toma valores en el rango $0 \le X < \infty$ y $P(0 \le X \le x) = 1 - (1 + x^2)^{-1}$. Encuentre la función de densidad de probabilidad. Calcule $P(1 < X < 3)$ y $P(X = 2)$

REPASO DEL CAPÍTULO 16

Términos, símbolos y conceptos clave

16.1 Integral definida. Límites de integración, límite inferior, límite superior.
Teorema fundamental del cálculo.

16.2 Integrales impropias,

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

16.3 Curva de Lorentz, coeficiente de desigualdad para la distribución del ingreso.
Curva de aprendizaje.
Valor presente de un ingreso continuo.
Superávit del consumidor y superávit del productor.

16.4 Valor promedio de una función.

16.5 Integración numérica. Regla del trapecio. Regla de Simpson.

16.6 Ecuación diferencial de orden n. Ecuación diferencial lineal.
Solución de una ecuación diferencial. Solución general, condición inicial.
Tasa de crecimiento específico.

16.7 Ecuación diferencial separable; separación de variables.
Ecuación diferencial logística, función logística.

16.8 Variable aleatoria continua, función de densidad de probabilidad (f.d.p.).
Distribuciones de probabilidad uniforme y exponencial.
Valor esperado (media) de una variable aleatoria.

Fórmulas

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, en donde $F'(x) = f(x)$

Cuando $f(x) \ge 0$, el área entre $y = f(x)$ y el eje x desde $x = a$ hasta $x = b$ es igual a $\int_a^b f(x)\,dx$. Si $f(x) \le 0$, el área es $\int_a^b -f(x)\,dx$

Propiedades de las integrales definidas:

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)\,dx = 0, \qquad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

$$\int_a^b \frac{d}{dx} F(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$$

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$$

El área entre dos curvas desde $x = a$ hasta $x = b$ es

$$\int_a^b (y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}})\, dx$$

Valor presente $= \int_0^T f(t)e^{-rt}\, dt$, en donde $r = R/100$

$$\text{SC} = \int_0^{x_0} [f(x) - p_0]\, dx$$

$$\text{SP} = \int_0^{x_0} [p_0 - g(x)]\, dx$$

en donde $\begin{cases} p = f(x) \text{ es la relación de la demanda} \\ p = g(x) \text{ es la relación de la oferta} \\ (x_0, p_0) \text{ es el punto de equilibrio del mercado} \end{cases}$

Valor promedio de f: $\bar{f} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$

Regla del trapecio:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \tfrac{1}{2} h \{y_1 + 2(y_2 + y_3 + \cdots + y_n) + y_{n+1}\}$$

Regla de Simpson:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \tfrac{1}{3} h \{y_1 + y_{n+1} + 2 \text{ (Suma de } y_j \text{ para } j \text{ impar)} + 4 \text{ (Suma de } y_j \text{ para } j \text{ par)}\}$$

La solución general de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = ky \text{ es } y = Ce^{kt}$$

La solución general de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = ky + b \text{ es } y = Ce^{kt} - \frac{b}{k}$$

Ecuación diferencial logística: $\dfrac{dy}{dt} = py(m - y)$

Función logística: $y = \dfrac{m}{1 + Ae^{-kt}}$ $(k = pm)$

$$P(c \le x \le d) = \int_c^d f(x)\, dx, \qquad \mu = \int_c^d xf(x)\, dx$$

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 16

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) $\int_a^b kf(x)dx = \int_{ka}^{kb} f(x)dx$

b) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

c) $\dfrac{d}{dx}\left[\int_a^b f(x)dx\right] = f'(x)$

d) Si $f(x)$ es una función continua en $a \le x \le b$, entonces, el área entre $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por $\int_a^b f(x)dx$

e) $\dfrac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x) - f(a)$

f) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ es válida siempre y cuando $a \le c \le b$

g) $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds$

h) Una solución de la ecuación diferencial $12\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ es la función $y(x) = x^3$

i) La ecuación diferencial $dy/dt = e^{t+y}$ se puede resolver por el método de separación de variables.

j) La ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \ln(x)$ es una ecuación logística.

k) La ecuación diferencial $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = y - x$ es de segundo orden.

l) Si $f(x)$ es la función de densidad de una variable aleatoria continua, entonces, el área total bajo la curva es igual a 1.

m) La probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor mayor que su media es 0.5.

n) La función $f(x) = x^2$, si $0 \le x \le 1$ y $f(x) = 0$ en otro caso, puede ser la función de densidad de una variable aleatoria continua.

o) Si X es una variable aleatoria continua, entonces, la probabilidad de que la variable tome un valor particular es cero.

p) Si X es una variable aleatoria continua, entonces, el valor esperado de X se calcula mediante $\int_a^b f(x)dx$, en donde $f(x)$ es la f.d.p.

2. Demuestre que $\int_{a}^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_{1}^{b} \frac{1}{t} dt$

(3-8) En cada caso, calcule el área bajo las gráficas de las siguientes funciones entre los valores de x dados.

3. $f(x) = x \ln x$, $x = 1$, $x = e^3$

4. $f(x) = e^{-x}$, $x = 0$, $x = 1$

5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x = 1$, $x = 9$

6. $f(x) = e^x + e^{-x}$, $x = 0$, $x = 1$

7. $f(x) = 3xe^{-x^2}$, $x = -1$, $x = 1$

8. $f(x) = \frac{3x^2}{1 + x^3}$, $x = 0$, $x = 2$

9. Calcule el área acotada por las curvas $y = 3 + 2x - x^2$ y $y = x^2 - 4x + 3$

10. Determine el área acotada por las curvas $y = x^2$ y $y = 2 - x$

11. *(Curva de aprendizaje)* Después de pintar las primeras 400 piezas, una compañía fabricante de muebles para oficina estima que la curva de aprendizaje es de la forma $f(x) = 20x^{-0.20}$. Determine el número total de horas-hombre que se requerirán con la finalidad de pintar 200 piezas más.

12. *(Decisión de inversión)* Verónica Pérez está considerando la compra de un nuevo equipo de ensamblado, con un costo de \$50,000. Ella estima que el equipo ahorrará dinero a la compañía a una tasa de $2000(4 + t)$ pesos anuales, en un tiempo t después de haberse adquirido. ¿Se pagará la máquina a sí misma durante los próximos 4 años?

13. *(SC y SP)* Si supone que se ha establecido el equilibrio del mercado, determine el superávit del consumidor y del productor, en caso de que la función de demanda sea $p = 20 - x$ y la función de oferta sea $p = \frac{1}{324}x^2 + 1$

14. *(Curva de Lorentz)* La distribución del ingreso de cierto país está descrita por la curva de Lorentz $y = \frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{5}x$, en donde x es la proporción de captadores de ingresos y y es la proporción del ingreso total recibido.

a) ¿Qué proproción recibe el 10% de la gente más pobre?

b) Determine el coeficiente de desigualdad de la curva de Lorenz.

(15-22) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

15. $dy/dt = 3t^2$

16. $dy/dx = x(y - 1)$

17. $dy/dt + ty = y$

18. $dy/dx = e^x y$

19. $du/dt = u^2 t$, $u(0) = 1$

20. $dx/dt = t(x + 1)^2$, $x(1) = 0$

21. $dy/dx - x^3 y = 0$, $y(1) = 2$

22. $dy/dx = e^{2x-y}$, $y(0) = 0$

***23.** *(Modelo logístico)* En una ciudad cuya población es de 100,000 personas, la propagación de una epidemia de influenza sigue la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = py(100{,}000 - y)$$

en donde y es el número de personas infectadas en el instante t (medido en semanas) y $p = 0.00001$. Si inicialmente diez personas estaban enfermas, determine y como función de t. ¿Cuánto tiempo pasará antes de que la mitad de la población esté infectada?

24. *(Capitalización continua)* Una inversión de \$5,000 se invierte a una tasa continua de interés nominal del 4%.

a) Determine el valor de la inversión en cualquier instante t.

b) ¿Cuál es el valor de la inversión después de 5 años?

c) ¿Después de cuántos años el valor de la inversión se duplicará?

25. *(Maximización de la utilidad)* Las tasas de costo y de ingreso de una operación de perforación petrolera están dadas por $C'(t) = 9 + 2t^{1/2}$ y $R'(t) = 19 - 3t^{1/2}$, en donde t se mide en años y R y C se miden en millones de dólares. ¿Por cuánto tiempo debera continuarse la perforación? ¿Cuál será la utilidad máxima?

26. *(Tiempo de espera)* Una máquina completa su operación cada 10 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que llega al azar deba esperar a lo más 2 minutos para que se complete la operación? Determine el tiempo de espera promedio.

(27-30) Decida si cada una de las siguientes puede ser una función de densidad de probabilidad. En caso de que no lo sea, indique la razón de ello.

27. $f(x) = x^2$ en $0 \le x \le 1$

28. $f(x) = |2x - 2| - \frac{1}{2}$, para $x \in [0, 2]$

29. $f(x) = \frac{1}{10}(3x^2 + 1)$ para $x \in [0, 2]$

30. $f(x) = \frac{6}{125}x(5 - x)$ para $x \in [0, 5]$

31. La *mediana* de una variable aleatoria continua X es un valor m tal que $P(X \le m) = 0.5$. Determine la mediana de una variable aleatoria que tiene la f.d.p. $f(x) = \frac{3}{32}x(4 - x)$ para $0 \le x \le 4$.

***32.** Determine la mediana de una variable aleatoria que tiene la f.d.p. $f(x) = \frac{1}{24}(8 - x)$ para $0 \le x \le 4$.

33. *(Duración de llamadas telefónicas)* La duración, en minutos, de las llamadas telefónicas recibidas por los empleados de una empresa siguen una distribución exponencial con f.d.p.

$$f(x) = 0.5e^{-0.5x}$$

¿Cuál es la probabilidad de que una llamada aleatoria recibida por un empleado de la empresa:

a) dure más de 1 minuto?

b) dure más de 3 minutos?

c) no sobrepase los dos minutos?

34. *(Rociado de insecticida)* Sea $y = f(x)$ el porcentaje de mosquitos que sobreviven después del rociado con una cantidad x de insecticida por milla cuadrada. Supongamos que $dy/dx = -ky$, donde k es una constante (llamada la ley exponencial de supervivencia). Si 2000 libras de insecticida por milla cuadrada matan a 40% de los mosquitos, ¿cuánto insecticida se necesita para matar 90% de ellos?

35. *(Tiempo de espera)* El servicio aéreo de la Ciudad de México a la ciudad de Guadalajara se presta cada hora. Una persona que no conoce el programa llega al aeropuerto al azar y espera volar a la ciudad de Guadalajara.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que deberá esperar entre 10 y 30 minutos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que deberá esperar a lo más 25 minutos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que deberá esperar no menos de 15 minutos?

36. *(Ingreso promedio)* La función de demanda de un producto es $p = 33 - 0.3x$, donde x unidades pueden venderse a un precio p cada una. Determine el ingreso promedio en el intervalo de venta desde $x = 50$ hasta $x = 100$.

***37.** *(Valor promedio de una inversión)* Ana Jimena invierte $10,000 al 6% compuesto continuamente. Determine el valor promedio de la inversión, si ésta se invierte durante 5 años.

38. *(Utilidad promedio)* La función de demanda del producto de una empresa es $p = 50 - 0.15x$, donde x unidades pueden venderse al precio p cada una. El costo de producir x unidades está dado por $C(x) = 1500 + 3x$. Determine la utilidad promedio en el intervalo de ventas de $x = 100$ a $x = 200$.

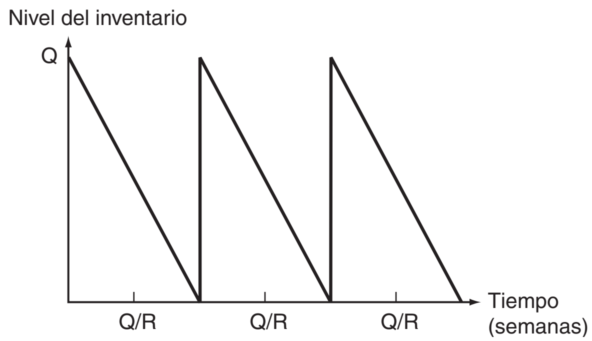
39. Utilice la regla del trapecio y la regla de Simpson para aproximar el valor de $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx$; en cada caso, tome ocho subintervalos de la misma longitud. Proporcione su respuesta con cuatro cifras decimales.

40. Utilice ambas reglas, del trapecio y de Simpson, para aproximar el valor de π por medio de la aproximación del valor de la integral $\int_0^1 \frac{4}{1 + x^2}\, dx$. En cada caso, tome 8 subintervalos iguales. Proporcione su respuesta con cuatro cifras decimales.

CASO DE ESTUDIO

UN PROBLEMA DE INVENTARIO

De acuerdo con el punto 5, en la modelación del nivel de inventario se está haciendo la suposición que, al modelar, el nivel del inventario Q es una función lineal por pedazos, como se muestra en la siguiente figura.



Aquí R representa el número de cubiertas utilizadas por semana, en este caso 100 cub/semana; mientras que Q es la cantidad ordenada y t es el tiempo en semanas. Así que el nivel del inventario entre cada pedido es $L = Q - 100t$. De manera que si se hace un pedido de Q unidades, el pedido se debe hacer cada $Q/100$ semanas. El trabajo ahora es determinar el valor de Q que minimiza el costo promedio semanal de compra, y almacenar las cubiertas se denotará con CP. Por la información de la parte (4) CP es la suma de tres partes:

$$CP = \text{costo de compra/semana} + \text{costo de envío/semana} + \text{costo de mantenimiento/semana}$$

Cada parte se puede ver como el costo por "periodo" por el número de pedidos por semana, donde el periodo, Q/R, es el tiempo entre llegadas de los pedidos.

El costo de compra y el costo de envío por periodo son, $24Q$ y 400, respectivamente, de acuerdo con lo que se estableció al inicio del capítulo. Por otro lado, de acuerdo con el punto 4, para calcular el costo promedio de mantenimiento por semana, se debe calcular el valor promedio del inventario en un periodo, que se hace de la siguiente forma:

$$\frac{R}{Q}\int_0^{Q/R} (Q - Rt)dt = \frac{Q}{2}$$

así que el costo promedio de mantenimiento por periodo es

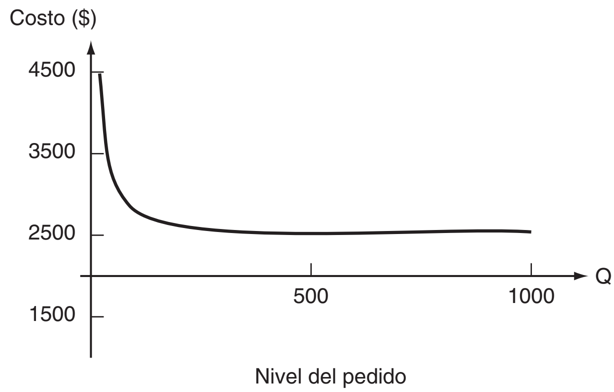
$$(0.20)\left(\frac{Q}{2}\right)\left(\frac{Q}{R}\right) = 0.20\ \frac{Q^2}{2R}$$

ya que cada periodo incluye Q/R semanas. (En esta parte es interesante notar que si se cambia la hipótesis de que la demanda es lineal, se debe calcular otra integral, quizá más complicada).

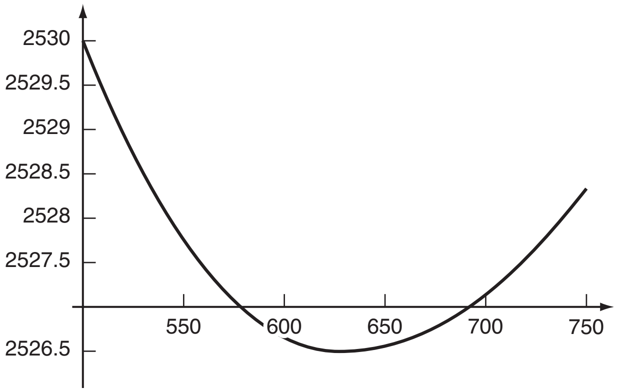
Ahora ya se puede escribir una expresión para CP; de acuerdo con lo anterior, recuerde que $R = 100$, se tiene

$$CP(Q) = \left(24Q + 400 + \frac{0.20Q^2}{2R}\right) \times \left(\frac{R}{Q}\right) = 2400 + \frac{40,000}{Q} + 0.10Q$$

La gráfica de la función se muestra a continuación:



No se consideran valores mayores a 1000. Con lo estudiado en el capítulo 13 se obtiene que el mínimo se obtiene para $Q^* = 632.45$ unidades. La siguiente gráfica es un acercamiento de la gráfica anterior, cerca del valor obtenido.



Así, se concluye que la cantidad óptima de pedido es $Q^* = 632$ unidades y deben pedirse cada $T^* = Q^*/100 = 6.32$ semanas. Ésta es la recomendación que debe hacerse a Víctor Daniel.

Al hacer esto, ¿cuál es el costo promedio por semana?

Por otro lado, algo muy importante que se hace con los modelos que se estudian es lo sensibles que son a cambios en sus parámetros. Por ejemplo, ¿qué sucede si la estimación que se hizo de 0.20 dólares/cubierta/semana fue muy baja y, en realidad, es de 0.30 dólares/cubierta/semana, ¿qué tanto afecta al valor óptimo que se obtuvo? Si el distribuidor eleva el costo de cada cubierta de \$24 a \$25, ¿cómo afecta en la decisión tomada?

Responda las preguntas anteriores, y trate de plantear y responder más preguntas que considere interesantes para el caso.

CAPÍTULO 17

Funciones de varias variables

Decisión sobre producción

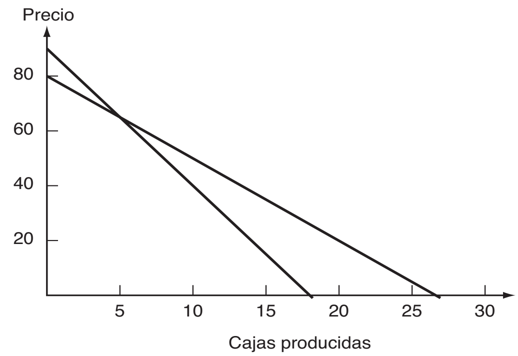
En el capítulo 13 se analizó la optimización de funciones de una variable, un tema de suma utilidad en las aplicaciones, aunque en la mayoría de éstas la función que debe optimizarse depende de más de una variable de decisión, como es el caso al que se enfrenta Alejandro Aguilera. Él trabaja para la compañía *Limpieza Perfecta*, dedicada a la producción de jabones. Una división de ésta es responsable de la fabricación de dos tipos de jabones, de tocador y para cuerpo. El precio por caja de lo que venda depende de la cantidad que produzca de cada uno de estos dos tipos de jabones. Es decir, si se decide producir x_1 cientos de cajas de jabón de tocador y x_2 cientos de cajas de jabón para cuerpo, podrá vender todo lo que produzca a los precios p_1 y p_2, miles de dólares 100 cajas de jabón de tocador y para cuerpo, respectivamente. Las siguientes ecuaciones relacionan los precios con la cantidad producida y vendida de jabones,

$$p_1 = 80 - 3x_1 \qquad (1)$$

y

$$p_2 = 90 - 5x_2 \qquad (2)$$

En la siguiente gráfica se puede observar el comportamiento del nivel de precio con respecto a la cantidad de cajas producidas.



Por otro lado, el costo de fabricación de x_1 cientos de cajas de jabón para tocador y x_2 cientos de cajas de jabón para cuerpo, se determinó, que está dado por

$$C(x_1, x_2) = 12x_1 + 8x_2 + 4x_1x_2$$

Alejandro desea determinar cuántas cajas de cada tipo de jabón debe producir para maximizar las ganancias, si supone que puede vender todo lo que produzca, al precio dado por las relaciones (1) y (2).

A lo largo de este capítulo se desarrollará la teoría y las técnicas básicas para el estudio de funciones de varias variables, así como su aplicación en la resolución de problemas de optimización de funciones con y sin restricciones. Así que, con ayuda de lo que aprenda en este capítulo, ayude a Alejandro a resolver su problema.

TEMARIO

■ 17-1 FUNCIONES Y DOMINIOS

Hasta ahora hemos restringido nuestra atención a casos en que la variable dependiente sólo es función de una variable independiente, $y = f(x)$. Sin embargo, en muchas (quizá la mayoría) de las aplicaciones debemos afrontar situaciones en que una cantidad depende no sólo de una variable sino de varias variables.

EJEMPLO 1

a) Considere un rectángulo de longitud x y ancho y. Su área A es el producto de la longitud y el ancho, o

$$A = xy$$

La variable A depende de las dos variables x y y.

b) La demanda, o volumen de ventas total, de un producto depende del precio a que se ofrece en el mercado. Sin embargo, en muchos casos el volumen de ventas también depende de factores adicionales tales como la cantidad gastada por el productor en promocionar el producto y los precios de los productos de la competencia.

c) La balanza de pagos de cualquier nación es función de un gran número de variables. Las tasas de interés del país afectarán la cantidad de inversión extranjera que fluya al interior. La tasa de cambio de la moneda nacional afectará los precios de sus bienes y, en consecuencia, determinará el volumen de exportaciones y asimismo el de importaciones. La tasa de salarios promedio también afectará los precios de las exportaciones y, por tanto, su volumen. La cantidad de inversión extranjera existente en el país afectará las utilidades generadas cada año. Aun el clima puede tener un efecto poderoso en la balanza de pagos si el turismo desempeña una parte esencial en la economía, o si ésta depende en forma sustancial de algún producto agrícola.

En estos casos necesitamos estudiar funciones de varias variables independientes. En la mayor parte de este capítulo consideraremos funciones de dos variables independientes y, por lo regular, las denotaremos con x y y. La generalización a tres o más variable es en la mayoría de los casos (pero no en todos) bastante directa. La variable dependiente, por lo regular, se denotará con z y usamos la notación $z = f(x, y)$ con el propósito de indicar que z es función de x y y.

Damos una definición formal de una función de dos variables.

DEFINICIÓN Sea D un conjunto de parejas de números reales (x, y), y sea f una regla que asigna un único número real a cada pareja (x, y) en D. Decimos que f es una **función de las dos variables** x y y y que el conjunto D es el **dominio** de f. El valor de f en la pareja (x, y) se denota por $f(x, y)$ y el conjunto de todos esos valores se denomina el **rango** de f.

EJEMPLO 2 Si $f(x, y) = 2x + y$, calcule el valor de f en la pareja (1, 2). Determine el dominio de f.

☛ **1.** Si $f(x, y) = \dfrac{\ln(x - y)}{x + y}$ calcule
a) $f(3, 1)$ *b*) $f(-1, -2)$
c) $f(2, 3)$
Proporcione el dominio de f utilizando la notación de conjuntos.

Solución El valor de una función de dos variables se obtiene simplemente sustituyendo los valores de x y y en la expresión de $f(x, y)$:

$$f(1, 2) = 2(1) + 2 = 4$$

En este caso, el valor de f es un número real bien definido para todos los valores reales de x y y, de modo que el dominio es el conjunto de todas las parejas (x, y) de números reales.

Respuesta *a*) $\frac{1}{4}\ln 2$ *b*) 0
c) No esta definida
dominio $=$
$\{(x, y) \mid x - y > 0,\ x + y \neq 0\}$

El dominio D de una función de dos variables puede visualizarse como un subconjunto de puntos del plano xy. En el ejemplo 2 todas las parejas de números reales (x, y) pertenecen al dominio, de modo que desde el punto de vista geométrico, podemos decir que el dominio consta del plano xy completo. El rango de una función de dos variables es un subconjunto de los números reales, al igual que en el caso de una función de una variable.

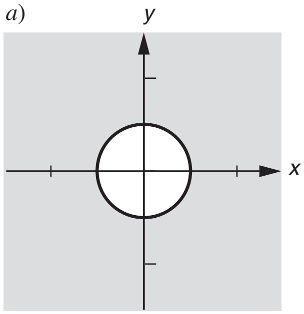
☛ **2.** Proporcione los dominios de las siguientes funciones y represéntelos de manera gráfica:
a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$
b) $f(x, y) = \dfrac{\ln(x + y)}{\ln y}$

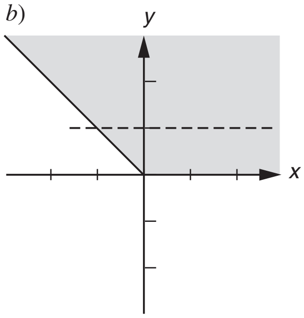
EJEMPLO 3 Dada $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, calcule $f(0, 2)$, $f(1, -1)$ y $f(1, 2)$. Determine el dominio de f y represéntelo gráficamente.

Solución Sustituyendo los valores dados de x y y, obtenemos.

$$\begin{aligned} f(0, 2) &= \sqrt{4 - 0^2 - 2^2} = 0 = 0 \\ f(1 - 1) &= \sqrt{4 - 1^2 - (-1)^2} = 2 \\ f(1, 2) &= \sqrt{4 - 1^2 - 2^2} = \sqrt{-1} \quad \text{(no definida)} \end{aligned}$$

Respuesta *a*) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$
b) $\{(x, y) \mid x + y > 0,\ y > 0,$
$y \neq 1\}$

a)


b)


La pareja (1, 2), por tanto, no pertenece al dominio de f. ☛ **1**

Para que $f(x, y)$ sea un número real bien definido, la cantidad dentro del signo de radical no debe ser negativa. Así que

$$\begin{aligned} 4 - x^2 - y^2 &\geq 0 \\ x^2 + y^2 &\leq 4 \end{aligned}$$

En consecuencia, el dominio de f consta de todos aquellos puntos (x, y) tales que $x^2 + y^2 \leq 4$.

En términos geométricos, $x^2 + y^2 = 4$ es la ecuación de un círculo centrado en el origen con radio 2 y la desigualdad $x^2 + y^2 \leq 4$ es válida en puntos dentro y sobre este círculo. Estos puntos forman el dominio D. (Véase la figura 1). El punto (1, 2) está afuera de círculo, lo cual está de acuerdo con el hecho de que $f(1, 2)$ no existe. ☛ **2**

EJEMPLO 4 ***(Función de costo)*** Una empresa elabora dos productos, A y B. El costo de los materiales y de la mano de obra es de \$4 por cada unidad del producto A y de \$7 por cada unidad de B. Los costos fijos son de \$1500 por semana. Exprese el costo semanal C en términos de las unidades de A y B producidas cada semana.

Solución Si x unidades del producto A y y unidades del producto B se elaboran cada semana, entonces los costos de mano de obra y materiales para los dos tipos de

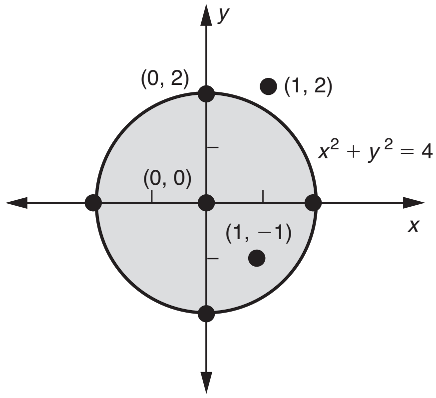


FIGURA 1

productos son $4x$ y $7y$ dólares, respectivamente. Así que el costo C (en dólares) está dado por

$$C = \text{Costos de mano de obra y materiales} + \text{Costos fijos} = 4x + 7y + 1500.$$

C es una función de x y y.

Consideremos ahora la generalización de las ideas que se acaban de exponer a funciones de más de dos variables. Cuando hay tres variables independientes se acostumbra denotarlas por x, y y z, y con w a la variable dependiente. La función consiste de una regla, la cual asigna un número real a cada terna (x, y, z) de las variables independientes. Escribimos el valor como $w = f(x, y, z)$.

EJEMPLO 5 Si

$$f(x, y, z) = \frac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{x + z}$$

evalúe $f(1, -1, 4)$ y $f(-1, 2, 1)$. Determine el dominio de f.

Solución El valor de f en (x, y, z) se obtiene sustituyendo los valores dados de x, y y z en la expresión algebraica que define f.

$$f(1, -1, 4) = \frac{\sqrt{9 - 1^2 - (-1)^2}}{1 + 4} = \frac{\sqrt{7}}{5}$$

$$f(-1, 2, 1) = \frac{\sqrt{9 - (-1)^2 - 2^2}}{-1 + 1} = \frac{\sqrt{4}}{0} \qquad \text{(no definida)}$$

Observamos que el punto $(-1, 2, 1)$ no pertenece al dominio de f.

Con el propósito de que $f(x, y, z)$ esté bien definida, es necesario que la cantidad dentro del radical no sea negativa y, asimismo, que el denominador de f sea distinto de cero. Por consiguiente, tenemos las condiciones $9 - x^2 - y^2 \geq 0$ o $x^2 + y^2 \leq 9$ y $x + z \neq 0$. Empleando notación de conjuntos, podemos escribir el dominio como

$$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 9, \quad x + z \neq 0\}$$

Cuando aparecen más de tres variables independientes se acostumbra usar subíndices con el propósito de facilitar la notación sin introducir más literales. Así, si hay n variables independientes, la denotaríamos por $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Utilizando z como la variable dependiente, escribiríamos una función de las n variables por $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. La notación de subíndices también se emplea con frecuencia para funciones de dos o tres variables; por ejemplo, podríamos escribir $w = f(x_1, x_2, x_3)$ en vez de $w = f(x, y, z)$.

EJEMPLO 6 Si

$$z = x_1^2 + e^{x_1+x_2} + (2x_1 + x_4)^{-1}\sqrt{x_2^2 + x_3^2}$$

evalúe z en el punto $(3, -3, 4, -5)$.

Solución Sustituyendo $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 4$ y $x_4 = -5$ en la expresión de z, resulta que

$$\begin{aligned} z &= 3^2 + e^{3+(-3)} + [2(3) + (-5)]^{-1}\sqrt{(-3)^2 + 4^2} \\ &= 9 + e^0 + (6 - 5)^{-1}\sqrt{9 + 16} \\ &= 9 + 1 + \tfrac{5}{1} = 15 \end{aligned}$$

Hemos visto cómo la gráfica de una función de una sola variable nos ayuda a visualizar sus propiedades más importantes; por ejemplo, donde crece o decrece, cuando es cóncava hacia arriba o hacia abajo, donde es máxima o mínima, etc. Con la finalidad de bosquejar la gráfica de $z = f(x, y)$, una función de dos variables, necesitamos coordenadas en tres dimensiones: una para cada una de las variables x, y y z.

En tres dimensiones, los ejes x, y, y z se construyen formando ángulos rectos entre sí, como se observa en la figura 2. Con frecuencia es conveniente considerar

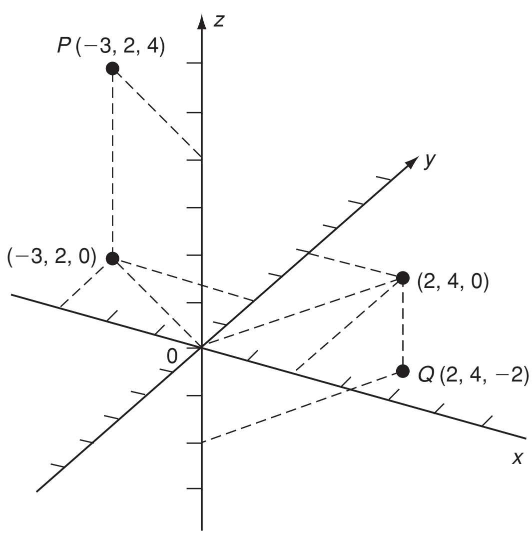


FIGURA 2

el plano xy como el horizontal y el eje z apuntando verticalmente hacia arriba. Entonces, el eje z negativo apunta hacia abajo.

Cada par de ejes determina un plano. Por ejemplo, el eje x y el eje y determinan el plano xy, el eje x y el eje z determinan el plano xz, etc. En el plano xy, la tercera coordenada z es igual a cero, y las coordenadas x y y se manejan de la manera usual al localizar las posiciones de puntos en tal plano. En la figura 2, los puntos (2, 4, 0) y (−3, 2, 0) se grafican con el objetivo de mostrar este procedimiento.

Con la finalidad de localizar la posición de un punto general (x, y, z) para los cuales $z \neq 0$, primero graficamos el punto $(x, y, 0)$ en el plano xy y luego nos movemos a partir de este punto en forma paralela al eje z de acuerdo con el valor dado de la coordenada z. Por ejemplo, al ubicar (−3, 2, 4), primero graficamos (−3, 2, 0), como en la figura 2 y después nos movemos una distancia de 4 unidades en la dirección positiva del eje z hasta el punto P. Al graficar el punto (2, 4, −2), primero localizamos (2, 4, 0) en el plano xy y luego nos movemos dos unidades paralelamente al eje z negativo hasta el punto Q. ☛ **3**

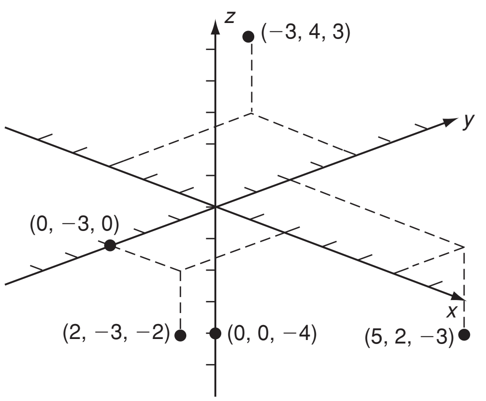
☛ **3.** Trace los puntos (0, 0, −4), (0, −3, 0), (−3, 4, 3), (2, −3, −2) y (5, 2, −3)

Todos los puntos del plano xy satisfacen la condición $z = 0$. En forma análoga, todos los puntos del plano xz satisfacen la condición $y = 0$ y todos los puntos del plano yz satisfacen la condición $x = 0$. Sobre el eje z, tanto x como y son cero. De manera similar, sobre el eje x, $y = z = 0$ y sobre el eje y, $x = z = 0$.

EJEMPLO 7 Localice los puntos (0, 2, 4), (3, 0, −2), (0, 0, 5) y (0, −3, 0).

Solución Los puntos se han graficado en la figura 3. Observe que los puntos están situados, en el plano yz, en el plano xz, en el eje z y sobre el eje y, respectivamente.

Respuesta



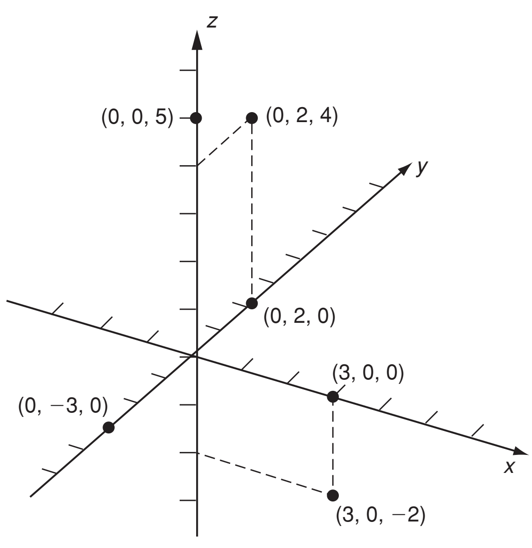


FIGURA 3

☛ **4.** Dibuje curvas de nivel para los niveles $z = 0$, ± 1 y ± 2 para las funciones
a) $z = x + y$ *b*) $z = xy$

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables. Su dominio D consta del conjunto de puntos del plano xy en que la función está definida. Para cualquier punto (x, y) en D, podemos calcular el valor correspondiente de $z = f(x, y)$ y graficamos el punto (x, y, z) en tres dimensiones. Haciendo esto para cada punto (x, y) en D, obtenemos un conjunto de puntos (x, y, z) que forman una superficie en tres dimensiones. Existe un punto (x, y, z) sobre esta superficie situado por encima de cada punto del dominio D (o debajo si $z = f(x, y)$ toma valores negativos). Esta superficie se dice que es la **gráfica** de la función $z = f(x, y)$.

En la práctica, la tarea de bosquejar una superficie en tres dimensiones que sea la gráfica de una función $z = f(x, y)$ de ninguna manera es tan sencilla, como el bosquejo de la gráfica de una función $y = f(x)$ de una sola variable. Cuando afrontamos este problema, con frecuencia es de utilidad examinar las llamadas secciones de la gráfica. Que son cortes realizados sobre la gráfica por medio de planos determinados.

Consideremos secciones resultantes de planos horizontales. Un plano horizontal (paralelo al plano xy) satisface una ecuación del tipo $z = c$, en donde c es una constante que da la altura del plano por encima del plano xy (o debajo, si $c < 0$). De modo que la sección de una gráfica que también es común al plano consta de los puntos de la gráfica situados a una altura constante por encima (o por debajo) del plano xy. Tal sección horizontal puede graficarse como una curva en el plano xy y se denomina **línea de contorno** o **curva de nivel**.

Consideremos, por ejemplo, la función $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Los puntos sobre la gráfica de esta función que también están situados sobre el plano horizontal $z = c$ satisfacen

$$c^2 = 4 - x^2 - y^2$$

Esto es,

$$x^2 + y^2 = 4 - c^2$$

Esta ecuación que relaciona x y y es la ecuación de un círculo en el plano xy centrado en $x = y = 0$ y con radio igual a $\sqrt{4 - c^2}$.

Por ejemplo, tomemos $c = 1$, de modo que consideremos el corte horizontal a través de la gráfica por el plano situado una unidad por encima del plano xy. Esta sección es entonces un círculo en el plano xy con radio $\sqrt{4 - 1^2} = \sqrt{3}$ y con centro en el punto (0, 0). De manera similar, si $c = \frac{1}{2}$, la sección es un círculo de radio $\sqrt{15}/2$, mientras que si $c = \frac{3}{2}$, la sección es un círculo de radio $\sqrt{7}/2$.

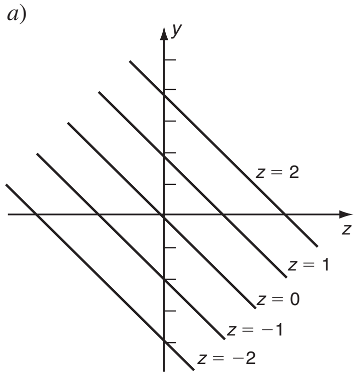
Los círculos $x^2 + y^2 = 4 - c^2$ que corresponden a estos tres valores de c, así como la frontera externa $x^2 + y^2 = 4$ del dominio, se muestran en la figura 4.

La gráfica de la función $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ en tres dimensiones es un hemisferio centrado en el origen, con radio igual a 2 unidades. La gráfica se aprecia en la figura 5, en la cual también se advierten las curvas de nivel correspondientes a $z = 0, \frac{1}{2}, 1$ y $\frac{3}{2}$ en sus ubicaciones tridimensionales. ☛ **4**

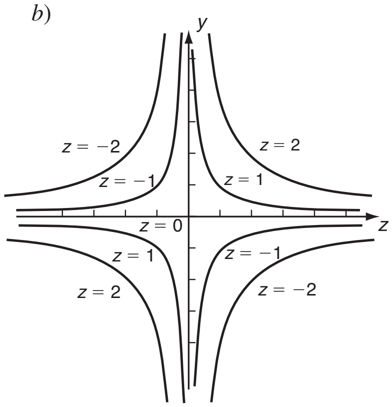
Otra forma común de representar a una función $z = f(x, y)$ de manera gráfica es mantener fija a una de las variables independientes, x o y, y graficar a z como una función de la variable restante. Dando varios valores a la variable fija, se obtienen una serie de curvas. Por ejemplo, fijando $y = c$, obtenemos $z = f(x, c)$, expre-

Respuesta

a)



b)



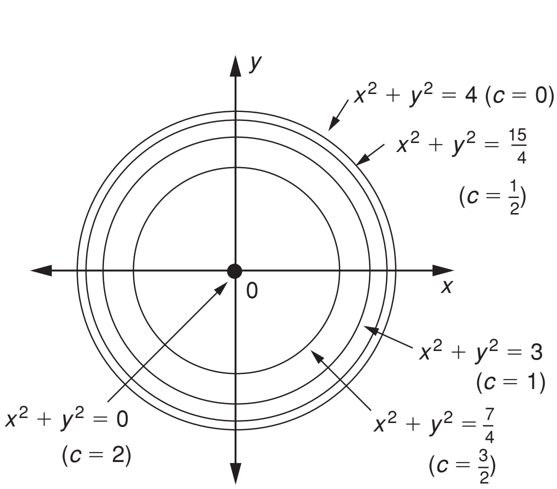


FIGURA 4

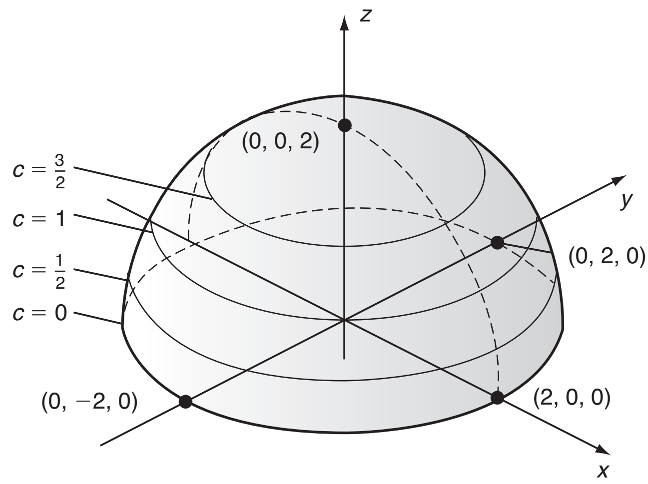


FIGURA 5

sando z como una función de x, y esta función puede graficarse en el plano xz. Dando a c valores diferentes, se pueden dibujar varias gráficas.

Ahora, $y = c$ es la ecuación de un plano vertical, paralelo al plano xz, que corta al eje y en $(0, c, 0)$. Así la gráfica de $z = f(x, c)$ es la curva a lo largo de la cual este plano vertical interseca la gráfica de f.

De manera análoga, haciendo $x = c$ obtenemos $z = f(c, y)$, cuya gráfica en el plano yz es la curva de intersección de la gráfica de f con un plano vertical paralelo al plano yz.

EJEMPLO 8 Dibuje secciones verticales de la gráfica $z = x^2 - y^2$ correspondiente a los planos verticales $x = 0, \pm 1$ y ± 2 y $y = 0, \pm 1$ y 2.

Solución Consideremos primero la sección en que $x = c$, c una constante. Ésta es la sección definida por el plano vertical que es paralelo al plano yz y a una distancia c de él. Sustituyendo $x = c$ en la función dada $z = x^2 - y^2$, obtenemos $z = c^2 - y^2$. Esta ecuación en términos de y y z describe una parábola, que se abre hacia abajo, con vértice en el punto $y = 0$ y $z = c^2$. Por ejemplo, si $c = 1$, el vértice de la parábola está en el punto $(y, z) = (0, 1)$. Las parábolas que corresponden a los valores $c = 0, \pm 1, \pm 2$, dibujadas en el plano yz, aparecen en la figura 6.

Consideremos la sección en que $y = c$, c una constante, que es la sección definida por el plano vertical que es paralela al plano xz y está a una distancia c de él. Sustituyendo $y = c$ en la ecuación dada, obtenemos $z = x^2 - c^2$. Esta ecuación en términos de x y z representa una parábola con vértice $x = 0$ y $z = -c^2$; esta parábola se abre hacia arriba. Las parábolas correspondientes a $c = 0, \pm 1, \pm 2$ aparecen en la figura 7.

☛ **5.** Para la función $z = x^2 - xy$ dibuje las secciones verticales en el plano xz para $y = 0$ y ± 2 y en el plano yz para $x = 0$ y ± 1

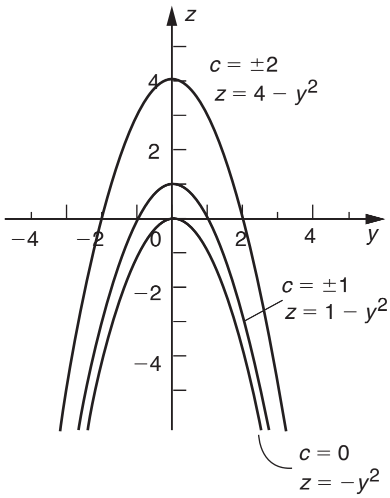


FIGURA 6

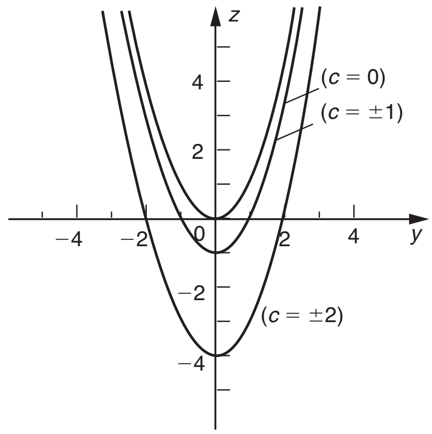
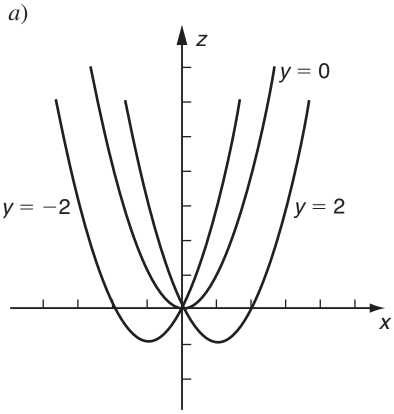


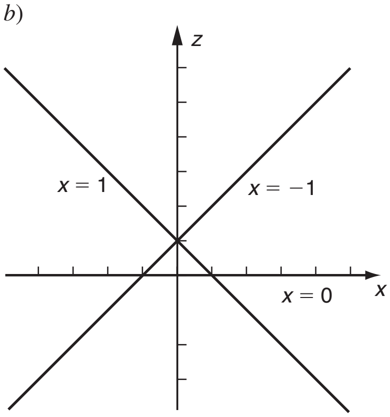
FIGURA 7

Respuesta

a)



b)



La gráfica de la función $z = x^2 - y^2$ en tres dimensiones se muestra en la figura 8, en que también se observan las secciones verticales correspondientes a $x = 0, \pm 1$ y ± 2; y $y = 0, -1$ y -2. A partir de la figura, podemos advertir de inmediato el aspecto predominante de esta gráfica, es decir, su forma de silla de montar cerca del origen. ☛ **5**

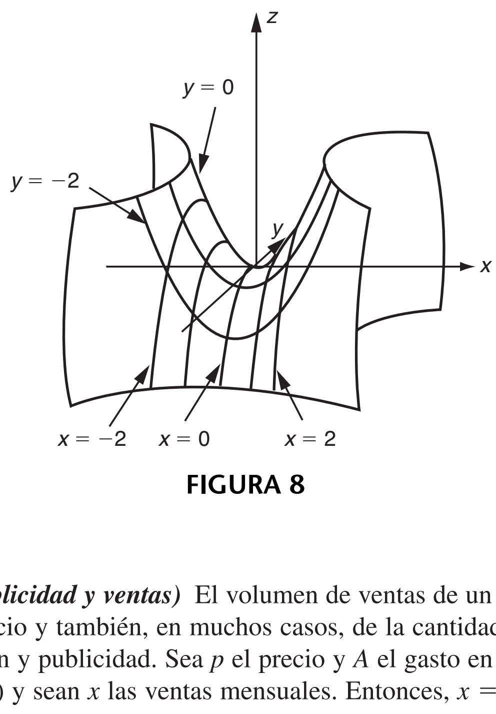


FIGURA 8

EJEMPLO 9 ***(Publicidad y ventas)*** El volumen de ventas de un artículo particular depende de su precio y también, en muchos casos, de la cantidad que el fabricante gasta en promoción y publicidad. Sea p el precio y A el gasto en publicidad al mes (ambos en dólares) y sean x las ventas mensuales. Entonces, $x = f(p, A)$. Suponga que en cierto caso

$$x = 1000(5 - pe^{-kA})$$

en donde $k = 0.001$. Dibuje las siguientes secciones verticales: gráficas de x contra p si $A = 0$, 500, 1000 y 1500 y bosqueje gráficas de x contra A para $p = 1$, 3, 5 y 8.

Solución Las gráficas requeridas de x contra p aparecen en la figura 9. Por ejemplo, cuando $A = 0$, $e^{-kA} = e^{-k(0)} = 1$ y así

$$x = 1000(5 - p)$$

La gráfica de esta función es una línea recta que intersecta al eje x ($p = 0$) en el valor $x = 5000$ y corta al eje p ($x = 0$) en $p = 5$. De manera similar, si $A = 1000$, $e^{-kA} = e^{-(0.001)(1000)} = e^{-1} = 0.368$ y así $x = 1000(5 - 0.368p)$. De nuevo, ésta es una línea recta que intersecta al eje x en $x = 5000$ y al eje p en $p = 5/0.368 \approx 13.6$. Esta gráfica representa la demanda x como una función del precio p cuando \$1000 se gastan al mes en publicidad.

Cuando p se fija en los valores requeridos, tenemos las gráficas de x contra A que aparecen en la figura 10. Por ejemplo, si $p = 3$,

$$x = 5000 - 3000e^{-0.001A}$$

Esta función da el volumen de ventas en términos de gasto en publicidad cuando a un artículo se le fija un precio de \$3.

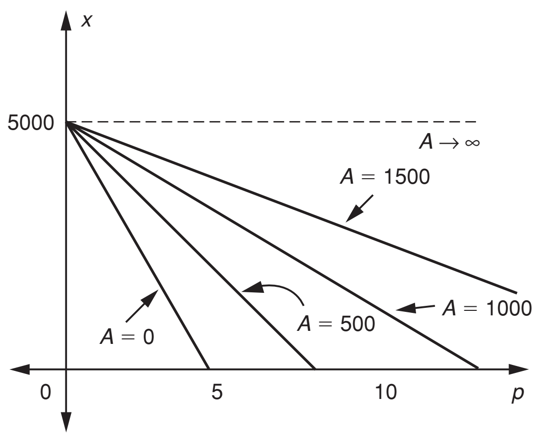


FIGURA 9

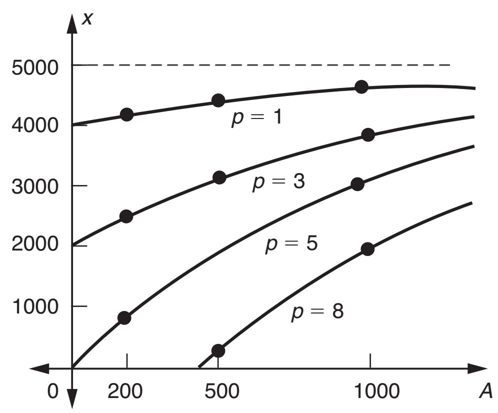


FIGURA 10

EJERCICIOS 17-1

(1-8) Calcule los valores de las funciones dadas en los puntos indicados.

1. $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$; $(x, y) = (3, -2)$ y $(-4, -4)$

2. $f(x, y) = \dfrac{(x - 1)(y - 1)}{x + y}$; $(x, y) = (1, -2)$, $(2, -2)$ y $(3, -2)$

3. $f(x, t) = \dfrac{x - t + 1}{x^2 + t^2}$; $(x, t) = (2, 1), (3, \frac{1}{2})$ y $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

4. $f(u, v) = u + \ln|v|$; $(u, v) = (2, 1), (-2, -e)$ y $(0, e^3)$

5. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$; $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ y $(-2, 1, -4)$

6. $f(x, y, t) = \dfrac{x + y + t}{x + y - t}$; $(x, y, t) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$

7. $f(u, v, z) = \dfrac{2u + 3v + 4z}{4u - 3v - z}$; $(u, v, z) = (\frac{1}{2}, 1, 1)$ y $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}\, 2)$

8. $f(a, b, c) = \dfrac{2a^2 + b^2}{\sqrt{c^2 - 4}}$; $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ y $(2, 2, -4)$

(9-16) Determine los dominios de las siguientes funciones .

9. $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$

10. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y^2 - 1}$

11. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$

12. $f(x, y) = \sqrt{1 - (x + y)^2}$

13. $f(x, t) = \ln(x - t)$

14. $f(x, y) = e^{y-x}$

15. $f(x, y, z) = x + \sqrt{yz}$

16. $f(u, v, w) = \sqrt{e^{u+v+w} - 1}$

(17-22) Bosqueje las curvas de nivel de cada una de las siguientes funciones que corresponden a los valores dados de z.

17. $z = 2x + 3y$; $z = 0, 1, 2, 3$

18. $z = 3x - y$; $z = 0, 1, -2, 3$

19. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$; $z = 0, 1, 2, 3$

20. $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$; $z = 0, 1, 2, 3$

21. $z = x^2 + y^2$; $z = 1, 2, 3, 4$

22. $z = x^2 - y^2$; $z = 0, \pm 1, \pm 2$

(23-26) Dibuje las secciones verticales de las gráficas de las siguientes funciones que corresponden a los valores dados de x o y.

23. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$; $x = 0, \pm 1, \pm 2$

24. $z = \sqrt{25 - x^2 + y^2}$; $y = 0, \pm 1, \pm 2$

25. $z = x^2 + y^2$; $y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

26. $z = 2x^2 - y^2$; $x = 0, \pm 1, \pm 2,\ y = 0, \pm 1, \pm 2$

27. *(Costo de una lata)* Una lata cilíndrica tiene radio r y altura h. Si el material con que se produce tiene un costo de \$2 por unidad de área, exprese el costo de la lata, C, como una función de r y h.

28. *(Costo de una lata)* En el ejercicio 27, encuentre una expresión para C que incluya el costo de unir los dos extremos de la superficie curveada de la lata. Este costo es de \$0.40 por unidad de longitud de cada extremo.

29. *(Costo de un tanque de agua)* Un tanque rectangular abierto debe construirse de modo que albergue 100 pies cúbicos de agua. Los costos del material son de \$5 por pie cuadrado en la base y de \$3 por pie cuadrado en las paredes verticales. Si C denota el costo total (en dólares), determine C como función de las dimensiones de la base.

30. *(Costo de un tanque de agua)* Repita el ejercicio 29 si el tanque abierto es de forma cilíndrica.

31. *(Función de costo)* Una empresa produce dos productos, X y Y. Las unidades de costos de mano de obra y de materiales son de \$5 en el caso del producto X y de \$12 por lo que respecta a Y. Además, la empresa también tiene costos fijos de \$3000 al mes. Exprese el costo mensual C (en dólares) como una función de las unidades de X y Y producidas. ¿Cuál es el costo total de producir 200 unidades de X y 150 unidades de Y?

32. *(Funciones de costo y utilidad)* Electrónica de Occidente fabrica dos tipos de cinta de casetes, de 60 y 90 minutos. El costo por unidad de mano de obra para los dos tipos es de 30¢ y de 40¢. Además, la empresa tiene costos fijos semanales de \$1200.

   a) Obtenga el costo semanal C (en dólares) como una función de las unidades de los dos tipos de cintas producidas.

   b) Evalúe el costo total de producir 10,000 cintas de 60 minutos y 8000 cintas de 90 minutos.

   c) Si la compañía vende los dos tipos de cinta a 60¢ y 75¢ cada una, respectivamente, obtenga la utilidad mensual como función del número de unidades producidas y vendidas por semana.

33. *(Costo de un oleoducto en el ártico)* Un oleoducto tiene que construirse desde el punto A hasta el punto B situado 500 millas al sur y 500 millas al este de A. A partir de A, las 200 millas al sur son de tundra, las siguientes 100 millas atraviesan pantanos y las últimas 200 millas consisten en

terrenos de roca dura. El costo del oleoducto es de P dólares por milla sobre el último tipo de terreno, $3P$ dólares por milla sobre pantanos y $2P$ dólares por milla sobre la tundra. El oleoducto constará de tres secciones rectilíneas, una a través de cada tipo de terreno; sean x las millas hacia el este atravesando la franja de tundra y sean y millas más hacia el este a través de los pantanos. Exprese su costo total en términos de x y y.

■ 17-2 DERIVADAS PARCIALES

Abordamos ahora el asunto de la diferenciabilidad de funciones de varias variables. En esta sección, sólo nos interesará el aspecto mecánico de la diferenciación, pero en las siguientes secciones, estudiaremos la interpretación y aplicación de las derivadas resultantes.

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables independientes. Si la variable y se mantiene fija en el valor $y = y_0$, entonces la relación $z = f(x, y_0)$ expresa z como una función de la variable x. Esta función tendrá como gráfica una curva en el plano xz, la cual en realidad es la sección vertical de la gráfica de $z = f(x, y)$ definida por el plano $y = y_0$.

La figura 11 ilustra una sección típica $z = f(x, y_0)$. En un punto general en esta curva, se puede construir la recta tangente y su pendiente puede calcularse derivando z respecto a x a partir de la relación $z = f(x, y_0)$. Esta derivada se calcula de la manera ordinaria como un límite de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$\frac{d}{dx} f(x, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x}$$

Se denomina la *derivada parcial de* z *con respecto a* x y, por lo regular, se denota por $\partial z/\partial x$. (Observe que usamos ∂ y no d en esta situación. El símbolo d se reserva para la derivada de una función de una sola variable).

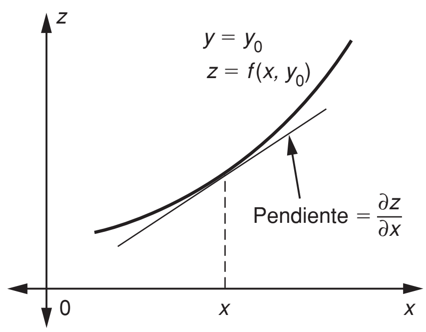


FIGURA 11

DEFINICIÓN Sea $z = f(x, y)$ una función de x y y. Entonces la **derivada parcial de z con respecto a x** se define por

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Al escribir esta definición suprimimos el subíndice de y_0; debemos recordar que *al calcular* $\partial z/\partial x$, *la variable y se mantiene constante*.

En forma análoga, la **derivada parcial de z con respecto a y** se define como

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Al calcular $\partial z/\partial y$, *la variable* x *se mantiene constante* y la derivación sólo se realiza con respecto a y.

En un punto (x_0, y_0) del dominio de la función dada $z = f(x, y)$, la derivada parcial $\partial z/\partial x$ representa la pendiente de la sección vertical de la gráfica que corresponde al plano $y = y_0$. De manera similar, la derivada parcial $\partial z/\partial x$ puede interpretarse como la pendiente de la sección vertical definida por el plano $x = x_0$. Esta última sección vertical tiene la ecuación $z = f(x_0, y)$ que expresa z como una función de y y su pendiente se obtiene derivando z con respecto a y y con x igual a la constante x_0.

Estas interpretaciones geométricas de las derivadas parciales se ilustran en la figura 12. Allí, $A'B'$ representa la sección vertical determinada por el plano $y = y_0$

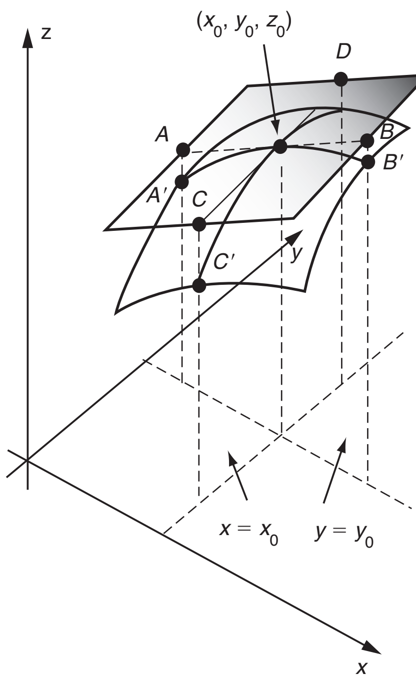


FIGURA 12

y la tangente a esta curva en $x = x_0$ es la recta AB. La pendiente de esta recta está dada por la derivada parcial $\partial z/\partial x$ evaluada en (x_0, y_0). En forma análoga, la recta CD es la tangente a la sección vertical definida por el plano $x = x_0$. Su pendiente es $\partial z/\partial y$ evaluada en (x_0, y_0).

Las derivadas parciales pueden calcularse usando, en esencia, las mismas técnicas utilizadas en la evaluación de las derivadas ordinarias. *Sólo debemos recordar que debemos manejar cualquier variable como si fuera una constante*, *excepto aquélla con respecto a la cual estamos derivando*. Aparte de esto, la fórmula familiar de la potencia, las reglas del producto y el cociente y la regla de la cadena pueden aplicarse en forma ordinaria.

EJEMPLO 1 Calcule $\partial z/\partial y$ si $z = x^3 + 5xy^2 + 2y^3$

Solución Manejando x como una constante y derivando con respecto a y, tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 5x(2y) + 2(3y^2) = 10xy + 6y^2$$

EJEMPLO 2 Calcule $\partial z/\partial x$ si $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Solución Manteniendo y fija, usamos la regla de la cadena.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2}(2x + 0)\end{aligned}$$

ya que $\partial(y^2)/\partial x = 0$ porque y^2 se mantiene constante. Por consiguiente,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x(x^2 + y^2)^{-1/2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

EJEMPLO 3 Calcule $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ si $z = (x^2 + y^2)/(\ln x)$

Solución Usando la fórmula del cociente, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\ln x\,(\partial/\partial x)(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)(\partial/\partial x)(\ln x)}{(\ln x)^2} \\ &= \frac{\ln x \cdot (2x) - (x^2 + y^2) \cdot (1/x)}{(\ln x)^2} \\ &= \frac{2x^2 \ln x - (x^2 + y^2)}{x(\ln x)^2}\end{aligned}$$

después de multiplicar numerador y denominador por x.

No necesitamos aplicar la fórmula del cociente para evaluar $\partial z/\partial y$, dado que el denominador del cociente sólo es función de x, y es constante por lo que a la derivación parcial con respecto a y se refiere.

☛ **6.** Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ para las funciones

a) $z = x^2y - 3xy^2$

b) $z = y \ln(x + y)$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2 + y^2}{\ln x}\right) = \frac{1}{\ln x}\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)$$

$$= \frac{1}{\ln x}(0 + 2y) = \frac{2y}{\ln x} \quad ☛ \mathbf{6}$$

En estos ejemplos puede advertirse que el cálculo de las derivadas parciales de una función de dos variables, en esencia, no difiere de la derivación de una función de una variable. Sólo debemos recordar que *cuando calculamos la derivada parcial con respecto a una de las variables*, *manejamos la otra variable como una constante*, luego derivamos en la forma acostumbrada.

La derivada parcial $\partial z/\partial x$ es en sí misma una función de x y y; en consecuencia, podemos calcular sus derivadas parciales con respecto a x y a y. Éstas se denominan **derivadas parciales de segundo orden** de z, y se utiliza la siguiente notación:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

De manera similar, $\partial z/\partial y$ puede derivarse con respecto a x y a y, dando dos derivadas parciales más de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Las dos derivadas $\partial^2 z/\partial x\, \partial y$ y $\partial^2 z/\partial y\, \partial x$ a menudo se denominan **derivadas parciales mixtas** de segundo orden. A condición de que estas derivadas parciales mixtas sean funciones continuas de x y y, son iguales entre sí,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

EJEMPLO 4 Calcule todas las derivadas de segundo orden de la función $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Solución En el ejemplo 2 probamos que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

para esta función. Se sigue de manera similar que

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Respuestas *a*) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 3y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 6xy$

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x + y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \ln(x + y) + \frac{y}{x + y}$

Las dos derivadas mixtas de segundo orden se obtienen como sigue (usando la regla de la cadena en la etapa intermedia).

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = x\,\frac{\partial}{\partial y}\,[(x^2 + y^2)^{-1/2}]$$

$$= x(-\tfrac{1}{2})(x^2 + y^2)^{-3/2}(2y)$$

$$= -xy(x^2 + y^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = x\,\frac{\partial}{\partial x}\,[(x^2 + y^2)^{-1/2}]$$

$$= -xy(x^2 + y^2)^{-3/2}$$

Puede advertirse que estas dos derivadas son iguales.

En el caso de las dos derivadas restantes, debe utilizarse la regla del cociente.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}\cdot(\partial/\partial x)(x) - x(\partial/\partial x)(\sqrt{x^2 + y^2})}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}\cdot(1)\cdot - x\cdot(x/\sqrt{x^2 + y^2})}{(x^2 + y^2)}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2) - x^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

☛ **7.** Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ para las funciones *a*) $z = x^p y^q$ *b*) $z = \dfrac{x}{x + y}$

En forma similar, podemos demostrar que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad ☛\ 7$$

Podemos continuar este proceso y calcular derivadas parciales de órdenes más altos:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial z}\right),$$

etcétera. Con tal de que todas las derivadas del orden dado sean continuas, el orden en que las derivaciones con respecto a x y a y se realizan carece de importancia. Por ejemplo, todas las siguientes derivadas mixtas son iguales.

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial x\,\partial y}$$

Éstas se denotan por $\partial^3 z/\partial x^2\,\partial y$, indicando dos derivaciones con respecto a x y una con respecto a y.

Respuesta

a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = p(p - 1)x^{p-2}y^q$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = pqx^{p-1}y^{q-1}$

b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{-2y}{(x + y)^3}$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{x - y}{(x + y)^3}$

☛ **8.** Calcule z_x, z_{xx} y z_{xxy} para la función $z = e^{2x + y^2}$

EJEMPLO 5 Calcule $\partial^3 z/\partial x^2\,\partial y$ y $\partial^4 z/\partial x\,\partial y^3$ si $z = x^3 y^4$

Solución Tenemos que

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 \cdot 4y^3 = 4x^3y^3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3y^3) = 4y^3 \cdot 3x^2 = 12x^2y^3$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(12x^2y^3) = 24xy^3$$

y también

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(12x^2y^3) = 36x^2y^2$$

Así que

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x\,\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(36x^2y^2) = 72x^2y$$

Al igual, que con derivadas ordinarias, hay varias notaciones que se utilizan para las derivadas parciales. La que se encuentra con mayor frecuencia es la que emplea subíndices para indicar derivadas parciales; usaremos esta notación en el texto de vez en cuando. De acuerdo con esta notación, tenemos lo siguiente:

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ se denota por z_x o $f_x(x, y)$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ se denota por z_y o $f_y(x, y)$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ se denota por z_{xx} o $f_{xx}(x, y)$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ se denota por z_{xy} o $f_{xy}(x, y)$ (Observe que $z_{xy} = z_{yx}$ si son continuas).

$\dfrac{\partial^4 z}{\partial y^3\,\partial x}$ se denota por z_{xyyy} o $f_{xyyy}(x, y)$

Las demás derivadas parciales se denotan de manera similar. ☛ **8**

La notación de derivadas parciales se extiende en forma natural a funciones $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de varias variables. Por ejemplo, $\partial z/\partial x_1$, se obtiene derivando z con respecto a x_1 manteniendo $x_2, \ldots, x_n$ constantes, etcétera.

Respuesta
$z_x = (1 + 2x)e^{2x+y^2}$
$z_{xx} = 4(1 + x)e^{2x+y^2}$
$z_{xxy} = 8y(1 + x)e^{2x+y^2}$

☛ **9.** Calcule w_x, w_y y w_z para la función $w = (x + y + z)\ln(y - z)$

Respuesta $w_x = \ln(y - z)$,
$w_y = \ln(y - z) + \dfrac{x + y + z}{y - z}$,
$w_z = \ln(y - z) - \dfrac{x + y + z}{y - z}$

EJEMPLO 6 Si $z = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1\sqrt{x_2^2 - x_3^2}$, calcule $\partial z/\partial x_1$, $\partial z/\partial x_2$ y $\partial z/\partial x_3$.

Solución

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 2x_1 + \sqrt{x_2^2 - x_3^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0 + x_1(\tfrac{1}{2})(x_2^2 - x_3^2)^{-1/2}(2x_2) = \frac{x_1x_2}{\sqrt{x_2^2 - x_3^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = 0 + x_1(\tfrac{1}{2})(x_2^2 - x_3^2)^{-1/2}(-2x_3) = -\frac{x_1x_3}{\sqrt{x_2^2 - x_3^2}}$$ ☛ **9**

EJERCICIOS 17-2

(1-24) Calcule $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ para las siguientes funciones .

1. $z = x^2 + y^2$

2. $z = 3x^3 + 5y^4 + 7$

3. $z = 3e^{2x} - 5\ln y + 7$

4. $z = xy^2 + x^2y$

5. $z = xe^y + ye^{-x}$

6. $z = x\ln y + y^2\ln x$

7. $z = x^2 + xy + y^2$

8. $z = xy + \ln(xy)$

9. $z = e^{2x+3y}$

10. $z = e^{x^2+y^2}$

11. $z = (2x + 3y)^7$

12. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$

13. $z = (x + 2y^3)^{1/3}$

14. $z = \dfrac{x}{\sqrt{y - x}}$

15. $z = xe^{xy}$

16. $z = (2x + 3y)\,e^{4x+5y}$

17. $z = \left(\dfrac{x}{y}\right)e^{xy}$

18. $z = xye^{x/y}$

19. $z = \ln(x^2 + y^2)$

20. $z = (x^2 + y^2)\ln(x + y)$

21. $z = \ln(e^x + xy^3)$

22. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

23. $z = \dfrac{y}{y - x}$

24. $z = xy\sqrt{x^2 + y^2}$

(25-38) Calcule $\partial^2 z/\partial x^2$, $\partial^2 z/\partial y^2$ y $\partial^2 z/\partial x\,\partial y$ en el caso de las siguientes funciones.

25. $z = x^4 + y^4 + 3x^2y^3$

26. $z = xe^{-y} + ye^{-x}$

27. $z = xy + \ln(x + y)$

28. $z = x^{3/2}y^{-4}$

29. $z = x^5y^{-1/2}$

30. $z = e^{x-2y}$

31. $z = ye^{xy}$

32. $z = \ln(2x + 3y)$

33. $z = \ln(x^2 + y^2)$

34. $z = (x^2 + y^2)^5$

34. $z = \dfrac{x}{x + y}$

36. $z = e^{x^2+y^2}$

37. $z = \dfrac{xy}{x - y}$

38. $z = (x^2 + y^2)e^{xy}$

39. Si $z = e^{y/x}$, pruebe que $xz_x + yz_y = 0$

40. Si $z = x^2e^{-x/y}$, pruebe que $xz_x + yz_y = 2z$

41. Si $z = x^3 + y^3$, pruebe que $xz_x + yz_y = 3z$

42. Si $z = f(ax + \text{by})$ demuestre que $bz_x - az_y = 0$

43. Si $\text{C} = ae^{kx+wt}$, demuestre que $\partial C/\partial t = (p/4)(\partial^2 C/\partial x^2)$, a condición de que $w = pk^2/4$

44. Si $f(x, y) = xe^{y/x}$, pruebe que $xf_{xx} + yf_{xy} = 0$

45. Si $C = e^{kx+wt}$, pruebe que $\partial^2 C/\partial t^2 - \partial^2 C/\partial x^2 = 0$, cuando $k = \pm w$

46. *(Microbiología)* En el proceso de metabolismo de una bacteria la razón M, a la cual una sustancia química puede ser absorbida por la bacteria y distribuirse en todo su volumen, está dada por $M = aS/V$, donde S es el área superficial, V es el volumen de la bacteria y a es una constante. Para una bacteria cilíndrica de radio r y longitud l, $V = \pi r^2 l$ y $S = 2\pi rl + 2\pi r^2$. Calcule $\partial M/\partial r$ y $\partial M/\partial l$ y, por tanto, encontrando cómo un incremento en el radio y en la longitud afecta la razón del metabolismo.

47. *(Zoología)* La razón por la cual el cuerpo de un animal pierde calor por convección está dada por $H = a(T - T_0)v^{1/3}$, donde T y T_0 son las temperaturas del cuerpo del animal y del aire que lo rodea, v es la velocidad del viento y a es una constante. Calcule $\partial H/\partial T$, $\partial H/\partial T_0$ y $\partial H/\partial v$, e interprete estas cantidades.

48. *(Difusión)* Si se inyecta una sustancia en una vena, su concentración en cualquier punto en la vena variará con el tiempo t y con la distancia x desde el punto de inyección. Bajo ciertas condiciones, la concentración puede describirse como una función de la forma

$$C(x, t) = \frac{c}{\sqrt{t}}\, e^{-x^2/(at)}$$

donde a y c son constantes. Pruebe que $C(x, t)$ satisface la siguiente ecuación

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left(\frac{a}{4}\right)\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

(Esta ecuación se conoce como la ecuación de difusión).

■ 17-3 APLICACIONES PARA ANÁLISIS EN LA ADMINISTRACIÓN

La derivada ordinaria dy/dx puede considerarse como la tasa de cambio de y con respecto a x. Esta interpretación a menudo es útil [por ejemplo, el ingreso marginal $R'(x)$ representa la tasa de cambio del ingreso con respecto al volumen de ventas o, aproximadamente, el cambio en el ingreso por unidad adicional vendida]. Pueden darse interpretaciones similares en el caso de las derivadas parciales. Por ejemplo, si $z = f(x, y)$, entonces, $\partial z/\partial x$ da la tasa de cambio de z con respecto a x cuando y es constante.

EJEMPLO 1 Se lanza un nuevo producto al mercado. El volumen de ventas x se incrementa como una función del tiempo t y depende también de la cantidad A gastada en la campaña publicitaria. Si, con t medido en meses y A en dólares,

$$x = 200(5 - e^{-0.002A})(1 - e^{-t})$$

calcule $\partial x/\partial t$ y $\partial x/\partial A$. Evalúe estas derivadas cuando $t = 1$ y $A = 400$ e interprételas.

Solución Tenemos que

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 200(5 - e^{-0.002A})e^{-t}, \qquad \frac{\partial x}{\partial A} = 0.4e^{-0.002A}(1 - e^{-t})$$

Haciendo $t = 1$ y $A = 400$, obtenemos los valores

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 200(5 - e^{-0.8})e^{-1} \approx 335, \qquad \frac{\partial x}{\partial A} = 0.4e^{-0.8}(1 - e^{-1}) \approx 0.11$$

La derivada parcial $\partial x/\partial t$ representa la tasa de incremento en el volumen de ventas con respecto al tiempo cuando el gasto en publicidad se mantiene fijo. Por ejemplo, cuando este gasto está fijo en \$400, el volumen de ventas después de un mes ($t = 1$) crece a una tasa instantánea de 335 por mes.

De manera similar, $\partial x/\partial A$ da el incremento en el volumen de ventas en un instante fijo que ocurre por cada dólar adicional gastado en publicidad. En el instante $t = 1$, cuando \$400 ya se han gastado en publicidad, un dólar adicional gastado incrementará el volumen de ventas en 0.11 unidades. ☛ **10**

☛ **10.** Repita el ejemplo 1, si el volumen de ventas está dado por

$$x = 25\frac{1 + (1 + 0.01\sqrt{A})t}{4 + t}$$

Productividad marginal

La producción total del producto de una empresa depende de un gran número de factores, los cuales la empresa a menudo tiene flexibilidad de modificar. Por lo común los dos factores más importantes son la cantidad de mano de obra empleada por la empresa y el monto del capital invertido en edificios, maquinaria, etc. Denotemos con L el número de unidades de mano de obra empleadas por la empresa (digamos en horas-hombre por año o en dólares por año gastados en salarios) y sea K el monto del capital invertido en la planta productiva de la empresa. Entonces la producción total P (por ejemplo, el número de unidades del producto de la empresa producidas al mes) es alguna función de L y K, y escribimos $P = f(L, K)$. Esta función se conoce como **función de producción** de la empresa y las variables L y K son ejemplos de **factores insumo de producción** (esto es, variables que afectan el nivel de producción).

En ciertos casos, los cambios en K y L no son independientes entre sí. Por ejemplo, si la empresa compra una máquina extra, también debe contratar mano de obra adicional con el objetivo de operarla. Por otra parte, K y L a menudo son variables independientes en el contexto de la estrategia de producción básica de la empresa. Por ejemplo, la empresa puede elegir invertir una gran cantidad de capital en una planta altamente automatizada y, de esta manera, emplear relativamente poca mano de obra o, por otro lado, puede decidir utilizar maquinaria menos sofisticado y más mano de obra. En general, K y L pueden considerarse como variables independientes.

La derivada parcial $\partial P/\partial L$ se denomina la **productividad marginal de la mano de obra** y $\partial P/\partial K$ se conoce como la **productividad marginal del capital**. $\partial P/\partial L$ mide el incremento en la producción por incremento unitario en la cantidad de la mano de obra empleada cuando el capital invertido K se mantiene fijo. En forma análoga, $\partial P/\partial K$ mide el incremento en la producción por incremento unitario en el capital invertido cuando la mano de obra empleada se mantiene constante.

EJEMPLO 2 La función de producción de cierta empresa está dada por

$$P = 5L + 2L^2 + 3LK + 8K + 3K^2$$

en donde L es el insumo mano de obra medido en miles de horas-hombre por semana, K es el monto de capital invertido medido en miles de dólares por semana y P es la producción semanal en miles de artículos. Determine las productividades marginales cuando $L = 5$ y $K = 12$ e interprete el resultado.

Respuesta $x_t = 25\dfrac{3 + 0.04\sqrt{A}}{(4 + t)^2}$

$x_A = 25\dfrac{0.005t}{\sqrt{A}(4 + t)}$

Cuando $t = 1$ y $A = 400$, $x_t = 3.8$, $x_A = 0.00125$

Solución Puesto que

$$P = 5L + 2L^2 + 3LK + 8K + 3K^2$$

las productividades marginales son

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 5 + 4L + 3K \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial K} = 3L + 8 + 6K$$

Cuando $L = 5$ y $K = 12$,

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 5 + 4(5) + 3(12) = 61, \quad \frac{\partial P}{\partial K} = 3(5) + 8 + 6(12) = 95$$

Esto significa que si $L = 5$ y $K = 12$ (esto es, se emplean 5000 horas-hombre por semana y el monto del capital invertido es de $12,000 a la semana), entonces, P se incrementa en 61 por cada incremento unitario en L y P se incrementa en 95 por cada incremento unitario en K. Por tanto, la producción se incrementa en 6100 artículos por semana por cada 1000 horas-hombres adicionales de mano de obra empleada cuando K se mantiene fija, y la producción se incrementa en 9500 artículos por semana por cada $1000 adicionales de incremento en el monto semanal del capital invertido cuando L se mantiene fijo. ☛ **11**

☛ **11.** Determine las productividades marginales de la mano de obra y del capital para la función de producción $P = cK^aL^{1-a}$, en donde c y a son constantes.

Las segundas derivadas de P con respecto a K y L tienen también interpretaciones como tasas de cambio marginales. La tasa cuando la productividad marginal $\partial P/\partial K$ se incrementa con respecto a cambios en el monto del capital se mide por $\partial^2 P/\partial K^2$. En forma análoga, $\partial^2 P/\partial L^2$ mide la tasa cuando la productividad marginal $\partial P/\partial L$ se incrementa con respecto a cambios en la cantidad de mano de obra empleada. Pueden hacerse interpretaciones semejantes para las derivadas mixtas $\partial^2 P/\partial K\,\partial L$ y $\partial^2 P/\partial L\,\partial K$.

Relaciones de demanda: elasticidades cruzadas

Consideremos ahora una aplicación diferente (a relaciones de demanda). Antes supusimos que la demanda de un artículo sólo depende del precio por unidad del artículo particular. En la práctica, esto no siempre es cierto porque la demanda de un artículo puede verse afectada por el precio de algún otro artículo relacionado. Por ejemplo, la demanda del filete de res en el supermercado no sólo depende del precio por kilo del filete mismo, sino también del precio por kilo de filete de cerdo. Cualquier cambio en el precio en la carne de cerdo afectará siempre la demanda de la carne de res y viceversa, dado que algunos consumidores estarán dispuestos a cambiar de un producto a otro.

En general, sean A y B dos artículos relacionados tales que el precio de uno afecta la demanda del otro. Denotemos con p_A y p_B los precios unitarios de los dos artículos. Entonces, sus demandas x_A y x_B se supone que son funciones de ambos precios p_A y p_B, esto es,

$$x_A = f(p_A, p_B) \quad \text{y} \quad x_B = g(p_A, p_B)$$

Podemos calcular cuatro derivadas parciales de primer orden.

$$\frac{\partial x_A}{\partial p_A}, \frac{\partial x_A}{\partial p_B}, \frac{\partial x_B}{\partial p_A}, \frac{\partial x_B}{\partial p_B}$$

Respuesta
$\frac{\partial P}{\partial L} = (1 - a)cK^aL^{-a}$,
$\frac{\partial P}{\partial K} = acK^{a-1}L^{1-a}$

La derivada parcial $\partial x_A/\partial p_A$ puede interpretarse como la **demanda marginal de A con respecto a p_A**. De manera similar, $\partial x_A/\partial p_B$ es la **demanda marginal de A con respecto a p_B** y mide la cantidad en que la demanda de A crece por incremento unitario en el precio de B. Pueden darse interpretaciones similares a las otras dos derivadas parciales.

Si el precio del artículo B se mantiene fijo, entonces, en general, un incremento en el precio de A da como resultado una disminución en la demanda x_A de A. En otras palabras, $\partial x_A/\partial p_A < 0$. En forma análoga, $\partial x_B/\partial p_B < 0$. Las derivadas parciales $\partial x_A/\partial p_B$ y $\partial x_B/\partial p_A$ pueden ser positivas o negativas, dependiendo de la interacción particular entre los dos productos. Por ejemplo, suponga que los dos artículos son filete de res (A) y de cerdo (B). Un incremento en el precio de A (filete de res) da como resultado un incremento en la demanda de B (carne de cerdo) cuando el precio de B permanece sin cambio, dado que algunos consumidores cambiarán de A a B. Así, $\partial x_B/\partial p_A > 0$. De manera similar, si el precio de A (filete de res) permanece sin cambio, un incremento en el precio de B (carne de cerdo) da como resultado un incremento en la demanda de A (filete de res), esto es, $\partial x_A/\partial p_B > 0$.

Los dos artículos A y B se dice que son **competitivos** entre sí

$$\frac{\partial x_B}{\partial p_A} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial x_A}{\partial p_B} > 0$$

esto es, si un incremento en el precio de uno de ellos da como resultado un incremento en la demanda del otro.

Algunas veces un incremento en el precio de un artículo da como resultado una disminución en la demanda del otro (suponiendo que su precio permanece sin cambio). En otras palabras, tanto $\partial x_A/\partial p_B$ como $\partial x_B/\partial p_A$ son negativas. En tal caso, se dice que los dos productos A y B son **complementarios entre sí**. Por ejemplo, las películas fotográficas y las cámaras son dos productos complementarios. Si las cámaras se hacen más costosas, entonces habrá una caída en la demanda de las películas.

EJEMPLO 3 Las demandas x_A y x_B de los productos A y B están dadas por las funciones

$$x_A = 300 + 5p_B - 7p_A^2 \quad \text{y} \quad x_B = 250 - 9p_B + 2p_A$$

en donde p_A y p_B son los precios unitarios de A y B, respectivamente. Determine las cuatro funciones de demanda marginal e investigue si los productos A y B son competitivos o complementarios entre sí.

Solución Las cuatro funciones de demanda marginal están dadas por las cuatro derivadas parciales.

$$\frac{\partial x_A}{\partial p_A} = -14p_A, \qquad \frac{\partial x_A}{\partial p_B} = 5$$

$$\frac{\partial x_B}{\partial p_A} = 2, \qquad \frac{\partial x_B}{\partial p_B} = -9$$

Puesto que $\partial x_A/\partial p_B$ y $\partial x_B/\partial p_A$ son positivas, los productos son competitivos.

☛ **12.** Dos productos A y B tienen demandas dadas por
$x_A = 20 - 2p_A - 0.2p_B$
$x_B = 50 - p_A - 5p_B$
¿Los productos son complementarios o competitivos? Cuando $p_A = 5$ y $p_B = 5$, calcule la elasticidad del producto A con respecto a su propio precio y su elasticidad cruzada con respecto al precio de B.

Considere la función de demanda del producto A: $x_A = f(p_A, p_B)$ en donde p_A es el precio por unidad de A y p_B es el precio unitario del producto relacionado B. Entonces, el **precio de la elasticidad de la demanda de A** se define por

$$\eta_{p_A} = \frac{\partial x_A/\partial p_A}{x_A/p_A} = \frac{p_A}{x_A}\frac{\partial x_A}{\partial p_A}$$

(Véase la sección 14-3). La **elasticidad de la demanda cruzada de A con respecto a p_B** se define por

$$\eta_{p_B} = \frac{\partial x_A/\partial p_B}{x_A/p_B} = \frac{p_B}{x_A}\frac{\partial x_A}{\partial p_B}$$

Aquí, η_{p_A} puede interpretarse como la razón del cambio porcentual de la demanda de A al cambio porcentual en el precio de A cuando el precio de B permanece fijo. En forma análoga, η_{p_B} puede pensarse como la razón del cambio porcentual en la demanda de A al cambio porcentual en el precio de B cuando el precio de A se mantiene fijo.

EJEMPLO 4 La función de demanda del producto A está dada por

$$x_A = 250 + 0.3p_B - 5p_A^2$$

Determine η_{p_A} y η_{p_B} cuando $p_A = 6$ y $p_B = 50$

Solución En este caso, tenemos que

$$\frac{\partial x_A}{\partial p_A} = -10p_A \quad \text{y} \quad \frac{\partial x_A}{\partial p_B} = 0.3$$

Si $p_A = 6$ y $p_B = 50$, resulta que

$$x_A = 250 + 0.3(50) - 5(6^2) = 85$$

$$\frac{\partial x_A}{\partial p_A} = -10(6) = -60 \quad \text{y} \quad \frac{\partial x_A}{\partial p_B} = 0.3$$

En consecuencia,

$$\eta_{p_A} = \frac{\partial x_A/\partial p_A}{x_A/p_A} = \frac{-60}{(85/6)} \approx -4.24 \quad \text{asimismo}$$

$$\eta_{p_B} = \frac{\partial x_A/\partial p_B}{x_A/p_B} = \frac{0.3}{(85/50)} \approx 0.176$$

Por tanto, podemos decir que un incremento aproximado del 1% en el precio de A provocará una caída del 4.24% en la demanda de este producto; mientras que un incremento del 1% en el precio de B da como resultado un aumento del 0.176% en la demanda de A. ☛ **12**

Respuesta Son productos complementarios. $\eta_{p_A} = -\frac{10}{9}$, $\eta_{p_B} = -\frac{1}{9}$

Aproximaciones

En el caso de una función $y = f(x)$, vimos en la sección 14-1 cómo utilizar la derivada en el cálculo de valores aproximados de la función en puntos de la forma

☛ **13.** Dada $f(x, y) = x^2y^3$ aproxime $f(-3 + h, 2 + k)$ por medio de una expresión lineal en h y k.

$x_0 + \Delta x$ cuando $f(x_0)$ se conoce, con tal de que Δx sea lo bastante pequeño. La aproximación está dada por

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x$$

Esta fórmula de aproximación se extiende en forma natural a funciones de varias variables.

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables que es diferenciable. Entonces, con tal de que Δx y Δy sean suficientemente pequeños,

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y}$$

EJEMPLO 5 Si $f(x, y) = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}$, es fácil advertir que $f(10, 6) = 6$. Encuentre una expresión aproximada para $f(10 + h, 6 + k)$ válida para valores pequeños de h y k.

Solución Tomando $x_0 = 10$ y $y_0 = 6$ en la fórmula anterior para la aproximación tenemos $f(10 + \Delta x, 6 + \Delta y) \approx f(10, 6) + f_x(10, 6)\,\Delta x + fy(10, 6)\,\Delta y$. Después de derivar parcialmente, obtenemos

$$f_x(x, y) = \tfrac{1}{2}(x + y)^{-1/2} + \tfrac{1}{2}(x - y)^{-1/2}$$
$$f_y(x, y) = \tfrac{1}{2}(x + y)^{-1/2} - \tfrac{1}{2}(x - y)^{-1/2}$$

En el punto $(x_0, y_0) = (10, 6)$, estas derivadas parciales toman los valores

$$f_x(10, 6) = \tfrac{1}{2}(10 + 6)^{-1/2} + \tfrac{1}{2}(10 - 6)^{-1/2} = \tfrac{3}{8}$$
$$f_y(10, 6) = \tfrac{1}{2}(10 + 6)^{-1/2} - \tfrac{1}{2}(10 - 6)^{-1/2} = -\tfrac{1}{8}$$

Por tanto, como $f(10, 6) = 6$,

$$f(10 + \Delta x, 6 + \Delta y) \approx 6 + \tfrac{3}{8}\Delta x - \tfrac{1}{8}\Delta y$$

Por último, reemplazando $\Delta x = h$ y $\Delta y = k$ obtenemos la aproximación pedida

$$f(10 + h, 6 + k) = 6 + \tfrac{3}{8}h - \tfrac{1}{8}k \qquad (1)$$

Por ejemplo, tomando $h = 0.1$ y $k = -0.2$. Obtenemos

$$f(10.1, 5.8) \approx 6 + \frac{0.3 + 0.2}{8} = 6.0625$$

Comparando, el valor exacto de $f(10.1, 5.8)$ es

$$\sqrt{10.1 + 5.8} + \sqrt{10.1 - 5.8} = \sqrt{15.9} + \sqrt{4.3} = 6.0611\ldots$$ ☛ **13**

La fórmula aproximada de la ecuación (1) es una función *lineal* de h y k, y en consecuencia es mucho más fácil de manejar que la expresión completa de $f(10 + h, 6 + k)$. En general, esto ilustra la ventaja de esta técnica de aproximación al reemplazar una función complicada por una lineal.

Respuesta $72 - 48h + 108k$

☛ **14.** El ingreso, R, de una compañía depende del precio unitario p que se cobra por su producto y de la cantidad, A, por semana que se gasta en publicidad. Se sabe que cuando $p = 15$ y $A = 5000$, $R = 25{,}000$ y el ingreso marginal con respecto a p es -500 y con respecto a A es 4. Calcule el ingreso aproximado, si el precio fuese reducido a 12 y el gasto en publicidad se reduce a 4500.

Respuesta 24,500

EJEMPLO 6 Usando L unidades de mano de obra y K unidades de capital, una empresa puede producir P unidades de su producto, en donde $P = f(L, K)$. La empresa no conoce la forma precisa de esta producción, pero dispone de la siguiente información.

1. Cuando $L = 64$ y $K = 20$, P es igual a 25,000.
2. Si $L = 64$ y $K = 20$, las productividades marginales de la mano de obra y del capital son $P_L = 270$ y $P_K = 350$.

La empresa contempla una expansión de su planta que cambiaría L a 69 y K a 24. Encuentre el incremento aproximado en la producción que se obtendría.

Solución Tomando $L_0 = 64$ y $K_0 = 20$, entonces para ΔL y ΔK pequeños

$$P = f(L_0 + \Delta L, K_0 + \Delta K) \approx f(L_0, K_0) + f_L(L_0, K_0)\,\Delta L + f_K(L_0, K_0)\,\Delta K$$
$$= 25{,}000 + 270\,\Delta L + 350\,\Delta K$$

En la nueva operación, tendríamos que $\Delta L = 69 - 64 = 5$ y $\Delta K = 24 - 20 = 4$. En consecuencia,

$$P \approx 25{,}000 + 270(5) + 350(4) = 27{,}750$$

El incremento en la producción es por tanto de $27{,}750 - 25{,}000 = 2750$ ☛ **14**

EJERCICIOS 17-3

(1-6) *(Productividades marginales)* En el caso de las siguientes funciones de producción $P(L, K)$, determine las productividades marginales para los valores dados de L y K.

1. $P(L, K) = 7L + 5K + 2LK - L^2 - 2K^2$; $L = 3, K = 10$
2. $P(L, K) = 18L - 5L^2 + 3LK + 7K - K^2$; $L = 4, K = 8$
3. $P(L, K) = 50L + 3L^2 - 4L^3 + 2LK^2 - 3L^2K - 2K^3$; $L = 2, K = 5$
4. $P(L, K) = 25L + 2L^2 - 3L^3 + 5LK^2 - 7L^2K + 2K^2 - K^3$; $L = 3, K = 10$
5. $P(L, K) = 100L^{0.3}K^{0.7}$
6. $P(L, K) = 250L^{0.6}K^{0.4}$
7. *(Función de producción Cobb-Douglass)* Una función de producción de la forma $P(L, K) = cL^aK^b$, en donde c, a y b son constantes positivas y $a + b = 1$, se denomina una *función de producción Cobb-Douglass*. Pruebe que con respecto a esta función de producción,
$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = P$$
8. *(Función de producción homogénea)* Se dice que una función de producción $P(L, K)$ es homogénea de grado n si $L\,\partial P/\partial L + K\partial P/\partial K = nP$ con n alguna constante. Determine si la función de producción dada por
$$P(L, K) = 5LK + L^2 - 3K^2 + a(L + K)$$
es homogénea o no. En caso afirmativo, ¿cuál es el grado de su homogeneidad?

(9-12) *(Demandas marginales)* Considere las siguientes funciones de demanda para los dos productos A y B, determine las cuatro funciones de demanda marginal e investigue si los productos A y B son competitivos o complementarios.

9. $x_A = 20 - 3p_A + p_B$; $x_B = 30 + 2p_A - 5p_B$
10. $x_A = 150 - 0.3p_B^2 - 2p_A^2$; $x_B = 200 - 0.2p_A^2 - 3p_B^2$
11. $x_A = 30\sqrt{p_B}/\sqrt[3]{p_A^2}$; $x_B = 50p_A/\sqrt[3]{p_B}$

12. $x_A = 200p_B/p_A^2$; $x_B = 300\sqrt{p_A}/p_B^3$

(13-16) *(Elasticidad cruzada)* En el caso de las siguientes funciones de demanda del producto A, determine η_{p_A} y η_{p_B} en los niveles de precio dados para los dos productos relacionados A y B.

13. $x_A = 250 + 0.3p_B - 2p_A^2$; $p_A = 5, p_B = 40$

14. $x_A = 127 - 0.2p_B - p_A^2$; $p_B = 30$

15. $x_A = 60p_B/\sqrt{p_A}$; $p_A = 9, p_B = 2$

16. $x_A = 250/(p_A\sqrt{p_B})$; $p_A = 5, p_B = 4$

17. *(Elasticidad de la demanda)* La función de demanda del producto A está dada por

$$Q = 327 + 0.2I + 0.5p_B - 2p_A^2$$

donde Q es la cantidad demandada, I el ingreso personal disponible del consumidor, y p_A y p_B son el precio unitario de A y el precio unitario del producto B, respectivamente.

a) Calcule el valor de la elasticidad de la demanda η_{p_A} si $p_A = 3, p_B = 20$ e $I = 200$.

b) Determine la elasticidad cruzada de la demanda de η_{p_B} de A si $p_A = 3, p_B = 20$ e $I = 200$.

c) Calcule la elasticidad de la demanda dada por el ingreso para A,

$$\eta_I = \frac{\partial Q/\partial I}{Q/I} = \frac{I}{Q}\frac{\partial Q}{\partial I}$$

con $p_A = 3, p_B = 20$ e $I = 200$

18. *(Elasticidades de la demanda)* Repita el ejercicio 17 en el caso de un producto A si la demanda está dada por la fórmula

$$Q = 250 + 0.1I + 0.3p_B - 1.5p_A^2$$

***19.** La demanda de cierto artículo está dada por la función $x = ap^{-bI^c}$, con a, b y c son constantes, p es el precio e I es el ingreso disponible del consumidor. Calcule la elasticidad del precio y la elasticidad de la demanda del ingreso. (Véase el ejercicio 17). Si la función de oferta del artículo es $x = rp^s$, con r y s constantes, determine el valor de p que alcanza el equilibrio del mercado. A partir de esta p calcule dp/dI e interprete la derivada.

20. *(Utilidades marginales)* Se descubre que la utilidad por acre de cierto cultivo de trigo es

$$P = 40L + 5S + 20F - 3L^2 - S^2 - 2F^2 - 4SF$$

en donde L es el costo de la mano de obra, S es el costo de la semilla y F es el costo del fertilizante. Calcule $\partial P/\partial L$, $\partial P/\partial S$ y $\partial P/\partial F$ y evalúelas cuando $L = 10$, $S = 3$ y $F = 4$. Interprete estas derivadas.

(21-22) Si $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, calcule una aproximación de los siguientes valores.

21. $f(3.1, 4.1)$ **22.** $f(5.1, 11.8)$

(23-24) Si $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$, encuentre una aproximación a los siguientes valores.

23. $f(5.2, 2.9)$ **24.** $f(25.1, 23.9)$

(25-26) Si $f(x, y) = (x - y)/\sqrt{x + y}$, encuentre una aproximación a los siguientes valores.

25. $f(2.1, 1.95)$ **26.** $f(4.0, 5.1)$

27. *(Cambio en el nivel de producción)* Una empresa puede producir P unidades de su producto al utilizar L unidades de mano de obra y K unidades de capital, con

$$P(L, K) = 100L^{3/4}K^{1/4}$$

a) Calcule la producción total cuando $L = 81$ y $K = 16$

b) Aproxime el efecto de reducir L a 80 e incrementar K a 17

28. *(Cambio en el nivel de producción)* La función de producción de una empresa está dada por

$$P(L, K) = 450L^{3/5}K^{2/5}$$

en donde P representa la producción cuando se emplean L unidades de mano de obra y K unidades de capital.

a) Determine la producción de la empresa si $L = 243$ y $K = 32$

b) Aproxime el efecto de incrementar la mano de obra a 248 unidades y disminuir el capital a 31 unidades.

29. *(Producción aproximada)* La función de producción de una empresa está dada por

$$P(L, K) = 9L^{2/3}K^{1/3}$$

en donde P representa la producción total cuando se emplean L unidades de mano de obra y K unidades de capital. Aproxime la producción total cuando $L = 1003$ y $K = 28$.

■ 17-4 OPTIMIZACIÓN

En el capítulo 13 vimos que uno de los usos más importantes y de mayor aplicación del cálculo de funciones de una sola variable es la determinación de los valores máximos y mínimos de funciones. El problema correspondiente, el cálculo de máximos y mínimos de funciones de varias variables, es igual de importante, y en esta sección lo estudiaremos en el caso de funciones de dos variables.

DEFINICIÓN La función $f(x, y)$ tiene un **máximo local** en el punto (x_0, y_0) si $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ para todos los puntos (x, y) lo suficientemente cercanos a (x_0, y_0) con excepción de (x_0, y_0) mismo.

La función $f(x, y)$ tiene un **mínimo local** en el punto (x_0, y_0) si $f(x, y) > f(x_0, y_0)$, para todos los puntos (x, y) lo suficientemente cercanos a (x_0, y_0), con excepción de (x_0, y_0) mismo.

El valor correspondiente de $f(x_0, y_0)$ se denomina el **valor máximo local** (o **valor minimo local**, según sea el caso) de la función f. El término **extremo** abarca tanto a máximos como a mínimos.

En el caso de funciones de una variable, estudiamos dos tipos de extremos, uno en el que la derivada se hacía igual a cero y otro en que la derivada no existía, correspondiendo a una esquina o pico de la gráfica de la función. En esta sección, por razones de simplicidad, nos restringiremos al primer tipo. Esto es, sólo consideraremos funciones cuyas gráficas sean superficies suaves en tres dimensiones. Esta restricción no es seria dado que la vasta mayoría de las aplicaciones tratan con funciones cuyas gráficas son suaves.

Sea la función $z = f(x, y)$ con un máximo local en (x_0, y_0). Construyamos la sección vertical de la gráfica determinada por $y = y_0$, es decir, la sección a través del punto máximo. Esta tiene la ecuación $z = f(x, y_0)$ y puede representarse por una gráfica en el plano xz. (Véase la figura 13). Puesto que la superficie $z = f(x, y)$ presenta un máximo si $x = x_0$ y $y = y_0$, esta sección debe tener un máximo local en $x = x_0$.

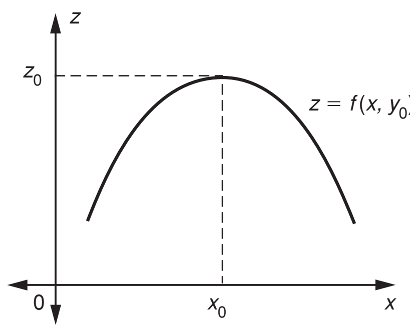


FIGURA 13

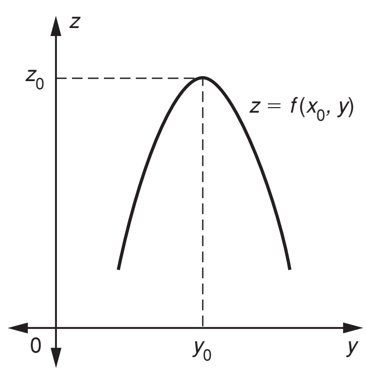


FIGURA 14

☛ **15.** Determine los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = x^2 + 5xy + y^2$

b) $f(x, y) =$
$x^2 + 3xy - 5y^2 - 7x + 4y + 8$

En consecuencia, la pendiente a esta sección, que está dada por la derivada $\partial z/\partial x = f_x(x, y_0)$, debe ser cero si $x = x_0$.

En forma similar, consideremos la sección correspondiente a $x = x_0$, que consta de una curva en el plano yz con ecuación $z = f(x_0, y)$. Esta curva tiene un máximo cuando $y = y_0$, y así la pendiente $\partial z/\partial y = f_y(x_0, y)$ debe ser igual a cero si $y = y_0$. (Véase la figura 14).

Lo cual nos lleva al siguiente teorema.

TEOREMA 1 Si $f(x, y)$ tiene un máximo local o un mínimo local en el punto (x_0, y_0), entonces, es necesario que

$$\boxed{f_x(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f_y(x_0, y_0) = 0}$$

(La exposición relativa a un mínimo local es paralela a la ya dada para un máximo local).

DEFINICIÓN Un **punto crítico** de una función suave $f(x, y)$ es un punto (x_0, y_0) en que $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

A partir de la discusión anterior es claro que todo extremo local de una función suave debe ser un punto crítico. Sin embargo, *no todo punto crítico es un extremo*, como en el caso de funciones de una variable. Volveremos a esta cuestión en un momento.

EJEMPLO 1 Encuentre los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = x^3 + x^2y + x - y$$

Solución Debemos hacer las derivadas parciales f_x y f_y iguales a cero:

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy + 1 = 0$$
$$f_y(x, y) = x^2 - 1 = 0$$

De la segunda de estas ecuaciones se sigue que $x^2 = 1$, o $x = \pm 1$. Y de la primera, tenemos ahora que

$$2xy = -3x^2 - 1 = -3(1) - 1 = -4 \qquad \text{esto es,} \qquad y = \frac{-4}{2x} = \frac{-2}{x}$$

Así que, $y = -2$ si $x = 1$; y cuando $x = -1$, $y = +2$

Por tanto, hay dos puntos críticos, $(1, -2)$ y $(-1, 2)$ ☛ **15**

En el caso de una función $f(x)$ de una variable, en el capítulo 13 vimos que no todo punto crítico necesariamente es un extremo local. Un punto crítico en que $f'(x) = 0$ puede ser máximo local, mínimo local o un punto de inflexión, y en el capítulo 13 desarrollamos técnicas para distinguir entre estas posibilidades. Son ne-

Respuesta *a*) (0, 0) *b*) (2, 1)

cesarias pruebas similares en el caso de una función $f(x, y)$ de dos variables, ya que de nuevo no todo punto crítico es un extremo. Esto se ilustra por la función $z = x^2 - y^2$, que se consideró en el ejemplo 8 de la sección 17-1. Esta función tiene un punto crítico en el origen que no es máximo local ni mínimo local. La sección vertical de su gráfica determinada por el plano $y = 0$ tiene un mínimo local en el origen; mientras que la sección vertical de su gráfica definida por el plano $x = 0$ presenta un máximo local en el origen. (Véanse las figuras 6 a 8). Un punto crítico de este tipo se denomina un **punto silla**.

Si $f(x, y)$ tiene un máximo local en (x_0, y_0), entonces, es necesario que la sección determinada por $y = y_0$ también deba tener un máximo local en $x = x_0$. (Esto es claro si observamos la figura 13). Esto se garantiza, si $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, por la prueba de la segunda derivada de la sección 13.3. De forma similar, si $f_y(x_0, y_0) = 0$ y $f_{yy}(x_0, y_0)$, entonces, la sección de la gráfica, en la que $x = x_0$ es constante, debe ser cóncava hacia abajo y, por tanto, tiene un máximo local en (x_0, y_0).

De manera similar, podemos advertir que si $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$, entonces, la sección de la gráfica en que $x = x_0$ debe ser cóncava hacia abajo y tiene, por tanto, un máximo local en (x_0, y_0).

Sin embargo, las dos condiciones $f_{xx} < 0$ y $f_{yy} < 0$ y en (x_0, y_0) no son suficientes para garantizar que la superficie misma tenga un máximo local en (x_0, y_0). Sólo garantizan que las secciones verticales definidas por los dos planos coordenados $x = x_0$ y $y = y_0$ tengan máximos locales en el punto (x_0, y_0). Es muy posible que las secciones de la gráfica tengan máximos locales en estos planos verticales, aunque tengan un mínimo local en algún otro plano vertical a través de (x_0, y_0). ☛ **16**

☛ **16.** Sea $f(x, y) = (x - y)^2 - 2(x + y)^2$
Demuestre que f tiene un punto crítico en (0, 0) en el que $f_x = f_y = -2$. Sin embargo, f no tiene un máximo local en el origen: en el plano vertical $y = -x$, $f(x, y) = (x - y)^2 = 4x^2$, la cual tiene un mínimo local en $x = 0$

Por tanto, es claro que se requiere alguna condición extra con la finalidad de completar el criterio para un máximo o mínimo. Esto se logra mediante el siguiente teorema (que no probaremos).

TEOREMA 2 Sea (x_0, y_0) un punto crítico de la función $f(x, y)$ para la cual $f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$. Sea

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$$

a) Si $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$ y $\Delta(x_0, y_0) > 0$, entonces, $f(x, y)$ tiene un máximo local en (x_0, y_0).

b) Si $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$ y $\Delta(x_0, y_0) > 0$, entonces, $f(x, y)$ tiene un mínimo local en (x_0, y_0).

c) Si $\Delta(x_0, y_0) < 0$, entonces, (x_0, y_0) no es extremo local de $f(x, y)$, sino es un punto silla.

Observaciones

1. Si $\Delta(x_0, y_0) = 0$, entonces, este teorema no puede aplicarse para decidir sobre máximos o mínimos.

2. Si $\Delta(x_0, y_0) > 0$, entonces, f_{xx} y f_{yy} necesariamente tienen el mismo signo en (x_0, y_0). En consecuencia, en los casos *a*) y *b*) del teorema 2, sólo debe determinarse el signo de una de estas derivadas parciales.

EJEMPLO 2 Encuentre los extremos locales de la función

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x - 2y$$

Solución En primer término, hallamos los puntos críticos.

$$f_x = 2x + 2y + 2 = 0$$
$$f_y = 2x + 4y - 2 = 0$$

Resolviendo estas dos ecuaciones simultáneas, obtenemos $x = -3$ y $y = 2$. Así que $(-3, 2)$ es el único punto crítico.

Ahora aplicamos el teorema 2 para probar si este punto crítico es máximo o mínimo local. Derivando una vez más encontramos que

$$f_{xx} = 2, \qquad f_{yy} = 4 \qquad \text{y} \qquad f_{xy} = 2$$

☛ **17.** Determine los extremos locales de las siguientes funciones:
a) $f(x, y) = x^2 + 4xy + 2y^2$
b) $f(x, y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - x + 2y + 1$

Por tanto, $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (2)(4) - 2^2 = 8 - 4 = 4$. De modo que $f_{xx} > 0$, $f_{yy} > 0$ y $\Delta > 0$, y así el punto $x = -3$, $y = 2$ es un mínimo local de f. El valor mínimo local de f es

$$f(-3, 2) = (-3)^2 + 2(-3)(2) + 2(2)^2 + 2(-3) - 2(2) = -5$$ ☛ **17**

EJEMPLO 3 ***(Decisiones sobre fijación de precios)*** La Corporación de cremas dentífricas orgánicas produce crema para dientes en dos tamaños, de 100 y 150 mililitros. El costo de producción de cada tubo de cada tamaño es de 60¢ y 90¢, respectivamente. Las demandas semanales x_1 y x_2 (en miles) para los dos tamaños son de

$$x_1 = 3(p_2 - P_1)$$
$$x_2 = 320 + 3p_1 - 5p_2$$

donde p_1 y p_2 son los precios en centavos de los tubos. Determine los precios p_1 y p_2 que maximizarían las utilidades de la compañía.

Solución La utilidad obtenida por cada tubo de 100 mililitros de crema dental es de $(p_1 - 60)$ centavos y la utilidad por cada tubo de 150 mililitros es de $(p_2 - 90)$ centavos. Por tanto, la utilidad P (en miles de centavos, porque las demandas son en miles) obtenida vendiendo x_1 tubos de 100 mililitros y x_2 tubos de 150 mililitros está dada por

$$\begin{aligned} P &= (p_1 - 60)x_1 + (p_2 - 90)x_2 \\ &= 3(p_1 - 60)(p_2 - p_1) + (p_2 - 90)(320 + 3p_1 - 5p_2) \\ &= -3p_1^2 - 5p_2^2 + 6p_1p_2 - 90p_1 + 590p_2 - 28{,}800 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial P}{\partial p_1} = 6p_2 - 6p_1 - 90 \qquad \text{y asimismo} \qquad \frac{\partial P}{\partial p_2} = 6p_1 - 10p_2 + 590$$

En la utilidad máxima, $\partial P/\partial p_1 = \partial P/\partial p_2 = 0$. Esto es,

$$6p_2 - 6p_1 - 90 = 0 \qquad \text{y} \qquad 6p_1 - 10p_2 + 590 = 0$$

Respuesta *a*) Punto silla en (0, 0) *b*) mínimo local en (2, −1).

Resolviendo estas dos ecuaciones, obtenemos $p_1 = 110$ y $p_2 = 125$. También $\partial^2 P/\partial p_1^2 = -6$, $\partial^2 P/\partial p_2^2 = -10$ y $\partial^2 P/\partial p_1\,\partial p_2 = 6$. Por consiguiente,

$$\Delta = \frac{\partial^2 P}{\partial p_1^2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial p_2^2} - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial p_1\,\partial p_2}\right)^2 = (-6)(-10) - 6^2 > 0$$

Puesto que $\Delta > 0$ y $\partial^2 P/\partial p_1^2$, $\partial^2 P/\partial p_2^2$ son negativas, los precios $p_1 = 110$¢ y $p_2 = 125$¢ le producirán una utilidad máxima a la compañía. Con estos valores de p_1 y p_2, las demandas son de $x_1 = 45$ y $x_2 = 25$ (en miles por semana).

También surgen problemas en los cuales necesitamos encontrar los valores máximos y mínimos de una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de varias variables. De nuevo, resolvemos tales problemas haciendo todas las derivadas parciales iguales a cero:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

Esto nos da n ecuaciones que deben resolverse para las variables $x_1, \ldots, x_n$. El punto resultante es un punto crítico de f.

El criterio que debe aplicarse con la finalidad de probar si el punto crítico es un máximo, o mínimo local o un punto silla, es más complicado que el dado para funciones de dos variables y no lo estudiaremos aquí.*

EJERCICIOS 17-4

(1-22) Halle los puntos críticos de las siguientes funciones y pruebe si cada uno de ellos es un máximo o mínimo local.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 7$

2. $f(x, y) = 5 + 4x + 6y - x^2 - 3y^2$

3. $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + 4x + 12y$

4. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 1$

5. $f(x, y) = 2x^2 + xy + 2y^2$

6. $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$

7. $f(x, y) = 2xy - x^2 - 3y^2 - x - 3y$

8. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy - 3x + 5y + 4$

9. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x - 4y + 7$

10. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y$

11. $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + y^3 - y$

12. $f(u, v) = u^3 + v^3 - 3uv^2 - 3u + 7$

13. $f(x, y) = 2xy(x + y) + x^2 + 2x$

14. $f(x, y) = xy(x - y) + y^2 - 4y$

15. $f(x, y) = x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{y}$

16. $f(x, y) = xy - \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{y}$

17. $f(x, y) = (x - 2)(y - 2)(x + y - 3)$

18. $f(x, y) = (x - 1)(y + 2)(x + y - 2)$

19. $f(x, y) = xy + \ln x + y^2$

20. $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - \ln(xy^2)$

*Véase, por ejemplo, A.E. Taylor y W.R. Mann, *Advanced Calculus,* 2a. ed. (Lexington, Mass.: Xerox College Publishing), p. 230.

21. $f(x, y) = xe^{-x} + ye^{-2y}$

22. $f(p, q) = 25q(1 - e^{-p}) - 50p - q^2$

23. *(Costo mínimo de producción)* Una empresa produce dos tipos de productos, A y B. El costo diario total (en dólares) de producir x unidades de A y y unidades de B está dado por $C(x, y) = 250 - 4x - 7y + 0.2x^2 + 0.1y^2$. Determine el número de unidades de A y B que la empresa debe producir al día con el propósito de minimizar el costo total.

24. *(Utilidad máxima)* Si la empresa del ejercicio 23 anterior puede vender cada unidad de A a \$20 y cada unidad de B a \$16, encuentre los niveles de producción de A y B que maximizarían las utilidades de la empresa. ¿Cuál es la utilidad diaria máxima?

25. *(Costo de producción mínimo)* Repita el ejercicio 23 si

$$C(x, y) = 1500 - 7.5x - 15y - 0.3xy + 0.3x^2 + 0.2y^2$$

26. *(Promoción óptima y niveles de producción)* Si x denota la producción de la empresa (en cientos) y y la cantidad gastada (en miles de dólares) en los esfuerzos promocionales de vender el producto, entonces la utilidad de la empresa P (en miles de dólares) está dada por $P(x, y) = 16x + 12y + 2xy - x^2 - 2y^2 - 7$. ¿Qué valores de x y y producirán la utilidad máxima? ¿Cuál es la utilidad máxima?

27. *(Utilización óptima de mano de obra y tamaño del lote)* El costo total C por serie de producción (en miles de dólares) de cierta industria está dado por $C(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - 5xy + 3x - 14y + 20$, en donde x denota el número de horas-hombre (en cientos) y y el número de unidades (en miles) del producto elaboradas por serie. ¿Qué valores de x y y darán como resultado el costo total mínimo por serie de producción?

28. *(Producción máxima)* Usando L unidades de mano de obra y K unidades de capital, la producción semanal total de una empresa está dada por $P(L, K) = 20K + 32L + 3LK - 2L^2 - 2.5K^2$. Halle el número de unidades de mano de obra y de capital que la empresa debe utilizar para maximizar su producción.

29. *(Uso óptimo de materiales)* Una empresa utiliza dos tipos de materias primas, X y Y, en su producto. Usando x unidades de X y y unidades de Y, la empresa puede elaborar P unidades del producto, con $P = 0.52x + 0.48y + 0.12xy - 0.07x^2 - 0.06y^2$. Si el costo de cada unidad de X es de \$5.10 y de \$1.80 por cada unidad utilizada de Y, y la empresa puede vender todas las unidades que produce a \$15 cada una. ¿Qué cantidades de X y Y debería utilizar la empresa con el propósito de maximizar sus utilidades?

30. *(Costo mínimo)* Usando L unidades del insumo mano de obra y K unidades del insumo capital, una empresa fabrica cierta producción de su artículo, cuyo costo total T (en millones de dólares) está dado por $T = 40 - 5K - 3L - 2KL + 1.5K^2 + L^2$. Determine la cantidad de cada insumo que debería utilizarse con el propósito de minimizar el costo de la empresa. ¿Cuál es el costo mínimo?

31. *(Fijación óptima de precios de productos que compiten entre sí)* La compañía occidental de dulces produce caramelos en dos tamaños a costos unitarios de 10¢ y 20¢ cada uno. Las demandas semanales x_1 y x_2 (en miles) para los dos tamaños están dadas por

$$x_1 = p_2 - p_1 \qquad \text{y} \qquad x_2 = 60 + p_1 - 3p_2$$

en donde p_1 y p_2 denotan los precios en centavos de los caramelos en los dos tamaños. Determine los precios p_1 y p_2 que maximizarían las utilidades semanales de la empresa.

32. *(Fijación óptima de precios de productos que compiten entre sí)* Juguetes Mónica produce dos tipos diferentes de cochecitos de plástico con un costo de 10¢ y 30¢ cada uno. Las demandas anuales x_1 y x_2 (en miles) están dadas por

$$x_1 = 30 + 2p_2 - 5p_1 \qquad \text{y} \qquad x_2 = 100 + p_1 - 2p_2$$

con p_1 y p_2 los precios unitarios (en centavos) de los dos tipos de cochecitos. Determine los precios p_1 y p_2 que la compañía debe fijar para maximizar sus utilidades.

33. *(Publicidad óptima y fijación de precios)* A una compañía le cuesta \$2 por unidad elaborar su producto. Si A dólares se gastan por mes en publicidad, entonces, el número de unidades por mes que se venderá está dado por $x = 30(1 - e^{-0.001A})(22 - p)$ en donde p es el precio de venta. Halle los valores de A y p que maximizarán la utilidad mensual neta de la empresa y calcule el valor de esta utilidad máxima.

***34.** *(Publicidad óptima y fijación de precios)* Con el objetivo de fabricar x artículos por semana, la función de costo semanal de una empresa es $C(x) = 50 + \frac{20}{3}x + \frac{1}{60}x^2$. Si A dólares por semana se gastan en publicidad, el precio p (en dólares) en que la demanda será de x artículos por semana está dado por

$$p = 20 - \frac{x}{60(1 - e^{-0.001A})}$$

Determine los valores de x y A que maximizan la utilidad semanal y calcule esta utilidad máxima.

35. *(Rendimiento óptimo de cultivos)* El valor en dólares de una plantación de jitomates producidos bajo calor artificial está dado por $V = 25T(1 - e^{-x})$ por unidad de área de suelo. Aquí T es la temperatura sostenida en grados Celsius por encima de 10°C y x es la cantidad de fertilizante utilizado por unidad de área. El costo del fertilizante es de $50x$ por unidad de área y el costo de la calefacción es igual a T^2 por unidad de área. Determine los valores de x y T que maximizan la utilidad de la plantación. Calcule la utilidad máxima por unidad de área.

***36.** *(Agricultura)* El número promedio de manzanas producidas por árbol en un huerto en que hay n árboles por acre está dado por $(A - \alpha n + \beta\sqrt{x})$ en donde A, α y β son constantes y x es la cantidad de fertilizante utilizado por acre. El valor de cada manzana es V y el costo por unidad de fertilizantes es F. Determine los valores de x y n que producen la utilidad (esto es, el valor del cultivo de manzanas menos el costo del fertilizante) máxima.

***37.** *(Existencias óptimas de peces)* En un lago se poblará con dos especies de peces. Cuando hay x peces de la primera especie y y peces de la segunda especie en el lago, los pesos promedio de las dos especies al fin de la estación son de $(3 - \alpha x - \beta y)$ libras y $(4 - \beta x - 2\alpha y)$ libras, respectivamente. Encuentre los valores de x y y que hacen que el peso total de los peces sea máximo.

***38.** *(Existencias óptimas de peces)* Repita el ejercicio 37 en el caso de que los pesos promedios de las dos especies de peces sean $(5 - 2\alpha x - \beta y)$ y $(3 - 2\beta x - \alpha y)$ libras, respectivamente.

39. *(Diseño de un tanque de agua)* Un tanque ha de construirse con ancho x, longitud y y profundidad z, y lo bastante grande para albergar 256 pies cúbicos de líquido. Si no tendrá tapa, ¿qué dimensiones minimizarían el área total de los restantes cinco lados del tanque (y por consiguiente la cantidad de material utilizada en su construcción)?

40. *(Medicina)* La reacción a una inyección de x unidades de cierta medicina medida t horas después de la inyección esta dada por $y = x^2(a - x)te^{-t}$. Calcule $\partial y/\partial x$ y $\partial y/\partial t$ y encuentre los valores de x y t donde la reacción es máxima.

41. *(Medicina)* Si en el ejercicio 40 la reacción a la medicina está dada por la fórmula $y = x(a - x)t^{1/2}e^{-xt}$, calcule:

a) El valor de t en el cual y es máxima, para x fija.

b) ¿Cuáles valores de x y t juntos hacen a y máxima?

42. *(Medicina)* En el tratamiento de cierta enfermedad se usan simultáneamente dos medicamentos. La reacción R medida en unidades adecuadas para x unidades de la primera droga y y unidades de la segunda es

$$R = x^2y^2\,(a - 2x - y)$$

Encuentre los valores de x y y que hacen a R máxima.

■ 17-5 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE (SECCIÓN OPCIONAL)

Algunas veces afrontamos el problema de minimizar o maximizar cierta función sujeta a alguna restricción de las variables que intervienen. Consideremos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Una empresa desea construir un tanque rectangular con capacidad de 1500 pies cúbicos de agua. La base y las paredes verticales deberán ser de concreto y la tapa de acero. Si el costo del acero es el doble por unidad de área que el del concreto, determine las dimensiones del tanque que minimizan el costo total de construcción.

Solución Sean x, y y z (en pies) la longitud, el ancho y la altura del tanque rectangular, respectivamente. (Véase la figura 15). Entonces,

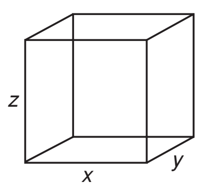


FIGURA 15

$$\text{Área de la base} = \text{Área de la tapa} = xy$$

y también

$$\text{Área de las cuatro paredes} = 2xz + 2yz$$

Sea p el costo del concreto por pie cuadrado. Se sigue que el costo del acero por pie cuadrado es de $2p$. El costo de construir la base y las cuatro paredes verticales con concreto a p por unidad de área es

$$p(xy + 2xz + 2yz)$$

El costo de construir la tapa con acero a $2p$ por unidad de área es $2pxy$. El costo total C es, por tanto,

$$C = p(xy + 2xz + 2yz) + 2pxy = p(3xy + 2xz + 2yz) \tag{1}$$

El volumen de la caja debe ser de 1500 pies cúbicos. Esto es,

$$xyz = 1500 \tag{2}$$

Note que hemos de minimizar la función de la ecuación (1) sujeta a la condición de la ecuación (2). Resolvemos este problema usando la restricción de la ecuación (2) con el propósito de eliminar una de las variables. A partir de la ecuación (2), $z = 1500/xy$, y sustituyendo esta expresión de z en la ecuación (1), obtenemos

$$C = p\left(3xy + \frac{3000}{x} + \frac{3000}{y}\right)$$

Ahora C es una función de dos variables que son independientes y podemos encontrar su mínimo en la forma ordinaria. En el caso de un máximo o un mínimo,

$$C_x = p\left(3y - \frac{3000}{x^2}\right) = 0 \quad \text{o bien} \quad x^2y = 1000$$

$$C_y = p\left(3y - \frac{3000}{y^2}\right) = 0 \quad \text{o bien} \quad xy^2 = 1000$$

Por tanto, se sigue que $x^2y = xy^2$. Dividiendo ambos lados entre xy (observe que x y y no pueden ser cero), obtenemos $x = y$.

Sustituyendo $y = x$ en $x^2y = 1000$, obtenemos $x^3 = 1000$ o $x = 10$. En consecuencia, $y = x = 10$.

Es fácil verificar que cuando $x = y = 10$, C_{xx}, C_{yy} y $\Delta = C_{xx}C_{yy} - C_{xy}^2$ son positivas. Por consiguiente, el costo C es mínimo. Cuando $x = 10$ y $y = 10$, la ecuación (2) implica que $z = 15$. Así, para el costo mínimo, las dimensiones del tanque deberán ser de 10 pies por 10 pies por 15 pies.

En el ejemplo 1, eliminamos una de las variables (z en este caso) de la función C valiéndonos de la ecuación restrictiva y, luego, encontramos los puntos críticos de C. Algunas veces ocurre que no podemos resolver la ecuación restrictiva para alguna de las variables, de modo que ninguna de ellas puede eliminarse. Por ejemplo, si la ecuación restrictiva fuese $x^5 - 5x^3y^3 + z^3 + z^5 + 2y^5 + 16 = 0$, no podemos resolver para x y y o z en términos de las otras variables. Por otro lado, aunque fuera posible eliminar una variable empleando la ecuación restrictiva, puede suceder que la función resultante que debe optimizarse sea muy complicada de manejar.

Un método alternativo (que evita tal eliminación) fue desarrollado por el matemático francés J.L. Lagrange (1736-1813) y se conoce como el método de *multiplicadores de Lagrange*. Suponga que nos interesa encontrar el valor extremo de la función $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$. Entonces, construimos una función auxiliar $F(x, y, z, \lambda)$ definida por

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$$

La nueva variable λ (lambda) se denomina **multiplicador de Lagrange**.

De acuerdo con el método de multiplicadores de Lagrange, si $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ es un punto crítico de $F(x, y, z, \lambda)$, entonces, (x_0, y_0, z_0) es un punto crítico de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$, y recíprocamente. Así, con el objetivo de encontrar los puntos críticos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$, podemos en lugar de ello hallar los puntos críticos de la función auxiliar $F(x, y, z, \lambda)$. Éstos están dados por las condiciones

$$\begin{aligned} F_x &= f_x - \lambda g_x = 0 \\ F_y &= f_y - \lambda g_y = 0 \\ F_z &= f_z - \lambda g_z = 0 \\ F_\lambda &= \qquad -g = 0 \end{aligned}$$

☛ **18.** Suponga que deseamos encontrar el valor mínimo de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeto a la restricción $g(x, y) = 2x + 3y - 12 = 0$. Escriba las condiciones de los multiplicadores de Lagrange para el punto crítico y resuélvalas.

La última ecuación no es otra cosa que la ecuación restrictiva dada $g(x, y, z) = 0$. El método de los multiplicadores de Lagrange no indica directamente si $f(x, y, z)$ tendrá un máximo, un mínimo o un punto silla en el punto crítico. En problemas prácticos a menudo nos dejamos llevar por la intuición al decidir si el punto crítico da un máximo o un mínimo. Existe un criterio que puede aplicarse, pero es complicado. ☛ **18**

EJEMPLO 2 Resolvamos el ejemplo 1 de nuevo, esta vez por el método de multiplicadores de Lagrange. Teníamos la función

$$f(x, y, z) = C = p(3xy + 2yz + 2zx)$$

y la restricción $xyz = 1500$. Esta restricción puede escribirse en la forma

$$g(x, y, z) = xyz - 1500 = 0$$

La función auxiliar en este caso es

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda) &= f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) \\ &= p(3xy + 2yz + 2zx) - \lambda(xyz - 1500) \end{aligned}$$

Los puntos críticos de F están determinados por las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} F_x &= p(3y + 2z) - \lambda yz = 0 \\ F_y &= p(3x + 2z) - \lambda xz = 0 \\ F_z &= p(2x + 2y) - \lambda xy = 0 \end{aligned}$$

Respuesta $2x - \lambda \cdot 2 = 0$, $2y - \lambda \cdot 3 = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$. La solución es $x = \frac{24}{13}$, $y = \frac{36}{13}$

y también

$$F_\lambda = -xyz + 1500 = 0$$

De las primeras tres ecuaciones, tenemos

$$\frac{\lambda}{p} = \frac{3y + 2z}{yz} = \frac{3}{z} + \frac{2}{y}$$

$$\frac{\lambda}{p} = \frac{3x + 2z}{xz} = \frac{3}{z} + \frac{2}{x}$$

$$\frac{\lambda}{p} = \frac{2x + 2y}{xy} = \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$$

Del primero y segundo valores de λ/p, resulta

$$\frac{3}{z} + \frac{2}{y} = \frac{3}{z} + \frac{2}{x} \qquad \text{o bien,} \qquad \frac{2}{y} = \frac{2}{x}$$

de lo cual se sigue que $x = y$. Del segundo y tercero valores de λ/p,

$$\frac{3}{z} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x} + \frac{2}{y} \qquad \text{o bien,} \qquad \frac{3}{z} = \frac{2}{y}$$

Por tanto, $z = 3y/2$. Sustituyendo $x = y$ y $z = 3y/2$ en la expresión de F_λ, tenemos

$$-y \cdot y \cdot \frac{3}{2}y + 1500 = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad y^3 = 1000$$

En consecuencia, $y = 10$. Por tanto, $x = y = 10$ y $z = \frac{3}{2}y = 15$

El punto crítico de $C(x, y, z)$ sujeto a la restricción $xyz = 1500$ está dado por $x = 10$ $y = 10$ y $x = 15$, como antes. ☛ **19**

☛ **19.** Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar el valor mínimo de $f(x, y) = xy + 2yz + 3zx$ sujeta a la restricción $= xyz - 6000 = 0$

Respuesta
$x = 20$, $y = 30$, $z = 10$, $f_{\text{mín}} = 1800$

EJEMPLO 3 ***(Decisiones sobre inversiones en mano de obra y capital)*** Empleando L unidades de mano de obra y K unidades de capital, una empresa puede elaborar P unidades de su producto, con

$$P(L, K) = 50L^{2/3}K^{1/3}$$

Le cuesta a la empresa \$100 por cada unidad de mano de obra y \$300 por cada unidad de capital empleado. La empresa dispone de una suma de \$45,000 para propósitos de producción.

a) Mediante el método de multiplicadores de Lagrange determine las unidades de mano de obra y de capital que la empresa debería utilizar con el objetivo de maximizar su producción.

b) Demuestre que en este nivel máximo de producción la razón de los costos marginales de mano de obra y capital es igual a la razón de sus costos unitarios.

c) Pruebe que si se dispone de \$1 adicionales para fines de producción en este nivel máximo de producción, la empresa puede producir aproximadamente λ unidades extra de su producto, en donde λ es el multiplicador de Lagrange. En otras palabras, λ puede interpretarse como la *productividad marginal del capital*.

Solución

a) Aquí la función a maximizar es

$$P(L, K) = 50L^{2/3}K^{1/3}$$

El costo de emplear L unidades de mano de obra a \$100 cada una y K unidades de capital a \$300 cada una es de $(100L + 300K)$ dólares. Puesto que deseamos disponer por completo de la suma de \$45,000, debemos tener que

$$100L + 300K = 45{,}000$$

Maximizaremos $P(L, K)$ sujeta a esta restricción.

La función auxiliar es

$$F(L, K, \lambda) = 50L^{2/3}K^{1/3} - \lambda(100L + 300K - 45{,}000)$$

Para de obtener un máximo de $P(L, K)$, debe tenerse que

$$F_L = \tfrac{100}{3}L^{-1/3}K^{1/3} - 100\lambda = 0 \tag{3}$$

$$F_K = \tfrac{50}{3}L^{2/3}K^{-2/3} - 300\lambda = 0 \tag{4}$$

$$F_\lambda = -(100L + 300K - 45{,}000) = 0$$

Resolviendo las primeras dos ecuaciones para λ,

$$\lambda = \tfrac{1}{3}L^{-1/3}K^{1/3} \qquad \text{y} \qquad \lambda = \tfrac{1}{18}L^{2/3}K^{-2/3} \tag{5}$$

Ahora igualamos los dos valores de λ.

$$\tfrac{1}{3}L^{-1/3}K^{1/3} = \tfrac{1}{18}L^{2/3}K^{-2/3}$$

Multiplicando ambos lados por $L^{1/3}K^{2/3}$, obtenemos

$$\tfrac{1}{3}K = \tfrac{1}{18}L \qquad \text{o bien,} \qquad L = 6K$$

Sustituyendo esto en la expresión de F_λ resulta que

$$600K + 300K - 45{,}000 = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad K = 50$$

Por consiguiente, $L = 6K = 300$ y la empresa maximiza su producción si emplea 300 unidades de mano de obra y 50 de capital.

b) Las productividades marginales de la mano de obra y del capital están dadas por

$$P_L = \tfrac{100}{3}L^{-1/3}K^{1/3}, \qquad P_K = \tfrac{50}{3}L^{2/3}K^{-2/3}$$

En el nivel máximo de producción, de las ecuaciones (3) y (4) tenemos

$$P_L = 100\lambda \qquad \text{y} \qquad P_K = 300\lambda \tag{6}$$

Por tanto,

$$\frac{\text{Productividad marginal de la mano de obra}}{\text{Productividad marginal del capital}} = \frac{P_L}{P_K} = \frac{100\lambda}{300\lambda} = \frac{1}{3}$$

Pero,

$$\frac{\text{Costo unitario de la mano de obra}}{\text{Costo unitario del capital}} = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$$

Así que en el nivel de producción máximo, la razón de las productividades marginales de mano de obra y capital es igual a la razón de las unidades de costo de la mano de obra y de capital.

c) En el nivel de producción máximo, cuando $L = 300$ y $K = 50$, tenemos dos formas de calcular λ (de las ecuaciones (5)):

$$\lambda = \tfrac{1}{3}(300)^{-1/3}(50)^{1/3} = 0.1835$$
$$\lambda = \tfrac{1}{18}(300)^{2/3}(50)^{-2/3} = 0.1835$$

Suponga que podemos emplear ΔL unidades de mano de obra y ΔK unidades de capital con \$1 extra de disponibilidad. Entonces,

$$100\Delta L + 300\Delta K = 1 \tag{7}$$

El aumento en la producción cuando la mano de obra se incrementa de 300 a $300 + \Delta L$ y el capital se incrementa de 50 a $50 + \Delta K$ está dado por

$$\begin{aligned}\Delta P &= P(300 + \Delta L, 50 + \Delta K) - P(300, 50)\\ &\approx P_L(300, 50) \cdot \Delta L + P_K(300, 50) \cdot \Delta K\end{aligned}$$

Por la ecuación (6) se sigue que en el máximo $P_L(300, 50) = 100\lambda$ y $P_K(300, 50) = 300\lambda$. En consecuencia, el incremento en la producción es aproximadamente igual a

$$\Delta P \approx 100\lambda\, \Delta L + 300\lambda\, \Delta K = \lambda(100\, \Delta L + 300\, \Delta K) = \lambda$$

en donde usamos la ecuación (7). Así que un dólar extra disponible para producción incrementará ésta por una cantidad aproximada $\lambda = 0.1835$ unidades. En otras palabras, λ representa la productividad marginal del dinero.

EJEMPLO 4 ***(Decisiones de producción)*** Una compañía puede destinar su planta a la elaboración de dos tipos de productos, A y B. Obtiene una utilidad de \$4 por unidad de A y de \$6 por unidad de B. Los números de unidades de los dos tipos que puede producir mediante la planta están restringidos por la ecuación de transformación del producto, que es

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$$

con x y y los números de unidades (en miles) de A y B, respectivamente, producidas por semana. Halle las cantidades de cada tipo que deben producirse a fin de maximizar la utilidad.

Solución Deseamos maximizar la utilidad P, que está dada por

$$P(x, y) = 4x + 6y$$

(en miles de dólares por semana). Aquí x y y están sujetas a las restricciones

$$g(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0 \tag{8}$$

☛ **20.** Vuelva a resolver el ejemplo 4, si la ecuación de transformación del producto es $x^2 - 2y^2 + x + y = \frac{7}{4}$

Empleando el método de los multiplicadores de Lagrange, construimos la función

$$F(x, y, \lambda) = P(x, y) - \lambda g(x, y)$$

Así, los puntos críticos están dados por

$$F_x = P_x - \lambda g_x = 4 - \lambda(2x + 2) = 0$$
$$F_y = P_y - \lambda g_y = 6 - \lambda(2y + 4) = 0$$
$$F_\lambda = -g = 0$$

Esta expresión de F_λ es igual que la ecuación restrictiva dada. A partir de las ecuaciones para F_x y F_y,

$$\lambda = \frac{2}{x + 1} = \frac{3}{y + 2}$$

Por consiguiente, $2(y + 2) = 3(x + 1)$ o $y = (3x - 1)/2$. Sustituyendo esto en la ecuación (8), obtenemos una ecuación sólo en términos de x.

$$x^2 + \left(\frac{3x - 1}{2}\right)^2 + 2x + 4\left(\frac{3x - 1}{2}\right) - 4 = 0$$

Después de simplificar, esto se reduce a $13x^2 + 26x - 23 = 0$. A partir de la fórmula cuadrática, encontramos las raíces

$$x = -1 \pm \frac{6\sqrt{13}}{13} \approx 0.664 \quad \text{o bien,} \quad -2.664$$

Por supuesto, sólo la raíz positiva $x = 0.664$ tiene sentido. Con este valor de x, tenemos

$$y = \frac{3x - 1}{2} = \frac{3(0.664) - 1}{2} = 0.496$$

Así que los niveles de producción óptimos son de 664 unidades por lo que respecta a A y de 496 unidades en el caso de B por semana. La utilidad máxima es

$$P = 4(0.664) + 6(0.496) = 5.63$$

esto es, \$5630 por semana. ☛ **20**

El método de multiplicadores de Lagrange también puede utilizarse cuando hay más de una restricción. Si $f(x, y, z)$ ha de maximizarse o minimizarse sujeta a las dos restricciones $g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$, entonces, construimos la función auxiliar F de la siguiente manera:

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) - \lambda_1 g_1(x, y, z) - \lambda_2 g_2(x, y, z)$$

Luego, los puntos críticos se obtienen resolviendo las ecuaciones

$$F_x = F_y = F_z = F_{\lambda_1} = F_{\lambda_2} = 0$$

Respuesta $x = y = 0.5$

EJERCICIOS 17-5

(1-10) Mediante el método de multiplicadores de Lagrange, determine los puntos críticos de f sujetos a las restricciones dadas.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $2x + 3y = 7$

2. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$; $2x + 3y = 31$

3. $f(x, y) = 3x + 2y$; $x^2 + y^2 = 13$

4. $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$; $xy = \sqrt{6}$

5. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $2x + 3y + 4z = 29$

6. $f(x, y, z) = xyz$; $xy + yz + 2zx = 24$ $(xyz \neq 0)$

7. $f(x, y, z, u) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 4u^2$;
$2x - 3y + 4z + 6u = 73$

8. $f(u, v, w, x) = 3u^2 - v^2 + 2w^2 + x^2$;
$3u + v - 2w + 4x = 20$

9. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2$; $x + 2y - 3z = 5$,
$2x - 3y + 6z = -1$

10. $f(u, v, w) = uv + vw + wu$;
$3u - v + 2w + 13 = 0$, $2u + 3v - w = 0$

11. *(Costos de producción mínimos)* El costo de producir x modelos regulares y y modelos de lujo del producto de una empresa está dado por la función conjunta de costo $C(x, y) = x^2 + 1.5y^2 + 300$. ¿Cuántas unidades de cada tipo deben producirse para minimizar los costos totales, si la empresa decide producir un total de 200 unidades?

12. *(Costos de producción mínimos)* Una empresa puede elaborar su producto en dos de sus plantas. El costo de producir x unidades en su primera planta y y unidades en la segunda planta está dado por la función conjunta de costo $C(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$. Si la empresa tiene una orden de suministrar 500 unidades, ¿cuántas unidades debe producir en cada planta con el objetivo de minimizar el costo total?

13. *(Uso óptimo de capital y mano de obra)* La función de producción de una empresa es $P(L, K) = 80L^{3/4}K^{1/4}$, en donde L y K representan el número de unidades de mano de obra y de capital utilizadas y P es el número de unidades elaboradas del producto. Cada unidad de mano de obra tiene un costo de \$60 y cada unidad de capital cuesta \$200 y la empresa dispone de \$40,000 destinados a producción.

a) Aplicando el método de multiplicadores de Lagrange determine el número de unidades de mano de obra y de capital que la empresa debe emplear para obtener una producción máxima.

b) Demuestre que cuando la mano de obra y el capital están en sus niveles máximos, la razón de sus productividades marginales es igual a la razón de sus costos unitarios.

c) En este nivel máximo de producción, determine el incremento en la producción, si se dispone de \$1 adicionales destinados a producción. Pruebe que es aproximadamente igual al multiplicador de Lagrange.

14. *(Uso óptimo de capital y mano de obra)* Repita el ejercicio 13 en el caso de

$$P(L, K) = 800\sqrt{3L^2 + 1.5K^2}$$

Los costos unitarios de la mano de obra y del capital son de \$250 y \$50 y la empresa dispone de \$6750 para gastar en producción.

15. *(Uso óptimo de capital y de mano de obra)* Repita el ejercicio 13 si

$$P(L, K) = 113L + 15K + 3LK - L^2 - 2K^2$$

y los costos unitarios de la mano de obra y del capital son de \$60 y \$100, respectivamente. La empresa dispone de un presupuesto restringido de \$7200 para producción.

16. *(Uso óptimo de capital y mano de obra)* Repita el ejercicio 13 en el caso de que

$$P(L, K) = 72L + 30K + 5LK - 2L^2 - 3K^2$$

Los costos unitarios de la mano de obra y del capital son de \$80 y \$150, respectivamente. El presupuesto está restringido a \$5640.

17. *(Uso óptimo de capital y mano de obra)* Usando L unidades de mano de obra y K unidades de capital, una empresa puede elaborar P unidades de su producto, en donde $P(L, K) = 60L^{2/3}K^{1/3}$. Los costos de la mano de obra y del capital son de \$64 y \$108 por unidad. Suponga que la empresa decide elaborar 2160 unidades de su producto.

a) Por medio del método de multiplicadores de Lagrange halle el número de insumos de mano de obra y de capital que deben emplearse con el objetivo de minimizar el costo total.

b) Demuestre que en este nivel de producción, la razón de costos marginales de mano de obra y de capital es igual a la razón de sus costos unitarios.

18. *(Uso óptimo de capital y mano de obra)* Repita el ejercicio 17, si

$$P(L, K) = 60\sqrt{5(L^2 + K^2)}$$

y los costos unitarios de mano de obra y capital son de \$200 y \$100, respectivamente. La empresa decide producir 4500 unidades.

19. *(Inversiones)* Una inversión de p dólares en las cuatro inversiones A, B, C y D da como resultado un rendimiento de $\sqrt{p}$, $\sqrt{1.2p}$, $\sqrt{1.3p}$ y $\sqrt{1.5p}$ dólares, respectivamente. Una persona desea invertir \$12,000 en estas cuatro inversiones. ¿Cuánto deberá invertir en cada una de ellas para maximizar el rendimiento anual?

20. *(Publicidad óptima)* Si una empresa gasta x miles de dólares en publicidad en la ciudad A, sus ventas potenciales (en miles de dólares) en tal ciudad están dadas por $300x/(x + 10)$. Si gasta x miles de dólares en la ciudad B, sus ventas potenciales (en miles de dólares) en tal ciudad están dadas por $500x/(x + 13.5)$. Si la utilidad es del 25% de las ventas y la empresa dispone de una restricción del presupuesto de \$16,500 destinados a publicidad en las dos ciudades, ¿cuánto deberá gastar en cada ciudad con el objetivo de maximizar la utilidad neta de la empresa?

21. *(Física)* Se tienen que construir tres esferas con materiales en densidades 1, 2 y 3 gramos por centímetro cúbico, de modo que su peso total sea 10 gramos. Encuentre los radios de las esferas para las cuales la suma de sus tres áreas superficiales sea mínima.

■ 17-6 MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

A lo largo de este libro, hemos presentado fórmulas para conceptos tales como la relación de demanda de un producto particular, el costo de fabricar x cantidad de un artículo, el volumen de ventas como una función del gasto en publicidad, funciones de producción, etc. Al escribir un libro de texto, se está en la afortunada posición de inventar nuestros propios ejemplos de estas funciones. Sin embargo, en situaciones reales, una empresa no puede inventar su propia función de costo, por ejemplo, si en vez de ello debe determinar esta función a partir de observaciones de sus operaciones.

En estas situaciones prácticas, por lo regular no disponemos de una fórmula matemática que exprese la relación en cuestión; lo que tenemos son ciertos datos recabados de mediciones realizadas en el pasado. Algunas veces éstos aparecen en el curso de las operaciones normales de la empresa y en otras ocasiones surgen como resultado de experimentación deliberada. Por ejemplo, con el objetivo de probar la efectividad de la publicidad, una compañía podría realizar pruebas comparativas en varias ciudades, cambiando el gasto en publicidad de una ciudad a otra.

Los datos medidos pueden graficarse como una serie de puntos en una gráfica. Para obtener una aproximación a la gráfica completa de la relación, se bosqueja una curva suave que pase tan cerca como sea posible a estos datos puntuales. Por lo regular, la curva que dibujamos no pasará por cada uno de estos datos puntuales, porque de hacerlo así esto afectaría su suavidad. De hecho, a menudo aproximamos la relación dibujando la gráfica como una línea recta que pase tan cerca como sea posible de los puntos graficados. Consideremos el siguiente ejemplo.

Suponga que la administración de la Compañía Hulera del Pacífico afronta el problema de predecir sus ventas de neumáticos en los años venideros. Por experiencia saben que las ventas de neumáticos se incrementan de acuerdo con el número de automóviles en circulación. La empresa dispone de los datos de la tabla 1 recogidos en el pasado. Si graficamos el número de automóviles en el eje x y las ventas de neumáticos en el eje y, obtenemos el conjunto de puntos que se observa en la figura 16.

Mirando con atención estos puntos, es razonable concluir que la relación entre x y y es casi lineal y, basándonos en esto, podemos trazar la línea recta más cercana al conjunto de puntos. (Véase la figura 17). A pesar de que no todos los puntos

TABLA 1

Número de automóviles (en millones)	18	18.3	18.9	19.4	19.8	20.3
Venta de neumáticos (en miles)	40	44	52	59	67	77

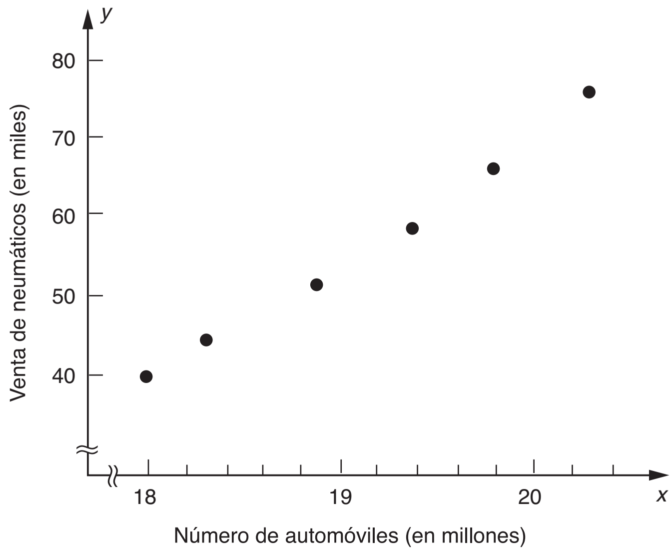


FIGURA 16

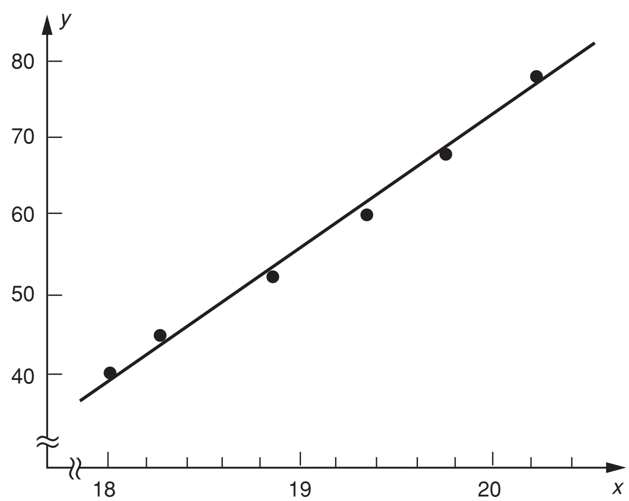


FIGURA 17

caigan sobre la línea recta, la línea aproxima los datos observados bastante bien. Esta línea puede utilizarse con el objetivo de predecir ventas futuras de neumáticos, si la administración de la empresa dispone de alguna estimación del número de automóviles que circularán en años futuros.

Dibujar una línea a ojo no es objetivo, en el sentido de que es posible trazar otra línea que parezca ajustarse al conjunto de puntos o que sea mucho mejor que la dibujada. Lo que se necesita es algún criterio objetivo para decidir sobre la línea recta particular que se ajuste mejor a los puntos observados. Tal criterio lo proporciona el **método de mínimos cuadrados**.

Supongamos que hay n datos observados que se grafican como una sucesión de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ en el plano xy. Buscaremos la línea recta que, en cierto sentido, está más cerca a estos puntos.

Sea la ecuación de la línea recta que mejor se ajusta a los n puntos dados

$$y = ax + b \tag{1}$$

con a y b constantes. Nuestro propósito es determinar a y b, los cuales ajustarán la línea recta. Cuando $x = x_i$, el valor observado de y es y_i; sin embargo, el valor ''correcto'' es $ax_i + b$, obtenido reemplazando $x = x_i$ en la ecuación (1).

El **error** en el valor y_i es igual a la diferencia $y_i - (ax_i + b)$ entre el valor observado y el valor teórico de y. (Véase la figura 18). El **error cuadrado** se define por $(y_i - ax_i - b)^2$. Entonces, el **error cuadrado medio**, E, se define como el promedio de todos los errores cuadrados. Esto es,

$$E = \frac{1}{n}\left[(y_1 - ax_1 - b)^2 + (y_2 - ax_2 - b)^2 + \cdots + (y_n - ax_n - b)^2\right]$$

Así que al calcular E, determinamos el error cuadrado de cada punto individual, sumamos éstos para los n puntos y luego dividimos entre n.

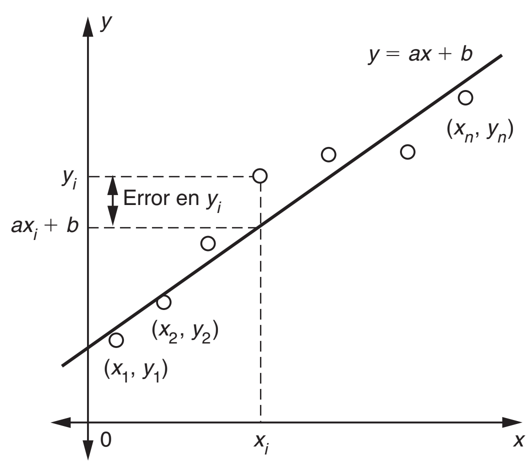


FIGURA 18

Por supuesto, no podemos calcular E todavía, dado que no conocemos los valores de las constantes a y b. De acuerdo con el método de mínimos cuadrados, lo que debemos hacer es elegir a y b de tal manera que se miniminice E. Condiciones necesarias para esto son que las dos derivadas parciales $\partial E/\partial a$ y $\partial E/\partial b$ sean cero.

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{n}[(y_1 - ax_1 - b)^2 + \cdots + (y_n - ax_n - b)^2]\\ &= \frac{1}{n}[2(y_1 - ax_1 - b)(-x_1) + \cdots + 2(y_n - ax_n - b)(-x_n)]\\ &= \frac{2}{n}[(-x_1y_1 + ax_1^2 + bx_1) + \cdots + (-x_ny_n + ax_n^2 + bx_n)]\\ &= \frac{2}{n}[a(x_1^2 + ax_2^2 + \cdots + x_n^2) + b(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\\ &\quad -(x_1y_1 + z_2y_2 + \cdots + x_ny_n)]\end{aligned}$$

y asimismo

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b}\frac{1}{n}[(y_1 - ax_1 - b)^2 + \cdots + (y_n - ax_n - b)^2]\\ &= \frac{1}{n}[2(y_1 - ax_1 - b)(-1) + \cdots + 2(y_n - ax_n - b)(-1)]\\ &= \frac{2}{n}[a(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + nb - (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)]\end{aligned}$$

Por consiguiente, igualando estas dos derivadas a cero, obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned}&a(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + b(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\\ &\qquad\qquad = (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)\\ &a(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + nb = (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)\end{aligned}}$$

Estas ecuaciones forman un par de ecuaciones lineales simultáneas con incógnitas a y b y pueden resolverse en la forma ordinaria. Una vez que se han calculado a y b, la mejor línea recta a través de los datos puntuales dados tiene la ecuación $y = ax + b$.

Determinemos la ecuación de la mejor línea recta a través de los datos puntuales de la Compañía Hulera del Pacífico. Si x denota el número de automóviles (en millones) en circulación y y el número de ventas de neumáticos (en miles) de la compañía, entonces, tenemos los datos dados en la tabla 2.

Cuando usamos el método de mínimos cuadrados, conviene elaborar una tabla como la que se ilustra en la tabla 3. En las cuatro columnas de la tabla, se listan los valores de x_i, y_i, x_i^2 y x_iy_i para cada punto. Luego, se suman las columnas. En este caso, tenemos

☛ **21.** Determine la ecuación para a y b para los siguientes tres pares de datos y de aquí determine la recta que mejor ajuste estos datos.

x	1	2	3
y	5	4	2

TABLA 2

x	18.0	18.3	18.9	19.4	19.8	20.3
y	40	44	52	59	67	77

TABLA 3

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
18.0	40	324.00	720.0
18.3	44	334.89	805.2
18.9	52	357.21	982.8
19.4	59	376.36	1144.6
19.8	67	392.04	1326.6
20.3	77	412.09	1563.1
114.7	339	2196.59	6542.3

en este caso,

$$x_1 + x_2 + \cdots = 114.7$$
$$y_1 + y_2 + \cdots = 339$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots = 2196.59$$
$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots = 6542.3.$$

Además, tenemos 6 datos puntuales y así $n = 6$. Las constantes a y b están dadas por

$$a(x_1^2 + x_2^2 + \cdots) + b(x_1 + x_2 + \cdots) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots$$
$$a(x_1 + x_2 + \cdots) + nb = y_1 + y_2 + \cdots$$

Esto es,

$$2196.59a + 114.7b = 6542.3$$
$$114.7a + \quad 6b = 339$$

Resolviendo estas dos ecuaciones, obtenemos

$$a = 15.8 \quad \text{y} \quad b = -246$$

Así que la mejor línea recta a través de los datos puntuales dados tiene la siguiente ecuación:

$$y = 15.8x - 246$$ ☛ **21**

Como un ejemplo de la manera en que este resultado puede utilizarse, supongamos que el gobierno predice que el número de automóviles en circulación el año próximo será de 22.3 millones. Entonces la Compañía Hulera del Pacífico puede estimar que sus ventas de neumáticos serán (en miles)

Respuesta $14a + 6b = 19$, $6a + 3b = 11$, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{20}{3}$

☛ **22.** Si estudió la sección 7.5, reescriba las ecuaciones para a y b utilizando la notación sigma.

$$(15.8)(22.3) - 246 = 106$$

Sin mucha dificultad puede demostrarse que $\partial^2E/\partial a^2 > 0$, $\partial^2E/\partial b^2 > 0$, y (con ligeramente más dificultad) que

$$\Delta = \frac{\partial^2 E}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial a\, \partial b}\right)^2 > 0$$

de modo que los valores de a y b encontrados haciendo $\partial E/\partial a = \partial E/\partial b = 0$ en realidad corresponden a un mínimo de E.

Vale la pena mencionar que el método de mínimos cuadrados no se limita a ajustar mejores líneas rectas, sino que puede extenderse a muchos tipos de curvas. Por ejemplo, se utiliza a menudo en el ajuste de una función polinomial a un conjunto de datos puntuales. (Como ilustración véase el ejercicio 33 de los problemas de repaso). ☛ **22**

Respuesta

$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$,

$a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$

EJERCICIOS 17-6

(1-4) Mediante el método de mínimos cuadrados determine la mejor línea recta a través de los siguientes conjuntos de datos.

1.

x	2	3	5	6	9	12
y	3	4	6	5	7	8

2.

x	3	4	5	6	7	8
y	0.7	1.9	2.1	2.5	3.4	4.5

3.

x	0	1	2	3
y	1	1.5	2.5	3

4.

x	2	3	4	5	6
y	2	4	3.5	5	6.5

5. (*Crecimiento de ventas*) Una tienda por departamentos advierte que la tendencia de las ventas de una nueva rasuradora eléctrica es como se da en la tabla 4. Halle la ecuación de la línea recta que mejor se ajuste a los datos.

TABLA 4

Semana número (x)	1	2	3	4	5	6
Unidades vendidas (y)	20	24	28	33	35	39

6. (*Utilidades y publicidad*) Una empresa descubre que sus utilidades netas se incrementan al aumentar la cantidad gastada en la publicidad del producto. La empresa dispone de los registros dados en la tabla 5.

TABLA 5

Gasto en publicidad (x) (miles de dólares)	10	11	12.3	13.5	15
Utilidades netas (y) (miles de dólares)	50	63	68	73	75

a) Determine la ecuación de la línea recta que mejor se ajuste a los datos.

b) Estime el dinero que debería gastarse en publicidad para obtener una utilidad neta de $80,000.

7. (*Curva de demanda*) Una empresa trata de determinar la curva de demanda de su producto. Vende el producto en varias ciudades a diferentes precios y determina el volumen de ventas. Después de un mes, se obtienen los datos mostrados en la tabla 6.

a) Determine la línea que mejor ajusta los datos.

TABLA 6

Precio (p) (dólares)	2	2.25	2.50	2.75	2.90
Volumen de ventas (x)	300	290	270	230	200

b) Mediante la curva de demanda de la parte *a*) determine el volumen de ventas si el precio es de $3.

c) Utilizando el resultado de la parte *a*) determine el precio que maximiza el ingreso mensual.

8. *(Utilidad y nivel de producción)* El nivel de producción y las utilidades de cierta empresa en años recientes aparecen en la tabla 7.

TABLA 7

Producción (x) (miles de unidades)	40	47	55	70	90	100
Utilidades (y) (miles de dólares)	32	34	43	54	72	85

a) Determine la ecuación de la recta que mejor ajusta los datos.

b) Estime las utilidades cuando el nivel de producción se incremento a 120 mil unidades.

9. *(Ventas y comerciales por TV)* Una empresa de mercadotecnia desea determinar el efecto de los comerciales por televisión en las ventas de cierto producto. La empresa se retroalimenta de 6 grandes ciudades como se aprecia en la tabla 8. Halle la ecuación de la recta que mejor ajusta los datos. Estime el volumen de ventas que resultaría de 24 comerciales.

10. *(Volumen de ventas y comisiones)* Las comisiones de ventas pagadas y el volumen de ventas en 7 surcursales de una gran cadena de tiendas en años recientes fueron como se aprecia en la tabla 9. Determine la ecuación de la recta que mejor se ajuste a los datos.

11. *(Crecimiento del PNB)* Promedios sobre cuatrienios del producto nacional bruto (PNB) de cierto país, se dan en miles de millones de dólares en la tabla 10. Determine la ecuación de la recta que mejor se ajusta a los datos. Estime el PNB para 1980.

TABLA 10

Año (x)	1956	1960	1964	1968	1972	1976
PNB (y)	453	562	691	862	1054	1310

12. *(Agricultura)* La producción promedio y en bushels de maíz por acre en Estados Unidos varía de un año a otro. En la tabla 11 se dan los valores correspondientes al periodo 1960-1971, en los cuales t denota la fecha empezando con $t = 0$ en 1960 e incrementándose hasta $t = 11$ en 1971. De-

TABLA 8

Ciudad	***A***	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***
Número de comerciales (x)	10	12	15	20	18	21
Ventas (y) (cientos)	40	45	56	68	67	70

TABLA 9

Tienda	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Comisiones (x) (miles de dólares)	37.2	45.3	80.5	56.4	67.2	74.6	62.7
Ventas (y) (cientos de miles de dólares)	4.3	5.1	7.9	5.4	7.1	7.2	6.5

TABLA 11

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	54	63	65	67	70	73	72	80	79	87	83	88

muestre que durante este periodo, una ecuación lineal de la forma $y = at + b$ ajusta estos datos bastante bien y determine los valores de a y b.

13. *(Epidemia)* Durante el periodo de propagación de cierto brote de cólera, el número de casos nuevos (y) en días sucesivos se dan en la siguiente tabla (x denota el día en cuestión). Encuentre la mejor línea recta que pasa por estos puntos y úsela para predecir cuantos casos nuevos brotarán en los días 6 y 7. (Este método de predicción se llama *extrapolación lineal*).

TABLA 12

x	1	2	3	4	5
y	6	7	10	12	15

14. *(Entomología)* Cierta especie de insectos está extendiendo su hábitat gradualmente en la dirección norte. La siguiente tabla da la latitud y más al norte en la cual se ha encontrado al insecto durante el año x.

TABLA 13

x	1955	1960	1965	1970	1975
y	30°N	35°N	38°N	42°N	45°N

Encuentre la mejor línea recta que pasa por estos puntos y úsela para predecir cuándo el insecto llegará a la latitud 49°N.

15. *(Química-física)* La cantidad máxima y de cierta sustancia que se disolverá en 1 litro de agua depende de la temperatura T. Se obtienen los siguientes resultados experimentales. Determine la recta que ajuste mejor a estos datos.

TABLA 14

T (°C):	10	20	30	40	50	60
y (gramos)	120	132	142	155	169	179

REPASO DEL CAPÍTULO 17

Términos, símbolos y conceptos importantes

17.1 Funciones de dos (o más) variables, dominio, rango.
Coordenadas en tres dimensiones; ejes x, y y z
Gráfica de una función $z = f(x, y)$
Línea de contorno (curva de nivel). Sección vertical.

17.2 Derivadas parciales; $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$

Derivadas parciales de segundo orden;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

Notación: z_{xx}, z_{yy}, z_{xy} o

$$f_{xx}(x, y), \quad f_{yy}(x, y), \quad f_{xy}(x, y)$$

17.3 Función de producción, factores de insumo de producción.
Productividad marginal de capital y de mano de obra.
Productos competitivos y complementarios.
Elasticidad cruzada de la demanda.

17.4 Máximo local y mínimo local para un función de dos variables.
Punto silla. Prueba de la Δ

17.5 Restricción. Multiplicadores de Lagrange.
Productividad marginal del capital.

17.6 Método de mínimos cuadrados. Error cuadrático medio.

Fórmulas

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad [\, = f_x(x, y)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad [= f_y(x, y)]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\, \Delta x + f_y(x_0, y_0)\, \Delta y$$

Punto crítico cuando f es diferenciable:

$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0$

Prueba de la Δ: $\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$

Si $f_{xx} < 0$, $f_{yy} < 0$ y $\Delta > 0$, el punto crítico es un máximo local
Si $f_{xx} > 0$, $f_{yy} > 0$ y $\Delta > 0$, el punto crítico es un mínimo local
Si $\Delta < 0$, el punto crítico es un punto silla

Método de mínimos cuadrados: $y = ax + b$

$$a(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + b(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)$$

$$a(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + nb = (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 17

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) En tres dimensiones, la coordenada y es cero en el eje y.

b) En tres dimensiones, $x = 0$ y $y = 0$ en el plano xy.

c) El rango de una función $z = f(x, y)$ son lo valores de z para los cuales f es un número real.

d) El dominio de la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ es el conjunto de todos los números reales.

e) Las curvas de nivel de la función $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2$ son elipses.

f) Si $h(x, y) = f(x) + g(y)$, entonces $\dfrac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x \partial y} = 0$

g) Si $h(x, y) = f(x) + g(y)$, entonces $\dfrac{\partial^2 h(x, y)}{\partial^2 y} = 0$

h) Si $z = g(x, y)$ y $\partial z/\partial y = 0$, entonces, z es independiente de y y se puede escribir $z = h(x)$, una función que sólo depende de x.

i) Si todas las derivadas parciales de $f(x, y)$ existen, entonces,

$$\frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial y^2 \partial x^2}$$

j) Si $f(x, y)$ es diferenciable en el punto (a, b) y tiene un mínimo local en este punto, entonces, $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.

k) Si (a, b) es un punto crítico de $f(x, y)$ y f_{xx}, f_{yy} son positivas en (a, b), entonces, en (a, b) se alcanza un mínimo local de $f(x, y)$.

l) $\dfrac{\partial}{\partial x} (x^3y^2 + \ln(y)) = 3x^2y^2$

m) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} (10xy^2 + \ln(y)) = 0$

n) La recta obtenida por el método de mínimos cuadrados debe pasar por, al menos, dos de estos puntos.

o) Si se tienen dos puntos de datos, entonces, la recta obtenida por el método de mínimos cuadrados pasa por ambos puntos.

p) Un punto silla de $f(x, y)$, es un punto crítico tal que $\Delta(x, y) < 0$

q) Los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$, sujeta a los puntos en la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ pueden obtenerse encontrando los puntos críticos de la función

$$F(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)$$

(2-5) Determine el dominio de cada una de las siguientes funciones.

2. $z = \sqrt{x^2 + 4y^2 + 2}$

***3.** $z = \dfrac{\sqrt{x^2 - y}}{(x - 2)^2 + y^2}$

4. $z = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{y - x}}$

5. $w = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

(6-9) Evalúe $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$, $\partial^2 z/\partial x \partial y$ y $\partial^2 z/\partial x^2$ para las siguientes funciones.

6. $z = x^2 - y^2$

7. $z = e^{-xy}$

8. $z = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$

9. $\ln(x^2 + y^4)$

10. Demuestre que si $v = f(x - y, y - z, z - x)$, entonces

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

11. *(Costo de una lata)* En el problema 27 de la sección 17.1, se determinó que el costo de una lata cilíndrica de radio r y altura h tiene un costo $C(r, h) = 4\pi r(r + h)$, si el material con que se produce tiene un costo de \$2 por unidad de área. ¿Qué interpretación tiene la curva de nivel $C(r, h) = 100$, para r y h positivos?

12. *(Demandas marginales)* Suponga que las funciones de demanda para los dos productos A y B son

$$x_A = 30 - pA + 5p_B;\ x_B = 40 + 3p_A - 6p_B$$

Determine las cuatro funciones de demanda marginal e investigue si los productos A y B son competitivos o complementarios.

13. *(Elasticidad)* La demanda x_a de un producto A está dada por

$$x_A = 50\sqrt{p_A p_B}$$

en donde p_A es el precio por unidad de A y p_B es el precio por unidad del producto relacionado B.

a) Demuestre que $p_A \dfrac{\partial x_A}{\partial p_A} + p_B \dfrac{\partial x_A}{\partial p_B} = x_A$

b) Calcule las elasticidades de la demanda η_{pA} y η_{pB} y evalúe su suma.

14. *(Utilidades marginales)* La utilidad por acre de cierto cultivo de hortaliza se determina que está dada por

$$P = 30L + 6S + 25F - 2L^2 - 2S^2 - F^2 - 3SF$$

en donde L es el costo de la mano de obra, S es el costo de la siembra y F es el costo de fertilizantes. Determine $\partial P/\partial L$, $\partial P/\partial S$ y $\partial P/\partial F$. Evalúe cada una cuando $L = 5$, $S = 1$ y $F = 1$.

15. *(Costos marginales)* Un monopolista determina que las funciones de demanda de sus dos productos A y B dadas por

$$x_A = 3 - p_A + 0.2p_B,\ \ x_B = 5 + 0.3p_A - 2p_B$$

La función conjunta de costo está dada por

$$C = x^2_A + x^2_B - x_A x_B$$

Calcule $\partial C/\partial p_A$ y $\partial C/\partial p_B$. ¿Cuál es el significado de estas derivadas?

(16-20) Determine los máximos y mínimos locales de las siguientes funciones.

16. $f(x, y) = 10 + 3xy + 6y - 2x^2 - 4y^2$

17. $g(u, v) = u^2 -{}^2\, u + \dfrac{v^2}{4} + 10$

18. $h(s, t) = st + \dfrac{2}{s} + \dfrac{4}{t} - 20$

19. $F(u, v) = 2u^4 - u^2 + 3v^2 + 11$

20. $G(s, t) = \dfrac{t}{s} - 2s^2 + \dfrac{8}{3}t^3$

21. *(Fisiología)* Cuando hay viento, en un día frío, una persona puede sentir más frío que cuando el viento está en calma; esto se debe a que la razón de la pérdida del calor es una función de la temperatura y de la velocidad del viento. La ecuación

$$H = (10.45 + 10\sqrt{w} - w)(33 - t)$$

modela la razón de pérdida de calor H (en kilocalorías por metro cuadrado por hora) cuando la temperatura del aire es t (en grados centígrados) y la velocidad del viento es w (en metros por segundo).

a) Evaluar H cuando $t = 0$ y $w = 5$

b) Calcular $\partial H/\partial w$ y $\partial H/\partial t$ para $t = 0$ y $w = 5$

c) Interprete el resultado de la parte anterior

d) Cuando $t = 0$ y $w = 5$, ¿qué tiene más influencia en H: un cambio de 1 m/s en la velocidad del viento o 1°C en la temperatura?

22. *(Uso óptimo de mano de obra y publicidad)* Las utilidades anuales (en dólares) de una empresa prestadora de servicios están dadas por

$$P(x, y) = 200x + 300y + 2xy - x^2 - 2y^2 - 5000$$

donde x es el número de trabajadores y y el número de veces que la empresa se promociona.

a) Determine los valores de x y y que maximizan las utilidades anuales de la empresa. ¿Cuáles son las utilidades anuales máximas?

b) Los trabajadores reciben un salario de \$15,000 anuales y el costo de publicidad es de \$1,000 por cada anuncio. El capital que se trabaja es tal que un gasto de \$400,000 se realiza en mano de obra y publicidad. Determine los valores de x y y que generan la utilidad máxima.

***23.** *(Uso óptimo de mano de obra y capital)* Por medio de L unidades de mano de obra y K unidades de capital, una empresa puede elaborar $P(L, K)$ unidades de su producto. Los costos unitarios de mano de obra y de capital son p y q dólares, respectivamente. La empresa tiene una restricción en el presupuesto de C dólares.

a) Usando el método de multiplicadores de Lagrange, demuestre que en el nivel de producción máximo, la razón de las productividades marginales de mano de obra y de capital es igual a la razón de sus costos unitarios.

b) Compruebe que la empresa puede elaborar λ unidades extra de su producto, si se dispone de \$1 extra en este nivel de producción máximo, en donde λ es el multiplicador de Lagrange.

***24.** *(Uso óptimo de mano de obra y capital)* Cuando se emplean L unidades de mano de obra y K unidades de capital, la producción de una empresa está dada por $P(L, K)$. El costo unitario de la mano de obra y del capital son de a y b dólares, respectivamente. Suponga que la empresa decide elaborar P_0 unidades de su producto, la combinación de mano de obra y capital abate el costo de estas unidades a un mínimo. Pruebe que la razón de las productividades marginales de mano de obra y capital es igual a la razón de sus costos unitarios.

25. *(Uso óptimo de materias primas)* Una empresa emplea dos tipos de materias primas, A y B, en la elaboración de su producto. Usando x unidades de A y y unidades de B, la empresa puede elaborar T unidades de su producto, en donde

$$T(x, y) = 80x + 300y + 2xy - 3x^2 - 4y^2$$

a) ¿Cuántas unidades de cada materia prima deberá utilizar la empresa para maximizar su producción? ¿Cuál es la producción máxima?

b) Si a la empresa le cuesta \$9 cada unidad de materia prima A y \$12 cada unidad de materia prima B y la empresa puede vender todo lo que produce en \$15 por unidad, ¿qué cantidades de A y B maximizarían las utilidades de la empresa?

26. *(Uso óptimo de capital y mano de obra)* Si se emplean L unidades de mano de obra y K unidades de capital, una empresa puede elaborar P unidades de su producto, en donde

$$P(L, K) = 60L^{2/3}K^{1/3}$$

Los costos de la mano de obra y del capital son de \$50 y \$90 por unidad. Suponga que la empresa decide elaborar 2000 unidades de su producto. Por medio del método de multiplicadores de Lagrange determine el número de insumos de mano de obra y de capital que deben emplearse con el objetivo de minimizar el costo total.

27. *(Producción máxima)* Si se utilizan L unidades de mano de obra y K unidades de capital, la producción semanal total de una empresa está dada por $P(L, K) = 18K + 24L + 2KL - 4K^2 - L^2$.

Determine el número de unidades de mano de obra y de capital que la empresa debe utilizar con el objetivo de maximizar su producción.

28. *(Medicina)* En el tratamiento de cierta enfermedad se utilizan de forma simultánea dos medicamentos. La reacción R medida en las unidades adecuadas para x unidades del primer medicamento y y unidades del segundo es

$$R(x, y) = 30 + 2x + 6y - x^2 - 2y^2$$

Determine los valores de x y y que hacen máxima la reacción, R.

***29.** *(Difusión)* El modelo de ecuación del ejercicio 48 de la sección 17-2 para la difusión de una sustancia a través del torrente sanguíneo no toma en cuenta el arrastre debido al movimiento de la sangre. Una ecuación más adecuada para ello es

$$C(x, t) = \frac{c}{\sqrt{t}} e^{-(x - vt)2/at}$$

donde v es la velocidad de la sangre. Muestre que para esta ecuación se cumple

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{a}{4}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v\frac{\partial C}{\partial x}$$

(*Nota:* Este ejercicio tiene una mayor grado de dificultad que los anteriores).

30. *(Zoología)* En un experimento se midió la longitud L de cierto tipo de insecto, para varios insectos de diferentes edades. Los resultados se dan en la tabla 15, L está en centímetros y la edad E en días. Muestre que los datos coinciden aproximadamente con la relación lineal $L = mE + b$, y determine las constantes m y b.

TABLA 15

E	20	25	30	33	38	40	42	46	53	58	60
L	0.90	1.00	1.20	1.16	1.25	1.32	1.36	1.38	1.54	1.67	1.72

31. *(Población)* De acuerdo con la Oficina de Censos de Estados Unidos, el total de miles de millones de dólares que importó Estados Unidos de México para cada año de 1996 a 2002 se proporciona en la tabla 16. Determine la recta que mejor ajuste los datos dados. Utilícela para estimar el monto de las importaciones para el año 2003. Compare su resultado con el valor proporcionado por la misma fuente. Haga $x = 0$ para 1996, $x = 1$ para 1997, etcétera.

TABLA 16

Año	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Monto imp. (y)	74.3	85.9	94.6	109.7	135.9	131.3	134.6

32. *(Mano de obra)* En la tabla 17 se muestra como el porcentaje de mujeres en la mano de obra, en Estados Unidos, ha cambiado desde 1955 a 1995. Determine la recta de mínimos cuadrados y utilice ésta para estimar el porcentaje en 1996; compare su resultado con el valor real que fue de 50.3%. Haga $x = 0$ para 1955, $x = 5$ para 1960, etcétera.

TABLA 17

Año	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995
Porcentaje (%)	35.70	37.70	39.30	43.30	46.30	51.50	54.50	57.50	58.90

33. *(Mínimos cuadrados para funciones cuadráticas)* A un conjunto de datos experimentales $\{(x_i, y_i)\}$ se requiere ajustar una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$. Definimos el error cuadrático medio como

$$E = \frac{1}{n}[(y_1 - ax^2_1 - bx_1 - c)^2$$
$$+(y_1 - ax^2_1 - bx_1 - c)^2 + \dots$$
$$+(y_n - ax^2_n - bx_n - c)2]$$

Plantee tres ecuaciones igualando a cero las derivadas parciales $\partial E/\partial a$, $\partial E/\partial b$ y $\partial E/\partial c$. Con base en estas ecuaciones, determine los valores de a, b y c en el caso de los datos dados en la tabla 18.

TABLA 17

x	0	1	2	3	4
y	9.9	8.2	6.1	3.7	2.4

CASO DE ESTUDIO

DECISIÓN SOBRE PRODUCCIÓN

Al inicio del capítulo se presentó el problema de decidir sobre el nivel de producción de dos tipos de jabones. Recuerde que:

El ingreso que se obtiene por la producción y venta de x_1 cientos de cajas de jabón de tocador está dado por

$$I_1 = x_1 p_1 = x_1(80 - 3x_1)$$

mientras que el ingreso por la producción y venta de x_2 cientos de cajas de jabón para cuerpo se obtiene mediante

$$I_2 = x_2 p_2 = x_2(90 - 5x_2)$$

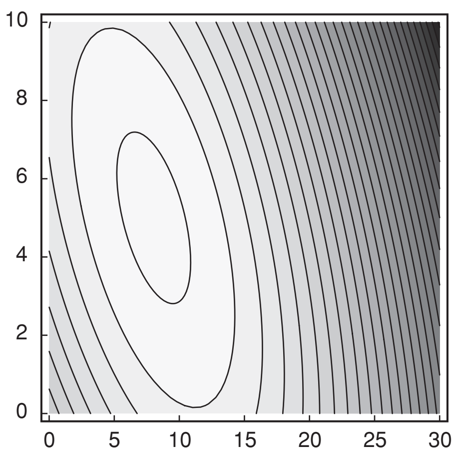
Por tanto, el ingreso total será

$$I_T = x_1(80 - 3x_1) + x_2(90 - 5x_2)$$

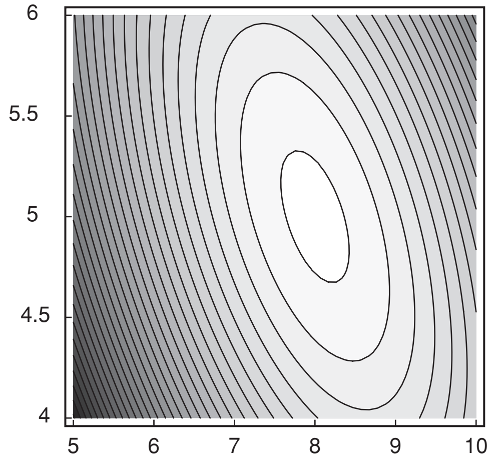
Así que la ganancia que se obtiene por la producción y venta de ambos artículos es

$$P(x_1, x_2) = I_T - C(x_1, x_2) = x_1(80 - 3x_1) + x_2(90 - 5x_2) - (12x_1 + 8x_2 + 4x_1x_2)$$

La siguiente gráfica muestra las curvas de nivel de la función de ganancia, las regiones más claras son de valores mayores de la función y las regiones con sombreado más obscuro tienen valores menores de la función.



La gráfica anterior muestra que aparentemente existe un valor máximo en el rectángulo $[5, 10] \times [4, 6]$. La siguiente gráfica muestra las curvas de nivel en este rectángulo.



De acuerdo con las gráficas anteriores, parece que existe un valor máximo para calcular de manera analítica el punto óptimo, como se aprendió en este capítulo, primero se procede a obtener los puntos críticos de la función mediante el cálculo de las primeras derivadas parciales.

$$\frac{\partial P(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 68 - 6x_1 - 4x_2$$

$$\frac{\partial P(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 82 - 4x_1 - 10x_2$$

Por el teorema 1, de este capítulo, si $P(x_1, x_2)$ tiene un máximo (o mínimo) local en el punto (x_1, x_2) es necesario que

$$\frac{\partial P(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0 \text{ y } \frac{\partial P(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$$

Al resolver el sistema

$$6x_1 + 4x_2 = 68$$

$$4x_1 + 10x_2 = 82$$

se obtiene

$$x_1 = 8 \text{ y } x_2 = 5$$

Aplicando el teorema 2, para determinar si se trata de un máximo local se calcula

$$\frac{\partial^2 P(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = -6, \quad \frac{\partial^2 P(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = -10$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial^2 P(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = -4$$

Puesto que,

$$\frac{\partial^2 P(8, 5)}{\partial x_1^2} = -6 < 0$$

y

$$\Delta(8, 5) = \frac{\partial^2 P(8, 5)}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 P(8, 5)}{\partial x_2^2} - \left[\frac{\partial^2 P(8, 5)}{\partial x_1 \partial x_2}\right]^2$$

$$\Delta(8, 5) = (-6)(-10) - (-4)^2 = 60 - 16 > 0$$

entonces, la función tiene un máximo local en (8, 5). Con lo cual el problema de Alejandro se resuelve produciendo 800 cajas de jabón de tocador y 500 cajas de jabón para baño, con lo cual tendrá una utilidad máxima de $477,000.

Ahora bien, como se comentó en capítulos anteriores, la solución del problema es importante pero tanto o más es analizar la sensibilidad de los resultados y el efecto que tienen en ella cambios en las condiciones iniciales del problema. Por ejemplo, que sucede si los precios satisfacen

$$p_1 = 85 - 4x_1 \text{ y } p_2 = 120 - 6x_2$$

en vez de las relaciones dadas al inicio. Trate de resolver el nuevo problema.

O bien, si las relaciones de demanda son

$$x_1 = 100 - 4p^2_1 + 5p_2 \text{ y } x_2 = 150 - 6p_2 + 3p_1$$

Ahora resuelva el problema con estas condiciones.

O, finalmente, qué sucede si debido a restricciones de la producción sólo se pueden producir un máximo de 1100 cajas de jabón, entre los dos tipos de ellos. Con las condiciones iniciales del problema, resuelva el problema considerando esta restricción.

APÉNDICE I

Tabla de derivadas estándar

I. Fórmulas básicas

1. La derivada de una constante es cero.

2. Para cualquier contante c, $\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$

3. $\dfrac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ —Fórmula del producto

4. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ —Fórmula del cociente

5. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$ —Regla de la cadena

o bien

$$\frac{d}{dx}(f[g(x)]) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$ —Regla de la cadena

6. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

II. Funciones exponenciales y logarítmicas

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$$

APÉNDICE II

Tabla de integrales

Observación En toda integral, se omite la constante de integración y el lector deberá agregarla.

Algunas fórmulas fundamentales

1. $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

2. $\int cf(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$

3. $\int f[g(x)]g'(x)\, dx = \int f(u)\, du \quad \text{donde} \quad u = g(x)$

4. $\int f(x)g(x)\, dx = f(x) \int g(x)\, dx \int f'(x)\left[\int g(x)\, dx\right] dx$

Integrandos racionales que incluyen $(ax + b)$

5. $\int (ax + b)^n\, dx = \dfrac{(ax + b)^{n+1}}{a(n + 1)} \quad (n \neq -1)$

6. $\int (ax + b)^{-1}\, dx = \dfrac{1}{a} \ln|ax + b|$

7. $\int x(ax + b)^n\, dx = \dfrac{1}{a^2}(ax + b)^{n+1}\left[\dfrac{ax + b}{n + 2} - \dfrac{b}{n + 1}\right] \quad (n \neq -1, -2)$

8. $\int x(ax + b)^{-1}\, dx = \dfrac{x}{a} - \dfrac{b}{a^2} \ln|ax + b|$

9. $\int x(ax + b)^{-2}\, dx = \dfrac{1}{a^2}\left[\ln|ax + b| + \dfrac{b}{ax + b}\right]$

10. $\int \dfrac{x^2}{ax + b}\, dx = \dfrac{1}{a^3}\left[\dfrac{1}{2}(ax + b)^2 - 2b(ax + b) + b^2 \ln|ax + b|\right]$

11. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(ax+b)^2}\,dx = \frac{1}{a^3}\left[ax + b - \frac{b^2}{ax+b} - 2b\ln\left|ax+b\right|\right]$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{x(ax+b)}\,dx = \frac{1}{b}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right| \qquad (b \neq 0)$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(ax+b)}\,dx = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| \qquad (b \neq 0)$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{x(ax+b)^2}\,dx = \frac{1}{b(ax+b)} - \frac{1}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| \qquad (b \neq 0)$

15. $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)(cx+d)}\,dx = \frac{1}{bc-ad}\ln\left|\frac{cx+d}{ax+b}\right| \qquad (bc - ad \neq 0)$

16. $\displaystyle\int \frac{x}{(ax+b)(cx+d)}\,dx = \frac{1}{bc-ad}\left[\frac{b}{a}\ln\left|ax+b\right| - \frac{d}{c}\ln\left|cx+d\right|\right] \qquad (bc - ad \neq 0)$

17. $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)^2(cx+d)}\,dx = \frac{1}{bc-ad}\left[\frac{1}{ax+b} + \frac{c}{bc-ad}\ln\left|\frac{cx+d}{ax+b}\right|\right] \qquad (bc - ad \neq 0)$

18. $\displaystyle\int \frac{x}{(ax+b)^2(cx+d)}\,dx = -\frac{1}{bc-ad}\left[\frac{b}{a(ax+b)} + \frac{d}{bc-ad}\ln\left|\frac{cx+d}{ax+b}\right|\right] \qquad (bc - ad \neq 0)$

Integrales que contienen $\sqrt{ax+b}$

19. $\displaystyle\int x\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{a^2}\left[\frac{(ax+b)^{5/2}}{5} - \frac{b(ax+b)^{3/2}}{3}\right]$

20. $\displaystyle\int x^2\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{a^3}\left[\frac{(ax+b)^{7/2}}{7} - \frac{2b(ax+b)^{5/2}}{5} + \frac{b^2(ax+b)^{3/2}}{3}\right]$

21. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2ax-4b}{3a^2}\sqrt{ax+b}$

22. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| \qquad (b > 0)$

23. $\displaystyle\int \frac{1}{x^n\sqrt{ax+b}}\,dx = -\frac{1}{b(n-1)}\frac{\sqrt{ax+b}}{x^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{(2n-2)b}\int \frac{1}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}}\,dx \qquad (n \neq 1)$

24. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,dx = 2\sqrt{ax+b} + b\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}\,dx$ (véase 22)

25. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}\,dx$ (véase 22)

Integrales que contienen $a^2 \pm x^2$

26. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|$

27. $\displaystyle\int \frac{1}{(a^2 - x^2)^2}\,dx = \frac{x}{2a^2(a^2 - x^2)} + \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|$

28. $\displaystyle\int \frac{x}{a^2 \pm x^2}\,dx = \pm\frac{1}{2}\ln\left|a^2 \pm x^2\right|$

29. $\displaystyle\int \frac{1}{x(a^2 \pm x^2)}\,dx = \frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{x^2}{a^2 \pm x^2}\right|$

Integrales que contienen $\sqrt{a^2 - x^2}$

30. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = -\sqrt{a^2 - x^2}$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right|$

32. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x}$

33. $\displaystyle\int \frac{1}{(a^2 - x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

34. $\displaystyle\int \frac{x}{(a^2 - x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

35. $\displaystyle\int \frac{1}{x(a^2 - x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{1}{a^3}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right|$

36. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(a^2 - x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{1}{a^4}\left[-\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right]$

37. $\displaystyle\int x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\tfrac{1}{3}(a^2 - x^2)^{3/2}$

38. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right|$

39. $\displaystyle\int x(a^2 - x^2)^{3/2}\,dx = -\tfrac{1}{5}(a^2 - x^2)^{5/2}$

40. $\displaystyle\int \frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{x}\,dx = \frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{a^2 - x^2} - a^3\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right|$

41. $\displaystyle\int x^n(a^2 - x^2)^{3/2}\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}(a^2 - x^2)^{3/2} + \frac{3}{n+1}\int x^{n+2}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

$(n \neq -1)$

42. $\displaystyle\int x^n\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{1}{n+2}x^{n-1}(a^2 - x^2)^{3/2} + \frac{a^2(n-1)}{n+2}\int x^{n-2}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

$(n \neq -2)$

Integrales que contienen $\sqrt{x^2 \pm a^2}$

43. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right|$

44. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx = \sqrt{x^2 \pm a^2}$

45. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{1}{2} a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right|$

46. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right|$

47. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx = \mp \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2 x}$

48. $\int \frac{1}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}}\, dx = \pm \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

49. $\int \frac{x}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

50. $\int \frac{x^2}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}}\, dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} + \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right|$

51. $\int \frac{1}{x(x^2 + a^2)^{3/2}}\, dx = \pm \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx \right]$ (véase 46)

52. $\int \frac{1}{x^2(x^2 \pm a^2)^{3/2}}\, dx = -\frac{1}{a^4} \left[\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right]$

53. $\int \frac{1}{(x^2 \pm a^2)^{5/2}}\, dx = \frac{1}{a^4} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} \right]$

54. $\int \frac{x}{(x^2 \pm a^2)^{5/2}}\, dx = -\frac{1}{3} \frac{1}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}}$

55. $\int \frac{x^2}{(x^2 \pm a^2)^{5/2}}\, dx = \pm \frac{1}{3a^2} \frac{x^3}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}}$

56. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \tfrac{1}{2} x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \tfrac{1}{2} a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right|$

57. $\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \tfrac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2}$

58. $\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{4}(x^2 \pm a^2)^{3/2} \pm \frac{1}{8} a^2 x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{1}{8} a^4 \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right|$

59. $\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}\, dx = \sqrt{x^2 + a^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right|$

60. $\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x} + \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right|$

61. $\int (x^2 \pm a^2)^{3/2}\, dx = \frac{x}{4}(x^2 \pm a^2)^{3/2} \pm \frac{3}{8} a^2 x\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{3}{8} a^4 \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right|$

62. $\int x(x^2 \pm a^2)^{3/2}\,dx = \frac{1}{5}(x^2 \pm a^2)^{5/2}$

63. $\int \frac{(x^2 \pm a^2)^{3/2}}{x}\,dx = \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2} \pm a^2 \int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x}\,dx$

64. $\int x^n(x^2 \pm a^2)^{3/2}\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}(x^2 \pm a^2)^{3/2} - \frac{3}{n+1}\int x^{n+2}\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx$

$(n \neq -1)$

65. $\int x^n\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{n+2}\,x^{n-1}((x^2 \pm a^2)^{3/2} \pm \frac{a^2(n-1)}{n+2}\int x^{n-2}\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx$

$(n \neq -2)$

Integrales que contienen $ax^2 + bx + c$

66. $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\,dx = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\ln\left|\frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}\right|(b^2 - 4ac > 0)$

Integrales que contienen exponenciales y logaritmos

67. $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$

68. $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}\,a^x$

69. $\int xe^{ax}\,dx = \frac{1}{a^2}(ax - 1)e^{ax}$

70. $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$

71. $\int \frac{1}{b + ce^{ax}}\,dx = \frac{1}{ab}[ax - \ln(b + ce^{ax})] \qquad (ab \neq 0)$

72. $\int \ln|x|\,dx = x\ln|x| - x$

73. $\int x\ln|x|\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln|x| - \frac{1}{4}x^2$

74. $\int x^n\ln|x|\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}\left[\ln|x| - \frac{1}{n+1}\right] \quad (n \neq -1)$

75. $\int \frac{\ln|x|}{x}\,dx = \ln|\ln|x||$

76. $\int \ln^n|x|\,dx = x\ln^n|x| - x\int \ln^{n-1}|x|\,dx$

77. $\int x^m\ln^n|x|\,dx = \frac{1}{m+1}\left\{x^{m+1}\ln^n|x| - n\int x^m\ln^{n-1}|x|\,dx\right\} \quad (m \neq -1)$

78. $\int \frac{\ln^n|x|}{x}\,dx = \frac{1}{n+1}\ln^{n+1}|x|$

Integrales diversas

79. $$\int \frac{1}{x(ax^n + b)}\,dx = \frac{1}{nb}\ln\left|\frac{x^n}{ax^n + b}\right| \qquad (n \neq 0,\, b \neq 0)$$

80. $$\int \frac{1}{x\sqrt{ax^n + b}}\,dx = \frac{1}{n\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax^n + b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax^n + b} + \sqrt{b}}\right| \qquad (b > 0)$$

81. $$\int \sqrt{\frac{x + a}{x + b}}\,dx = \sqrt{x + b}\,\sqrt{x + a} + (a - b)\ln\left|\sqrt{x + b} + \sqrt{x + a}\right|$$

APÉNDICE III

Tablas numéricas

TABLA A.3.1 Logaritmos comunes con cuatro cifras

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.3198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

TABLA A.3.1 Logaritmos comunes con cuatro cifras (*continuación*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7991	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8575	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996
N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

TABLA A.3.2 Logaritmos naturales

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.0	0.0000	0.0100	0.0198	0.0296	0.0392	0.0488	0.0583	0.0677	0.0770	0.0862
1.1	0.0953	0.1044	0.1133	0.1222	0.1310	0.1398	0.1484	0.1570	0.1655	0.1740
1.2	0.1823	0.1906	0.1989	0.2070	0.2151	0.2231	0.2311	0.2390	0.2469	0.2546
1.3	0.2624	0.2700	0.2776	0.2852	0.2927	0.3001	0.3075	0.3148	0.3221	0.3293
1.4	0.3365	0.3436	0.3507	0.3577	0.3646	0.3716	0.3784	0.3853	0.3920	0.3988
1.5	0.4055	0.4121	0.4187	0.4253	0.4318	0.4383	0.4447	0.4511	0.4574	0.4637
1.6	0.4700	0.4762	0.4824	0.4886	0.4947	0.5008	0.5068	0.5128	0.5188	0.5247
1.7	0.5306	0.5365	0.5423	0.5481	0.5539	0.5596	0.5653	0.5710	0.5766	0.5822
1.8	0.5878	0.5933	0.5988	0.6043	0.6098	0.6152	0.6206	0.6259	0.6313	0.6366
1.9	0.6419	0.6471	0.6523	0.6575	0.6627	0.6678	0.6729	0.6780	0.6831	0.6881
2.0	0.6931	0.6981	0.7031	0.7080	0.7130	0.7178	0.7227	0.7275	0.7324	0.7372
2.1	0.7419	0.7467	0.7514	0.7561	0.7608	0.7655	0.7701	0.7747	0.7793	0.7839
2.2	0.7885	0.7930	0.7975.	0.8020	0.8065	0.8109	0.8154	0.8198	0.8242	0.8286
2.3	0.8329	0.8372	0.8416	0.8459	0.8502	0.8544	0.8587	0.8629	0.8671	0.8713
2.4	0.8755	0.8796	0.8838	0.8879	0.8920	0.8961	0.9002	0.9042	0.9083	0.9123
2.5	0.9163	0.9203	0.9243	0.9282	0.9322	0.9361	0.9400	0.9439	0.9478	0.9517
2.6	0.9555	0.9594	0.9632	0.9670	0.9708	0.9746	0.9783	0.9821	0.9858	0.9895
2.7	0.9933	0.9969	1.0006	1.0043	1.0080	1.0116	1.0152	1.0188	1.0225	1.0260
2.8	1.0296	1.0332	1.0367	1.0403	1.0438	1.0473	1.0508	1.0543	1.0578	1.0613
2.9	1.0647	1.0682	1.0716	1.0750	1.0784	1.0818	1.0852	1.0886	1.0919	1.0953
3.0	1.0986	1.1019	1.1053	1.1086	1.1119	1.1151	1.1184	1.1217	1.1249	1.1282
3.1	1.1314	1.1346	1.1378	1.1410	1.1442	1.1474	1.1506	1.1537	1.1569	1.1600
3.2	1.1632	1.1663	1.1694	1.1725	1.1756	1.1787	1.1817	1.1848	1.1878	1.1909
3.3	1.1939	1.1970	1.2000	1.2030	1.2060	1.2090	1.2119	1.2149	1.2179	1.2208
3.4	1.2238	1.2267	1.2296	1.2326	1.2355	1.2384	1.2413	1.2442	1.2470	1.2499
3.5	1.2528	1.2556	1.2585	1.2613	1.2641	1.2669	1.2698	1.2726	1.2754	1.2782
3.6	1.2809	1.2837	1.2865	1.2892	1.2920	1.2947	1.2975	1.3002	1.3029	1.3056
3.7	1.3083	1.3110	1.3137	1.3164	1.3191	1.3218	1.3244	1.3271	1.3297	1.3324
3.8	1.3350	1.3376	1.3403	1.3429	1.3455	1.3481	1.3507	1.3533	1.3558	1.3584
3.9	1.3610	1.3635	1.3661	1.3686	1.3712	1.3737	1.3762	1.3788	1.3813	1.3838
4.0	1.3863	1.3888	1.3913	1.3938	1.3962	1.3987	1.4012	1.4036	1.4061	1.4085
4.1	1.4110	1.4134	1.4159	1.4183	1.4207	1.4231	1.4255	1.4279	1.4303	1.4327
4.2	1.4351	1.4315	1.4398	1.4422	1.4446	1.4469	1.4493	1.4516	1.4540	1.4563
4.3	1.4586	1.4609	1.4633	1.4656	1.4679	1.4702	1.4725	1.4748	1.4770	1.4793
4.4	1.4816	1.4839	1.4861	1.4884	1.4907	1.4929	1.4952	1.4974	1.4996	1.5019
4.5	1.5041	1.5063	1.5085	1.5107	1.5129	1.5151	1.5173	1.5195	1.5217	1.5239
4.6	1.5261	1.5282	1.5304	1.5326	1.5347	1.5369	1.5390	1.5412	1.5433	1.5454
4.7	1.5476	1.5497	1.5518	1.5539	1.5560	1.5581	1.5602	1.5623	1.5644	1.5665
4.8	1.5686	1.5707	1.5728	1.5748	1.5769	1.5790	1.5810	1.5831	1.5851	1.5872
4.9	1.5892	1.5913	1.5933	1.5953	1.5974	1.5994	1.6014	1.6034	1.6054	1.6074
5.0	1.6094	1.6114	1.6134	1.6154	1.6174	1.6194	1.6214	1.6233	1.6253	1.6273
5.1	1.6292	1.6312	1.6332	1.6351	1.6371	1.6390	1.6409	1.6429	1.6448	1.6467
5.2	1.6487	1.6506	1.6525	1.6544	1.0063	1.6582	1.6601	1.6620	1.6639	1.6658
5.3	1.6677	1.6696	1.6715	1.6734	1.6752	1.6771	1.6790	1.6808	1.6827	1.6845
5.4	1.6864	1.6882	1.6901	1.6919	1.6938	1.6956	1.6974	1.6993	1.7011	1.7029

$$\ln (N \cdot 10^m) = \ln N + m \ln 10, \qquad \ln 10 = 2.3026$$

TABLA A.3.2 Logaritmos naturales (*continuación*)

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
5.5	1.7047	1.7066	1.7084	1.7102	1.7120	1.7138	1.7156	1.7174	1.7192	1.7210
5.6	1.7228	1.7246	1.7263	1.7281	1.7299	1.7317	1.7334	1.7352	1.7370	1.7387
5.7	1.7405	1.7422	1.7440	1.7457	1.7475	1.7492	1.7509	1.7527	1.7544	1.7561
5.8	1.7579	1.7596	1.7613	1.7630	1.7647	1.7664	1.7682	1.7699	1.7716	1.7733
5.9	1.7750	1.7766	1.7783	1.7800	1.7817	1.7834	1.7851	1.7867	1.7884	1.7901
6.0	1.7918	1.7934	1.7951	1.7967	1.7984	1.8001	1.8017	1.8034	1.8050	1.8066
6.1	1.8083	1.8099	1.8116	1.8132	1.8148	1.8165	1.8181	1.8197	1.8213	1.8229
6.2	1.8245	1.8262	1.8278	1.8294	1.8310	1.8326	1.8342	1.8358	1.8374	1.8390
6.3	1.8406	1.8421	1.8437	1.8453	1.8469	1.8485	1.8500	1.8516	1.8532	1.8547
6.4	1.8563	1.8579	1.8594	1.8610	1.8625	1.8641	1.8656	1.8672	1.8687	1.8703
6.5	1.8718	1.8733	1.8749	1.8764	1.8779	1.8795	1.8810	1.8825	1.8840	1.8856
6.6	1.8871	1.8886	1.8901	1.8916	1.8931	1.8946	1.8961	1.8976	1.8991	1.9006
6.7	1.9021	1.9036	1.9051	1.9066	1.9081	1.9095	1.9110	1.9125	1.9140	1.9155
6.8	1.9169	1.9184	1.9199	1.9213	1.9228	1.9242	1.9257	1.9272	1.9286	1.9301
6.9	1.9315	1.9330	1.9344	1.9359	1.9373	1.9387	1.9402	1.9416	1.9430	1.9445
7.0	1.9459	1.9473	1.9488	1.9502	1.9516	1.9530	1.9544	1.9559	1.9573	1.9587
7.1	1.9601	1.9615	1.9629	1.9643	1.9657	1.9671	1.9685	1.9699	1.9713	1.9727
7.2	1.9741	1.9755	1.9769	1.9782	1.9796	1.9810	1.9824	1.9838	1.9851	1.9865
7.3	1.9879	1.9892	1.9906	1.9920	1.9933	1.9947	1.9961	1.9974	1.9988	2.0001
7.4	2.0015	2.0028	2.0042	2.0055	2.0069	2.0082	2.0096	2.0109	2.0122	2.0136
7.5	2.0149	2.0162	2.0176	2.0189	2.0202	2.0215	2.0229	2.0242	2.0255	2.0268
7.6	2.0282	2.0295	2.0308	2.0321	2.0334	2.0347	2.0360	2.0373	2.0386	2.0399
7.7	2.0412	2.0425	2.0438	2.0451	2.0464	2.0477	2.0490	2.0503	2.0516	2.0528
7.8	2.0541	2.0554	2.0567	2.0580	2.0592	2.0605	2.0618	2.0631	2.0643	2.0656
7.9	2.0669	2.0681	2.0694	2.0707	2.0719	2.0732	2.0744	2.0757	2.0769	2.0782
8.0	2.0794	2.0807	2.0819	2.0832	2.0844	2.0857	2.0869	2.0882	2.0894	2.0906
8.1	2.0919	2.0931	2.0943	2.0956	2.0968	2.0980	2.0992	2.1005	2.1017	2.1029
8.2	2.1041	2.1054	2.1066	2.1078	2.1090	2.1102	2.1114	2.1126	2.1138	2.1150
8.3	2.1163	2.1175	2.1187	2.1190	2.1211	2.1223	2.1235	2.1247	2.1258	2.1270
8.4	2.1282	2.1294	2.1306	2.1318	2.1330	2.1342	2.1353	2.1365	2.1377	2.1389
8.5	2.1401	2.1412	2.1424	2.1436	2.1448	2.1459	2.1471	2.1483	2.1494	2.1506
8.6	2.1518	2.1529	2.1541	2.1552	2.1564	2.1576	2.1587	2.1599	2.1610	2.1624
8.7	2.1633	2.1645	2.1656	2.1668	2.1679	2.1691	2.1702	2.1713	2.1725	2.1736
8.8	2.1748	2.1759	2.1770	2.1782	2.1793	2.1804	2.1815	2.1827	2.1838	2.1849
8.9	2.1861	2.1872	2.1883	2.1894	2.1905	2.1917	2.1928	2.1939	2.1950	2.1961
9.0	2.1972	2.1983	2.1994	2.2006	2.2017	2.2028	2.2039	2.2050	2.2061	2.2072
9.1	2.2083	2.2094	2.2105	2.2116	2.2127	2.2138	2.2148	2.2159	2.2170	2.2181
9.2	2.2192	2.2203	2.2214	2.2225	2.2235	2.2246	2.2257	2.2268	2.2279	2.2289
9.3	2.2300	2.2311	2.2322	2.2332	2.2343	2.2354	2.2364	2.2375	2.2386	2.2396
9.4	2.2407	2.2418	2.2428	2.2439	2.2450	2.2460	2.2471	2.2481	2.2492	2.2502
9.5	2.2513	2.2523	2.2534	2.2544	2.2555	2.2565	2.2576	2.2586	2.2597	2.2607
9.6	2.2618	2.2628	2.2638	2.2649	2.2659	2.2670	2.2680	2.2690	2.2701	2.2711
9.7	2.2721	2.2732	2.2742	2.2752	2.2762	2.2773	2.2783	2.2793	2.2803	2.2814
9.8	2.2824	2.2834	2.2844	2.2854	2.2865	2.2875	2.2885	2.2895	2.2905	2.2915
9.9	2.2925	2.2935	2.2946	2.2956	2.2962	2.2976	2.2986	2.2996	2.3006	2.3016

TABLA A.3.3 Funciones exponenciales

x	e^x	e^{-x}
0.00	1.0000	1.0000
0.01	1.0101	0.9900
0.02	1.0202	0.9802
0.03	1.0305	0.9704
0.04	1.0408	0.9608
0.05	1.0513	0.9512
0.06	1.0618	0.9418
0.07	1.0725	0.9324
0.08	1.0833	0.9231
0.09	1.0942	0.9139
0.10	1.1052	0.9048
0.11	1.1163	0.8958
0.12	1.1275	0.8869
0.13	1.1388	0.8781
0.14	1.1503	0.9694
0.15	1.1618	0.8607
0.16	1.1735	0.8521
0.17	1.1853	0.8437
0.18	1.1972	0.8353
0.19	1.2092	0.8270
0.20	1.2214	0.8187
0.21	1.2337	0.8106
0.22	1.2461	0.8025
0.23	1.2586	0.7945
0.24	1.2712	0.7866
0.25	1.2840	0.7788
0.26	1.2969	0.7711
0.27	1.3100	0.7634
0.28	1.3231	0.7558
0.29	1.3364	0.7483
0.30	1.3499	0.7408
0.31	1.3634	0.7334
0.32	1.3771	0.7261
0.33	1.3910	0.7189
0.34	1.4049	0.7118
0.35	1.4191	0.7047
0.36	1.4333	0.6977
0.37	1.4477	0.6907
0.38	1.4623	0.6839
0.39	1.4770	0.6771
0.40	1.4918	0.6703
0.41	1.5068	0.6637
0.42	1.5220	0.6570
0.43	1.5373	0.6505
0.44	1.5527	0.6440

x	e^x	e^{-x}
0.45	1.5683	0.6376
0.46	1.5841	0.6313
0.47	1.6000	0.6250
0.48	1.6161	0.6188
0.49	1.6323	0.6126
0.50	1.6487	0.6065
0.51	1.6653	0.6005
0.52	1.6820	0.5945
0.53	1.6989	0.5886
0.54	1.7160	0.5827
0.55	1.7333	0.5769
0.56	1.7507	0.5712
0.57	1.7683	0.5655
0.58	1.7860	0.5599
0.59	1.8040	0.5543
0.60	1.8221	0.5488
0.61	1.8044	0.5434
0.62	1.8589	0.5379
0.63	1.8776	0.5326
0.64	1.8965	0.5273
0.65	1.9155	0.5220
0.66	1.9348	0.5169
0.67	1.9542	0.5117
0.68	1.9739	0.5066
0.69	1.9937	0.5016
0.70	2.0138	0.4966
0.71	2.0340	0.4916
0.72	2.0544	0.4868
0.73	2.0751	0.4819
0.74	2.0959	0.4771
0.75	2.1170	0.4724
0.76	2.1383	0.4677
0.77	2.1598	0.4630
0.78	2.1815	0.4584
0.79	2.2034	0.4538
0.80	2.2255	0.4493
0.81	2.2479	0.4449
0.82	2.2705	0.4404
0.83	2.2933	0.4360
0.84	2.3164	0.4317
0.85	2.3396	0.4274
0.86	2.3632	0.4232
0.87	2.3869	0.4190
0.88	2.4109	0.4148
0.89	2.4351	0.4107

TABLA A.3.3 Funciones exponenciales (*continuación*)

x	e^x	e^{-x}
0.90	2.4596	0.4066
0.91	2.4843	0.4025
0.92	2.5093	0.3985
0.93	2.5345	0.3946
0.94	2.5600	0.3906
0.95	2.5857	0.3867
0.96	2.6117	0.3829
0.97	2.6379	0.3791
0.98	2.6645	0.3753
0.99	2.6912	0.3716
1.00	2.7183	0.3679
1.05	2.8577	0.3499
1.10	3.0042	0.3329
1.15	3.1582	0.1166
1.20	3.3201	0.1012
1.25	3.4903	0.2865
1.30	3.5693	0.2725
1.35	3.8574	0.2592
1.40	4.0552	0.2466
1.45	4.2631	0.2346
1.50	4.4817	0.2231
1.55	4.7115	0.2122
1.60	4.9530	0.2019
1.65	5.2070	0.1920
1.70	5.4739	0.1827
1.75	5.7546	0.1738
1.80	6.0496	0.1653
1.85	6.359R	0.1572
1.90	6.6859	0.1496
1.95	7.0287	0.1423
2.00	7.3891	0.1353
2.05	7.7679	0.1287
2.10	8.1662	0.1225
2.15	8.5849	0.1165
2.20	9.0250	0.1108
2.25	9.4877	0.1054
2.30	9.9742	0.1003
2.35	10.486	0.0954
2.40	11.023	0.0907
2.45	11.588	0.0863
2.50	12.182	0.0821
2.55	12.807	0.0781
2.60	13.464	0.0743
2.65	14.154	0.0707
2.70	14.880	0.0672
2.75	15.643	0.0639
2.80	16.445	0.0608
2.85	17.288	0.0578
2.90	18.174	0.0550
2.95	19.106	0.0523
3.00	20.086	0.0498
3.05	21.115	0.0474
3.10	22.198	0.0450
3.15	23.336	0.0429
3.20	24.533	0.0408
3.25	25.790	0.0388
3.30	27.113	0.0369
3.35	28.503	0.0351
3.40	29.964	0.0314
3.45	31.500	0.0317
3.50	33.115	0.0302
3.55	34.813	0.0287
3.60	36.598	0.0273
3.65	38.475	0.0260
3.70	40.447	0.0247
3.75	42.521	0.0235
3.80	44.701	0.0224
3.85	46.993	0.0213
3.90	49.402	0.0202
3.95	51.935	0.0193
4.00	54.598	0.0183
4.05	60.340	0.0166
4.20	66.686	0.0150
4.30	73.700	0.0136
4.40	81.451	0.0123
4.50	90.017	0.0111
4.60	99.484	0.0101
4.70	109.95	0.0091
4.80	121.51	0.0082
4.90	134.29	0.0074
5.00	148.41	0.0067
5.20	181.27	0.0055
5.40	221.41	0.0045
5.60	270.43	0.0037
5.80	130.30	0.0030
6.00	403.43	0.0025
7.00	1096.6	0.0009
8.00	2981.0	0.0003
9.00	8103.1	0.0001
10.00	22026.	0.00005

TABLA A.3.4 Tablas de interés compuesto

$i = \frac{1}{2}\%$ ($i = 0.005$)				$i = \frac{3}{4}\%$ ($i = 0.0075$)			
n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	$s_{\overline{n}\rceil i}$	n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	$s_{\overline{n}\rceil i}$
1	1.005000	0.995025	1.000000	1	1.007500	0.992556	1.000000
2	1.010025	1.985099	2.005000	2	1.015056	1.977723	2.007500
3	1.015075	2.970248	3.015025	3	1.022669	2.955556	3.022556
4	1.020151	3.950496	4.030100	4	1.030339	3.926110	4.045225
5	1.025251	4.925866	5.050251	5	1.038067	4.889440	5.075565
6	1.030378	5.896384	6.075502	6	1.045852	5.845598	6.113631
7	1.035529	6.862074	7.105879	7	1.053696	6.794638	7.159484
8	1.040707	7.822959	8.141409	8	1.061599	7.736613	8.213180
9	1.045911	8.779064	9.182116	9	1.069561	8.671576	9.274779
10	1.051140	9.730412	10.228026	10	1.077583	9.599580	10.344339
11	1.056396	10.677027	11.279167	11	1.085664	10.520675	11.421922
12	1.061678	11.618932	12.335562	12	1.093807	11.434913	12.507586
13	1.066986	12.556151	13.397240	13	1.102010	12.342345	13.601393
14	1.072321	13.488708	14.464226	14	1.110276	13.243022	14.703404
15	1.077683	14.416625	15.536548	15	1.118603	14.136995	15.813679
16	1.083071	15.339925	16.614230	16	1.126992	15.024313	16.932282
17	1.088487	16.258632	17.697301	17	1.135445	15.905025	18.059274
18	1.093929	17.172768	18.785788	18	1.143960	16.779181	19.194718
19	1.099399	18.082356	19.879717	19	1.152540	17.646830	20.338679
20	1.104896	18.987419	20.979115	20	1.161184	18.508020	21.491219
21	1.110420	19.887979	22.084011	21	1.169893	19.362799	22.652403
22	1.115972	20.784059	23.194431	22	1.178667	20.211215	23.822296
23	1.121552	21.675681	24.310403	23	1.187507	21.053315	25.000963
24	1.127160	22.562866	25.431955	24	1.196414	21.889146	26.188471
25	1.132796	23.445638	26.559115	25	1.205387	22.718755	27.384884
26	1.138460	24.324018	27.691911	26	1.214427	23.542189	28.590271
27	1.144152	25.198028	28.830370	27	1.223535	24.359493	29.804698
28	1.149873	26.067689	29.974522	28	1.232712	25.170713	31.028233
29	1.155622	26.933024	31.124395	29	1.241957	25.975893	32.260945
30	1.161400	27.794054	32.280017	30	1.251272	26.775080	33.502902
31	1.167207	28.650800	33.441417	31	1.260656	27.568318	34.754174
32	1.173043	29.503284	34.608624	32	1.270111	28.355650	36.014830
33	1.178908	30.351526	35.781667	33	1.279637	29.137122	37.284941
34	1.184803	31.195548	36.960575	34	1.289234	29.912776	38.564578
35	1.190727	32.035371	38.145378	35	1.298904	30.682656	39.853813
36	1.196681	32.871016	39.336105	36	1.308645	31.446805	41.152716
37	1.202664	33.702504	40.532785	37	1.318460	32.205266	42.461361
38	1.208677	34.529854	41.735449	38	1.328349	32.958080	43.779822
39	1.214721	35.353089	42.944127	39	1.338311	33.705290	45.108170
40	1.220794	36.172228	44.158847	40	1.348349	34.446938	46.446482
41	1.226898	36.987291	45.379642	41	1.358461	35.183065	47.794830
42	1.233033	37.798300	46.606540	42	1.368650	35.913713	49.153291
43	1.239198	38.605274	47.839572	43	1.378915	36.638921	50.521941
44	1.245394	39.408232	49.078770	44	1.389256	37.358730	51.900856
45	1.251621	40.207196	50.324164	45	1.399676	38.073181	53.290112
46	1.257879	41.002185	51.575785	46	1.410173	38.782314	54.689788
47	1.264168	41.793219	52.833664	47	1.420750	39.486168	56.099961
48	1.270489	42.580318	54.097832	48	1.431405	40.184782	57.520711
49	1.276842	43.363500	55.368321	49	1.442141	40.878195	58.952116
50	1.283226	44.142786	56.645163	50	1.452957	41.566447	60.394257

TABLA A.3.4 Tablas de interés compuesto (*continuación*)

	$i = 1\%$ ($i = 0.01$)				**$i = 2\%$ ($i = 0.02$)**		
n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\|i}$	$s_{\overline{n}\|i}$	n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\|i}$	$s_{\overline{n}\|i}$
1	1.010000	0.990099	1.000000	1	1.020000	0.980392	1.000000
2	1.020100	1.970395	2.010000	2	1.040400	1.941561	2.020000
3	1.030301	2.940985	3.030100	3	1.061208	2.883683	3.060400
4	1.040604	3.901966	4.060401	4	1.082432	3.807729	4.121608
5	1.051010	4.833431	5.101005	5	1.104081	4.713400	5.204040
6	1.061520	5.795476	6.152015	6	1.126162	5.601431	6.308121
7	1.072135	6.728195	7.213535	7	1.148686	6.471991	7.434283
8	1.082857	7.651678	8.285071	8	1.171659	7.325481	8.582969
9	1.093685	8.566018	9.368527	9	1.195093	8.162237	9.754628
10	1.104622	9.471305	10.462213	10	1.218994	8.982585	10.949721
11	1.115668	10.367628	11.566835	11	1.243374	9.786848	12.168715
12	1.126825	11.255077	12.682503	12	1.268242	10.575341	13.412090
13	1.138093	12.133740	13.809328	13	1.293607	11.348374	14.680332
14	1.149474	13.003703	14.947421	14	1.319479	12.106249	15.973938
15	1.160969	13.865053	16.096896	15	1.345868	12.849264	17.293417
16	1.172579	11.717874	17.257864	16	1.372786	13.577709	18.639285
17	1.184304	15.562251	18.430443	17	1.400241	14.291872	20.012071
18	1.196147	16.398269	19.614748	18	1.428246	14.992031	21.412312
19	1.208109	t7.226008	20.810895	19	1.456811	15.678462	22.840559
20	1.220190	18.045553	22.019004	20	1.485947	16.351433	24.297370
21	1.232392	18.856983	23.239194	21	1.515666	17.011209	25.783317
22	1.244716	19.660379	24.471586	22	1.545980	17.658048	27.298984
23	1.257163	20.455821	25.716302	23	1.576899	18.292204	28.844963
24	1.269735	21.243387	26.973465	24	1.608437	18.913926	30.421862
25	1.282432	22.023156	28.243200	25	1.640606	19.523456	32.030300
26	1.295256	22.795204	29.525631	26	1.673418	20.121036	33.670906
27	1.308209	23.559608	30.820888	27	1.706886	20.706898	35.344324
28	1.321291	24.316443	32.129097	28	1.741024	21.281272	37.051210
29	1.334504	25.065785	33.450388	29	1.775845	21.844385	38.792235
30	1.347849	25.807708	34.784892	30	1.811362	22.396456	40.568079
31	1.361327	26.542285	36.132740	31	1.847589	22.937702	42.379441
32	1.374941	27.269589	37.494068	32	1.884541	23.468335	44.227030
33	1.388690	27.989693	38.869009	33	1.922231	23.988564	46.111570
34	1.402577	28.702666	40.257699	34	1.960676	24.498592	48.033802
35	1.416603	29.408580	41.660276	35	1.999890	24.998619	49.994478
36	1.430769	30.107505	43.076878	36	2.039887	25.488842	51.994367
37	1.445076	30.799510	44.507647	37	2.080683	25.969453	54.034255
38	1.459527	31.484663	45.952724	38	2.122299	26.440641	56.114940
39	1.474123	32.163033	47.412251	39	2.164745	26.902589	58.237238
40	1.488864	32.834686	48.886373	40	2.208040	27.355479	60.401983
41	1.503752	33.499689	50.375237	41	2.252200	27.799489	62.610023
42	1.518790	34.158108	51.878989	42	2.297244	28.234794	64.862223
43	1.533978	34.810008	53.397779	43	2.343189	28.661562	67.159468
44	1.549318	35.455454	54.931757	44	2.390053	29.079963	69.502657
45	1.564811	36.094508	56.481075	45	2.437854	29.490160	71.892710
46	1.580459	36.727236	58.045885	46	2.486611	29.892314	74.330564
47	1.596263	37.353699	59.626344	47	2.536344	30.286582	76.817176
48	1.612226	37.973959	61.222608	48	2.587070	30.673120	79.353519
49	1.628348	38.588079	62.834834	49	2.638812	31.052078	81.940590
50	1.644632	39.196118	64.463182	50	2.691588	31.423606	84.579401

TABLA A.3.4 Tablas de interés compuesto (*continuación*)

	$i = 3\%$ ($i = 0.03$)				**$i = 4\%$ ($i = 0.04$)**		
n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	$s_{\overline{n}\rceil i}$	n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	$s_{\overline{n}\rceil i}$
1	1.030000	0.970874	1.000000	1	1.040000	0.961538	1.000000
2	1.060900	1.913470	2.030000	2	1.081600	1.886095	2.040000
3	1.092727	2.828611	3.090900	3	1.124864	2.775091	3.121600
4	1.125509	3.717098	4.183627	4	1.169859	3.629895	4.246464
5	1.159274	4.579707	5.309136	5	4.216653	4.451822	5.416323
6	1.194052	5.417191	6.468410	6	1.265319	5.242137	6.632975
7	1.229874	6.230283	7.662462	7	1.315932	6.002055	7.898294
8	1.266770	7.019692	8.892336	8	1.368569	6.732745	9.214226
9	1.304773	7.786109	10.159106	9	1.423312	7.435332	10.582795
10	1.343916	8.530203	11.463879	10	1.480244	8.110896	12.006107
11	1.384234	9.252624	12.807796	11	1.539454	8.760477	13.486351
12	1.425761	9.954004	14.192030	12	1.601032	9.385074	15.025805
13	1.468534	10.634955	15.617790	13	1.665074	9.985648	16.626838
14	1.512590	11.296073	17.086324	14	1.731676	10.563123	18.291911
15	1.557967	11.937935	18.598914	15	1.800944	11.118387	20.023588
16	1.604706	12.561102	20.156881	16	1.872981	11.652296	21.824531
17	1.652848	13.166118	21.761588	17	1.947900	12.165669	23.697512
18	1.702433	13.753513	23.414435	18	2.025817	12.659297	25.645413
19	1.753506	14.323799	25.116868	19	2.106849	13.133939	27.671229
20	1.806111	14.877475	26.870374	20	2.191123	13.590326	29.778079
21	1.860295	15.415024	28.676486	21	2.278768	14.029160	31.969202
22	1.916103	15.936917	30.536780	22	2.369919	14.451115	34.247970
23	1.973587	16.443608	32.452884	23	2.464716	14.856842	36.617889
24	2.032794	16.935542	34.426470	24	2.563304	15.246963	39.082604
25	2.093778	17.413148	36.459264	25	2.665836	15.622080	41.645908
26	2.156591	17.876842	38.553042	26	2.772470	15.982769	44.311745
27	2.221289	18.327031	40.709634	27	2.883369	16.329586	47.084214
28	2.287928	18.764108	42.930923	28	2.998703	16.663063	49.967583
29	2.356566	19.188455	45.218850	29	3.118651	16.983715	52.966286
30	2.427262	19.600441	47.575416	30	3.243398	17.292033	56.084938
31	2.500080	20.000428	50.002678	31	3.373133	17.588494	59.328335
32	2.575083	20.388766	52.502759	32	3.508059	17.873551	62.701469
33	2.652335	20.765792	55.077841	33	3.648381	18.147646	66.209527
34	2.731905	21.131837	57.730177	34	3.794316	18.411198	69.857909
35	2.813862	21.487220	60.462082	35	3.946089	18.666613	73.652225
36	2.898278	21.832252	63.275944	36	4.103933	18.908282	77.598314
37	2.985227	22.167235	66.174223	37	4.268090	19.142579	81.702246
38	3.074783	22.492462	69.159449	38	4.438813	19.367864	85.970336
39	3.167027	22.808215	72.234233	39	4.616366	19.584485	90.409150
40	3.262038	23.114772	75.401260	40	4.801021	19.792774	95.025516
41	3.359899	23.412400	78.663298	41	4.993061	19.993052	99.826536
42	3.460696	23.701359	82.023196	42	5.192784	20.185627	104.819598
43	3.564517	23.981902	85.483892	43	5.400495	20.370795	110.012382
44	3.671452	24.254274	89.04B409	44	5.616515	20.548841	115.412877
45	3.781596	24.518713	92.719861	45	5.841176	20.720040	121.029392
46	3.895044	24.775449	96.501457	46	6.074823	20.884654	126.870568
47	4.011895	25.024708	100.396501	47	6.317816	21.042936	132.945390
48	4.132252	25.266707	104.408396	48	6.570528	21.195131	139.263206
49	4.256219	25.501657	108.540648	49	6.833349	21.341472	145.833734
50	4.383906	25.729764	112.796867	50	7.106683	21.482185	152.667084

TABLA A.3.4 Tablas de interés compuesto (*continuación*)

	$i = 5\%$ ($i = 0.05$)				$i = 6\%$ ($i = 0.06$)		
n	$(1 + i)^n$	$a_{\overline{n}\rvert i}$	$s_{\overline{n}\rvert i}$	n	$(1 + i)^n$	$a_{\overline{n}\rvert i}$	$s_{\overline{n}\rvert i}$
1	1.050000	0.952381	1.000000	1	1.060000	0.943396	1.000000
2	1.102500	1.859410	2.050000	2	1.123600	1.833393	2.060000
3	1.157625	2.723248	3.152500	3	1.191016	2.673012	3.183000
4	1.215506	3.545951	4.310125	4	1.262477	3.465106	4.374616
5	1.276282	4.329477	5.525631	5	1.338226	4.212364	5.637093
6	1.340096	5.075692	6.801913	6	1.418519	4.917324	6.975319
7	1.407100	5.786373	8.142008	7	1.503630	5.582381	8.393838
8	1.477455	6.463213	3.549109	8	1.593848	6.209794	9.897468
9	1.551328	7.107822	11.026564	9	1.689479	6.801692	11.491316
10	1.628895	7.721735	12.577893	10	1.790848	7.360087	13.180795
11	1.710339	8.306414	14.206787	11	1.898299	7.886875	14.971643
12	1.795856	8.863252	15.917127	12	2.012196	8.383844	16.869941
13	1.885649	9.393573	17.712983	13	2.132928	8.852683	18.882138
14	1.979932	9.898641	19.598632	14	2.260904	9.294984	21.015066
15	2.078928	10.379658	21.578564	15	2.396558	9.712249	23.275970
16	2.182875	10.837770	23.657492	16	2.540352	10.105895	25.672528
17	2.292018	11.274066	25.840366	17	2.692773	10.477260	28.212880
18	2.406619	11.689587	28.132385	18	2.854339	10.827603	30.905653
19	2.526950	12.085321	30.539004	19	3.025600	11.158116	33.759992
20	2.653298	12.462210	33.065954	20	3.207135	11.469921	36.785591
21	2.785963	12.821153	35.719252	21	3.399564	11.764077	39.992727
22	2.925261	13.163003	38.505214	22	3.603537	12.041582	43.392290
23	3.071524	13.488574	41.430475	23	3.819750	12.303379	46.995828
24	3.225100	13.798642	44.501999	24	4.048935	12.550358	50.815577
25	3.386355	14.093945	47.727099	25	4.291871	12.783356	54.864512
26	3.555673	14.375185	51.113454	26	4.549383	13.003166	59.156383
27	3.733456	14.643034	54.669126	27	4.822346	13.210534	63.705766
28	3.920129	14.898127	58.402583	28	5.111687	13.406164	68.528112
29	4.116136	15.141074	62.322712	29	5.418388	13.590721	73.639798
30	4.321942	15.372451	66.438848	30	5.743491	13.764831	79.058186
31	4.538039	15.592811	70.760790	31	6.088101	13.929086	84.801677
32	4.764941	15.802677	75.298829	32	6.453387	14.084043	90.889778
33	5.003189	16.002549	80.063771	33	6.840590	14.230230	97.343165
34	5.253348	16.192904	85.066959	34	7.251025	14.368141	104.183755
35	5.516015	16.374194	90.320307	35	7.686087	14.498246	111.434780
36	5.791816	16.546852	95.836323	36	8.147252	14.620987	119.120867
37	6.081407	16.711287	101.628139	37	8.636087	14.736780	127.268119
38	6.385477	16.867893	107.709546	38	9.154252	14.846019	135.904206
39	6.704751	17.017041	114.095023	39	9.703507	14.949075	145.058458
40	7.039989	17.159086	120.799774	40	10.285718	15.046297	154.761966
41	7.391988	17.294368	127.839763	41	10.902861	15.138016	165.047684
42	7.761588	17.423208	135.231751	42	11.557033	15.224543	175.950545
43	8.149667	17.545912	142.993339	43	12.250455	15.306773	187.507577
44	8.557150	17.662773	151.143006	44	12.985482	15.383182	199.758032
45	8.985008	17.774070	159.700156	45	13.764611	15.455832	212.743514
46	9.434258	17.880066	168.685164	46	14.590487	15.524370	226.508125
47	9.905971	17.981016	178.119422	47	15.465917	15.589028	241.098612
48	10.401270	18.077158	188.025393	48	16.393872	15.650027	256.564529
49	10.921333	18.168722	198.426663	49	17.377504	15.707572	272.958401
50	11.467400	18.255925	209.347996	50	18.420154	15.761861	290.335905

TABLA A.3.4 Tablas de interés compuesto (*continuación*)

	$i = 7\%$ ($i = 0.07$)				$i = 8\%$ ($i = 0.08$)		
n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rvert i}$	$s_{\overline{n}\rvert i}$	n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rvert i}$	$s_{\overline{n}\rvert i}$
1	1.070000	0.934579	1.000000	1	1.080000	0.925926	1.000000
2	1.144900	1.808018	2.070000	2	1.166400	1.783265	2.080000
3	1.225043	2.624316	3.214900	3	1.259712	2.577097	3.246400
4	1.310796	3.387211	4.439943	4	1.360489	3.312127	4.506112
5	1.402552	4.100197	5.750739	5	1.469328	3.992710	5.866601
6	1.500730	4.766540	7.153291	6	1.586874	4.622880	7.335929
7	1.605781	5.389289	8.654021	7	1.713824	5.206370	8.922803
8	1.718186	5.971299	10.259803	8	1.850930	5.746639	10.636628
9	1.838459	6.515232	11.977989	9	1.999005	6.246888	12.487558
10	1.967151	7.023582	13.816448	10	2.158925	6.710081	14.486562
11	2.104852	7.498674	15.783599	11	2.331639	7.138964	16.645487
12	2.252192	7.942686	17.888451	12	2.518170	7.536078	18.977126
13	2.409845	8.357651	20.140643	13	2.719624	7.903776	21.495297
14	2.578534	8.745468	22.550488	14	2.937194	8.244237	24.214920
15	2.759032	9.107914	25.129022	15	3.172169	8.559479	27.152114
16	2.952164	9.446649	27.888054	16	3.425943	8.851369	30.324283
17	3.158815	9.763223	30.840217	17	3.700018	9.121638	33.750226
18	3.379932	10.059087	33.999033	18	3.996019	9.371887	37.450244
19	3.616528	10.335595	37.378965	19	4.315701	9.603599	41.446263
20	3.869684	10.594014	40.995492	20	4.660957	9.818147	45.761964
21	4.140562	10.835527	44.865177	21	5.033834	10.016803	50.422921
22	4.430402	11.061240	49.005739	22	5.436540	10.200744	55.456755
23	4.740530	11.272187	53.436141	23	5.871464	10.371059	60.893296
24	5.072367	11.469334	58.176671	24	6.341181	10.528758	66.764759
25	5.427433	11.653583	63.249038	25	6.848475	10.674776	73.105940
26	5.807353	11.825779	68.676470	26	7.396353	10.809978	79.954415
27	6.213868	11.986709	74.483823	27	7.988061	10.935165	87.350768
28	6.648838	12.137111	80.697691	28	8.627106	11.051078	95.338830
29	7.114257	12.277674	87.346529	29	9.317275	11.158406	103.965936
30	7.612255	12.409041	94.460786	30	10.062657	11.257783	113.283211
31	8.145113	12.531814	102.073041	31	10.867669	11.349799	123.345868
32	8.715271	12.646555	110.218154	32	11.737083	11.434999	134.213537
33	9.325340	12.753790	118.933425	33	12.676050	11.513888	145.950620
34	9.978114	12.854009	128.258765	34	13.690134	11.586934	158.626670
35	10.676581	12.947672	138.236878	35	14.785344	11.654568	172.316804
36	11.423942	13.035208	148.913460	36	15.968172	11.717193	187.102148
37	12.223618	13.117017	160.337402	37	17.245626	11.775179	203.070320
38	13.079271	13.193473	172.561020	38	18.625276	11.828869	220.315945
39	13.994820	13.264928	185.640292	39	20.115298	11.878582	238.941221
40	14.974458	13.331709	199.635112	40	21.724521	11.924613	259.056519
41	16.022670	13.394120	214.609570	41	23.462483	11.967235	280.781040
42	17.144257	13.452449	230.632240	42	25.339482	12.006699	304.243523
43	18.344355	13.506962	247.776496	43	27.366640	12.043240	329.583005
44	19.628460	13.557908	266.120851	44	29.555972	12.077074	356.949646
45	21.002452	13.605522	285.749311	45	31.920449	12.108402	386.505617
46	22.472623	13.650020	306.751763	46	34.474085	12.137409	418.426067
47	24.045707	13.691608	329.224386	47	37.232012	12.164267	452.900152
48	25.728907	13.730474	353.270093	48	40.210573	12.189136	490.132164
49	27.529930	13.766799	378.999000	49	43.427419	12.212163	530.342737
50	29.457025	13.800746	406.528929	50	46.901613	12.233485	573.770156

Soluciones a problemas con número impar

CAPÍTULO 1

1. *a*) Falso; $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) Falso; $x^0 = 1$, para todo número real, x, distinto de cero

c) Verdadero

d) Falso; $\dfrac{-x}{-y} = \dfrac{x}{y}$

e) Verdadero

f) Falso; $\dfrac{x + y}{y} = \dfrac{x}{y + 1}$

g) Verdadero

h) Falso; todo número racional puede expresarse como un decimal que termina o bien que se repite

i) Verdadero

j) Falso; si a es un número real, la expresión $\dfrac{a}{0}$ no está definida

k) Verdadero

l) Verdadero

m) Falso; $x^m \cdot x^n = x^{mn}$

n) Falso; $\dfrac{a}{c} \div \dfrac{b}{d} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$

o) Verdadero

p) Verdadero

q) Falso; $\dfrac{1}{\sqrt[5]{32}} = \dfrac{1}{2}$

3. 432

5. 200

7. $14/(3a)$

9. $\dfrac{b^2 + 1}{b^2}$

11. $3x^4 - x^3 + 2x$

13. $\dfrac{47}{12x^2}$

15. $9\sqrt{6}$

17. $11\sqrt{10}$

19. 8^n

21. $6b - 2a$

23. $y^4 - 2y^3 - y + 2$

25. $4x^2 - 141x + 9$

27. $(p + 2q)(p - 2q)$

29. $(2b - 3)(3b - 7)$

31. $(d - 1)(d + 1)(2d - 3)$

33. $(4d - 1)(16d^2 + 4d + 1)$

35. $(5x + 2y)(3x - 7y)$

37. $n^2(n - 1)(3n + 2)$

39. $(n^2 + 1)(n - 1)(3n + 2)$

41. $(2t - 3u)(5t + u)$

43. Es una demostración por lo que no se muestra la solución

CAPÍTULO 2

1. *a*) Falso; si ambos lados de una ecuación se elevan al cuadrado, sus raíces cambian. Por ejemplo, $y = 3$: si ambos lados se elevan al cuadrado, se obtiene $y^2 = 9$, cuyas raíces son 3 y 3

b) Verdadero, siempre que la constante sea distinta de cero

c) Verdadero, siempre que la expresión esté bien definida

d) Verdadero, siempre que la constante sea distinta de cero

e) Falso; una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son constantes arbitrarias con a 6 = 0 *f*) Falso; el discriminante de la ecuación cuadrática, $ax^2 + bx + c = 0$, es $b^2 - 4ac$

g) Verdadero

h) Falso; una ecuación cuadrática puede tener cero, una o dos raíces reales

i) Verdadero

j) Verdadero

k) Verdadero

3. 7

5. 2, 3

7. 1, −3

9. No tiene raíces reales

11. −3, 6

13. No hay solución

15. 5, −1/6

17. 12, 6

19. 3, 5

21. −3

23. *abc*

25. 1, −3/2

27. 1/2, −1/3

29. −6, −11/2

31. $r = \dfrac{I}{Pt}$

33. $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$

35. $a = \dfrac{2S - dn(n - 1)}{2n}$

37. 5%

39. 600 balones al mes

41. \$100,000 al 4% y \$150,000 al 6%

43. \$13.50 cada copia

CAPÍTULO 3

1. *a*) Falso, por ejemplo, tome $x = 0.5$. Una proposición verdadera es: si $x > 1$ entonces $x^2 > x$

b) Falso; al sumar el mismo número negativo en ambos lados de una desigualdad, la desigualdad preserva su sentido.

c) Verdadero

d) Falso; si $|a| = |b|$, entonces $a = b$ o $a = -b$

e) Falso; el valor absoluto de todo número real siempre es un número no negativo. (Recuerde que el valor absoluto del cero es cero)

f) Verdadero

g) Verdadero

h) Falso; la ecuación $|x + 1| = x + 1$ se satisface para cualquier número real $x \geq -1$

i) Falso; si $0 > x > y$ entonces $|x| < |y|$

j) Verdadero

k) Falso; una desigualdad cuadrática tiene cero soluciones, una solución o un número infinito de soluciones

l) Verdadero. A esta desigualdad se le conoce como *desigualdad del triángulo*

m) Verdadero

3. $(-\infty, 7)$

5. $(2, 3)$

7. $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$

9. $(2, \infty)$

11. $(-\infty, -3] \cup [0, 6])$

13. Para toda x

15. $[-1/6, 5]$

17. $[1, 2]$

19. $(-\infty, -3] \cup [1, 5/2]$

21. $(-\infty, 3) \cup (9, \infty)$

23. $(-\infty, 2)$

25. $(5, \infty)$

27. $(-1/3, 1/2)$

29. Sin solución

31. $(-1, 5)$

33. Toda x en los reales

35. Sin solución

37. $(-\infty, 5] \cup [11, \infty)$

39. $(-\infty, -23/3) \cup (37/3, \infty)$

41. 2, −18/7

43. 0, 1, 5

45. 5, −5

47. −1, −9/2

49. Sin solución

51. 125 minutos

53. 50 televisores, no es válido 450

55. $15 por kilogramo

57. 250 rompecabezas

59. $25,000

CAPÍTULO 4

1. *a*) Falso. Cada punto en el eje x tiene coordenada y igual a cero

   b) Falso. Cada punto en el eje y tiene abscisa igual a cero

   c) Verdadero

   d) Verdadero

   e) Falso. La pendiente de la recta que pasa por los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) tiene pendiente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, para cualesquiera valores x_1, x_2, y_1, y_2, tales que $x_1 \neq x_2$

   f) Falso. La ecuación $y = k$, con k una constante representa una recta horizontal

   g) Falso. La distancia del punto (a, b) al origen $(0, 0)$ está dada por $\sqrt{a^2 + b^2}$

   h) Falso. Si $x \cdot y < 0$, entonces el punto (x, y) está en el segundo o cuarto cuadrante

   i) Verdadero

   j) Verdadero

   k) Verdadero

   l) Verdadero

   m) Falso. La ecuación $Ax + By + C = 0$ representa una línea recta para cualesquiera valores de A,B y C, siempre que A y B no sean ambas iguales a cero

3. $x - 3y + 2 = 0$

5. $5x + 3y - 15 = 0$

7. $3x - y + 6 = 0$

9. $y - 5 = 0$

11. $x - 3y - 16 = 0$

13. $(-6, 0)$ y $(0, 21)$

15. $x = -14, y = -10$

17. $x = 2; y = 7$

19. $x = 4, y = -3$

21. Tiene un número infinito de soluciones, todas las parejas (x, y) que satisfacen la primera ecuación; una solución es $x = 3, y = -1$

23. $u = 1, v = -3, w = 5$

25. $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, z = -\frac{1}{7}$

27. $x = 2, y = 3; x = -3, y = -2$

29. $u = \frac{3}{7}, v = \frac{5}{7}; u = -3, v = 3$

31. Si se producen x sillas y y mesas, entonces $2x + 5y = 400$

33. La primera inversión es de $20,000 y la segunda de $30,000

35. Si y_c es el costo de producir x unidades, entonces $y_c = 2500 + 20x$; $5,500

37. En la primera invirtió $2,200 y en la segunda $1,100

39. 6 litros de la solución al 10% y 4 litros de la solución al 5%

41. $80 por unidad

43. $p = 26$ y $x = 4$

45. *a*) 24,000 cajas de fósforos; *b*) 6,500 cajas de fósforos

47. Invirtió $2500, $3000 y $4500, en papel comercial, bonos y depósito a plazo fijo, respectivamente

49. *a*) $p = -0.625x + 4.125$; *b*) 3.4 millones de rollos

CAPÍTULO 5

1. *a*) Falso; el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2}$ es el conjunto de todos los números reales

   b) Falso; una función es una regla que asigna a cada elemento del dominio exactamente un valor del rango

   c) Verdadero

   d) Verdadero

   e) Falso; Si $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ y $f(x) = x + 2$, entonces $f(x) = g(x)$ para toda $x \neq 2$

   f) Verdadero

   g) Verdadero

   h) Falso, en general se tiene $f \circ g \neq g \circ f$

   i) Verdadero

   j) Verdadero

   k) Verdadero

   l) Falso. La gráfica de cualquier recta, que no sea vertical, siempre representa la gráfica de una función

   m) Falso. El dominio de la función cociente $/f/g)(x)$ consiste en todos los números, x, que pertenecen al mismo tiempo al dominio de f y al dominio de g, excluyendo a los valores de x tales que $g(x) = 0$

n) Verdadero

o) Verdadero

3. Par

5. Ninguna

7. $f(x) = ax$ para cualquier valor constante a

9. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 14 = 0$

11. $x^2 + y^2 - 2x = 0$

13. $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$

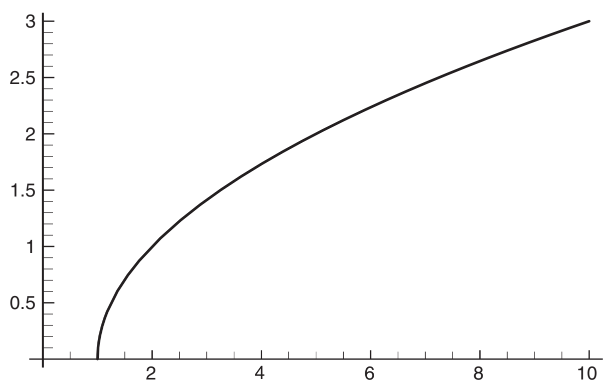
15. $k = 8$

17. Sí, centro en $(2, -5)$ y radio 3. $(0, -5 \pm \sqrt{5})$

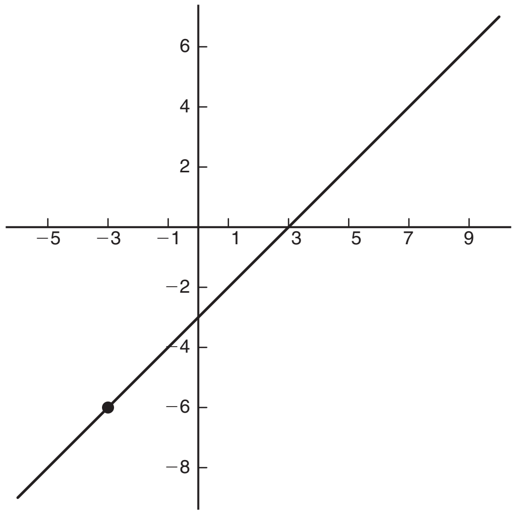
19. No

21. Sí, centro en $(-10, -15)$ y radio 6. No corta a los ejes

23. $D_f = \{x \in \mathcal{R} : x \geq 1\}$



25. $D_F = \mathcal{R} - \{-3\}$



27. $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1}$; $(g \circ f) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

29. Una posibilidad es: $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$

31. $I(x) = \begin{cases} 2000, & \text{si } x = 0, 1, 2, \cdots, 10, \\ 2000 + 6000(0.08)(x - 10), & \text{si } x = 11, 12, 13, \cdots. \end{cases}$

a) $D_I = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$ *b*) \$2960 *c*) \$2000

33. $(h \circ f)(x) = 11200 - 104x - 0.08x^2$. Representa el ingreso que se obtiene por una demanda de x artículos

35. El ingreso anual se maximiza con una cuota de \$350

37. *a*) 250 unidades *b*) 180 unidades

39. *a*) $N(t) = \dfrac{80(18 + t)^2}{648 + 36t + t^2}$ *b*) 54,080 créditos

41. $y = \sqrt{10 - 6x^2}$ o $y = -\sqrt{10 - 6x^2}$

43. $y = 3x + \dfrac{10}{x^2 + 2x + 1}$

45. $x = f^{-1}(y) = \dfrac{y + 7}{3}$

47. $x = f^{-1}(y) = \sqrt{\dfrac{18 - y^2}{2}}$

49. *a*) 50 zorros *b*) $p(3) \approx 216$ *c*) $p(10) \approx 368$

d) A los 5 años

CAPÍTULO 6

1. *a*) Falso, $\log_a 1 = 0$, para todo número real $a > 0$ y $a \neq 1$

b) Falso, $\exp(\ln(x)) = x$, para todo número real $x > 0$

c) Verdadero

d) Falso, la base de los logaritmos debe ser un número real positivo distinto de 1

e) $\log_2(2a) = 1 + \log_2(a)$

f) Verdadero

g) Verdadero

h) $\dfrac{\ln a^5}{\ln a^3} = \dfrac{5}{3}$

i) Verdadero

j) Verdadero

k) Verdadero

l) Falso, Si $\ln x < 0$, entonces $0 < x < 1$

m) Falso, $\log(1000) - \log(100) = 1$

3. 8

5. $\dfrac{2}{3}$

7. $\dfrac{x}{2}$

9. $\dfrac{1}{2}\left(3 - \dfrac{x}{2}\right)$

11. $\dfrac{4}{x + 2}$

13. 0.771

15. 2 y -1

17. 1, observe que -3 no puede ser solución

19. 4

21. $-\dfrac{1}{2}$

23. $y = \dfrac{x \pm \sqrt{x^2 - 4x}}{2}$

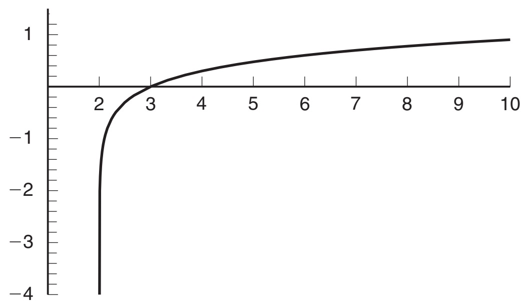
27. $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

29. $x \in (-\infty, \infty)$

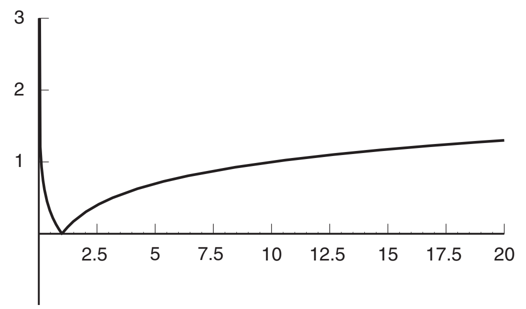
31. $x \in \mathcal{R} - \{-2, 2\}$

33. $x \in (-\infty, 0]$

35.



37.



39. 11.55 años

41. $r \approx 13.86\%$

43. $\approx$ 15 meses

45. Le conviene vender de inmediato

49. *a*) 12.36% *b*) 12.55% *c*) 12.68% *d*) 12.75%

51. *a*) 7.46% *b*) 7.39% *c*) 7.35% *d*) 7.325%

53. $11,325,226,989,819.40

55. $\approx$ 7.35%

57. 6,823 millones de personas

59. $\approx$ 29.82%, $\approx$ 4.86%

CAPÍTULO 7

1. *a*) Falso, debe ser $T^n = ar^{n-1}$
   b) Cierto
   c) Cierto
   d) Cierto
   e) Falso, la razón r, está dada por $r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} = \cdots$
   f) Falso, la sucesión $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \cdots$ es una PG
   g) Cierto
   h) Falso. El orden de la ecuación en diferencias $y_{n+3} = 2y_n$ es 3
   i) Cierto
   j) Cierto
   k) Falso, es 16
   l) Falso, satisfacen $T_{m+1} = rT_m$
   m) Cierto
   n) Falso. La suma de una PG infinita es $S_\infty = \frac{a}{1-r}$ siempre que $-1 < r < 1$

3. $x = 2$

5. $667.95

7. $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{32}, \frac{3}{64}$

9. 345

11. $236\frac{3}{2} \approx 236.6667$

13. ≈ 1.5

15. $y = 1$

17. $T_n = 2 + 3d$, $S_{16} = 47$

19. $T_n = \frac{1}{27} \cdot 3^n$, $T_{10} = 2187$

21. $1000(1 + 0.05*t*) y después de 6 años, $1300

23. $7,207.06

25. $6750

27. \$171,825

29. $z_n = c\left(\frac{2}{3}\right)^n$

31. $z_n = 4(-1)^n$

33. $z_n = 3 + 5n$

35. $z_n = 10n$

37. \$11,255.08

39. *Es una demostración por lo que no se muestra la solución*

CAPÍTULO 8

1. *a*) Cierto

   b) Cierto

   c) Cierto. El producto $\mathbf{AB} = [a_1b_1 + a_2b_2]$

   d) Falso. Si $\mathbf{A} = [a_1\ a_2]$ y $\mathbf{B} = [b_1\ b_2]$ entonces $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ está bien definido

   e) Falso

   f) Falso. Considere $\mathbf{A} = [1\ 1]$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   g) Cierto

   h) Falso. Puede suceder que el sistema tenga solución única, un número infinito de soluciones o bien no tenga solución

   i) Cierto

   j) Falso. Puede suceder que el sistema no tenga solución, que tenga solución única o que tenga un número infinito de soluciones

   k) Cierto. Aunque la solución podría no ser única

3. $\begin{bmatrix} -4 & 11 \\ 13 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 14 & -1 & -3 \\ 16 & -14 & -2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -7 & 260 \\ 25 & -300 \\ 56 & -255 \end{bmatrix}$

9. No es posible multiplicar una matriz de 2×3 por una matriz de 2×2

11. $x = 1, y = 1$

13. $x = 2, y = -3, z = 4$

15. $x = 5, y = 2$

17. No tiene solución, el sistema es inconsistente

19. $x = 2, y = 4, z = -3$

21. $\begin{bmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} -0.2000 & 1.0000 & -0.4000 \\ -1.8000 & -5.1667 & 3.0667 \end{bmatrix}$

27. Por ejemplo, $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$, observe que $\mathbf{MN} = \mathbf{I}$

29. *a*) $\mathrm{L} + \mathrm{G} = \begin{bmatrix} 90 & 90 & 160 \\ 130 & 120 & 200 \end{bmatrix}$

    b) $1.2\,\mathbf{L} + 0.9\,\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 102 & 99 & 165 \\ 141 & 126 & 207 \end{bmatrix}$

31. *a*) Cada entrada de **RP** representa el costo, de los ingredientes, para la elaboración de 100 botellas de salsa de tomate Económica, Normal y Súper, respectivamente. Y

    $\mathbf{RP} = \begin{bmatrix} 92 \\ 149 \\ 148 \end{bmatrix}$

    b) Defina la matriz de botellas solicitadas, **B**, como $\mathbf{B} = [50\ \ 45\ \ 30]$, entonces el costo total está dado por $\mathbf{BAP} = [17245]$

    c) $\frac{1.40}{100}\mathbf{RP} = \begin{bmatrix} 92 \\ 149 \\ 148 \end{bmatrix} = 0.014\,\mathbf{RP} = \begin{bmatrix} 1.288 \\ 2.086 \\ 2.772 \end{bmatrix}$. Así que,

    Económica, \$1.29; Normal, \$2.09; y Súper, \$2.77

33. $[4\ \ 10\ \ 5]\begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix} = 140$

35. $\mathbf{PA} = [18800\ \ 25350\ \ 18750\ \ 22000]$ representa el ingreso de cada mes por la renta de los automóviles

CAPÍTULO 9

1. *a*) Verdadero

   b) Verdadero

   c) Falso, si **A**, **B** y **C** son matrices tales que $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{C}$ y **A** es invertible, entonces $\mathbf{B} = \mathbf{C}$

   d) Verdadero

   e) Verdadero

f) Falso. Si **A** es una matriz de $n \times m$ entonces $\mathbf{A}^T$ también es de $m \times n$

g) Falso. Si **A** es una matriz de 2×2 y sabe que $|\mathbf{A}| = 4$, entonces $|3\mathbf{A}| = 36$

h) Verdadero

i) Falso. Si **A** y **B** son matrices de $n \times n$ entonces *no necesariamente se cumple* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$

j) Falso. El menor y el cofactor de un elemento de una matriz son iguales en valor absoluto

k) Falso. Una matriz cuadrada, **A**, es invertible si, y sólo si su determinante es distinto de cero

l) Falso. Si **A** y **B** son matrices de $n \times n$ invertibles, entonces $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

m) Verdadero

n) Verdadero

o) Verdadero

p) Falso. La matriz identidad, **I**, de $n \times n$ no es una matriz regular, ya que cualquier potencia de **I** tiene elementos iguales a cero

3. $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}$

5. $\dfrac{1}{2a}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

7. $\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\dfrac{1}{28}\begin{bmatrix} 9 & -7 & -11 \\ 12 & 0 & 4 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

13. No tiene inversa, ya que no es una matriz cuadrada

15. No tiene inversa, su determinante es igual a cero

17. $x = 1, y = 3$

19. $x = -2, y = -5, z = 3$

21. $x = 1, y = -1$

23. $x = -15, y = 11$

25. $a = -1, b = 2, c = -3$

27. $x = 6, y = -5, z = 2$

29. $(x - 6)(x + 6)$

31. $(y - x)(z - x)(z - y)$

33. $x(x - 1)$

35. $2(1 + \sqrt{3}), 2(1 - \sqrt{3})$

37. 0, 4/3

39. *a*) 0.45 *b*) 0.29 *c*) [17/36 13/36 1/6]

41. *a*) $\begin{pmatrix} \frac{100}{510} & \frac{260}{700} \\ \frac{350}{510} & \frac{125}{700} \end{pmatrix}$ *b*) 588.39 unidades para la industria I y 735.06 unidades para la industria II. *c*) 69.22 y 330.78 unidades de insumos primarios para la industria I y II respectivamente

43. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/6 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Las columnas corresponden, de izquierda a derecha, a los estados \$0, \$1, \$2, \$3 y \$4, respectivamente. Y de forma correspondiente los renglones, de arriba hacia abajo

45. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/6 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Las columnas corresponden, de izquierda a derecha, a los estados \$0, \$1, \$2, \$3 y \$4, respectivamente. Y de forma correspondiente los renglones, de arriba hacia abajo

47. *a*) 0.30; *b*) 0.41; *c*) Las probabilidades son 0.23, 0.36, 0.41, de estar en el local 1, 2 y 3, respectivamente

CAPÍTULO 10

1. *a*) Falso. La gráfica del conjunto solución de una desigualdad débil es una *región* en el plano *xy* limitada por una línea continua y está limitada por una línea a trazos para una desigualdad estricta

b) Falso. Si $2x - y < 3$ entonces $y - 2x > -3$

c) Falso. Si $x > a$ y $y > b$ entonces $x + y > a + b$

d) Verdadero

e) Verdadero

f) Falso. Si $3x - 5y \leq 5$ entonces $5y - 3x \geq -5$

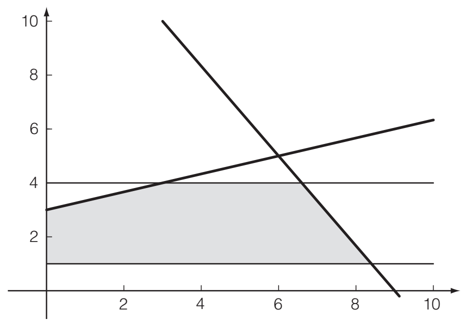
g) Verdadero

h) Falso. El segundo cuadrante es el conjunto solución de $x \leq 0$ y $y \geq 0$

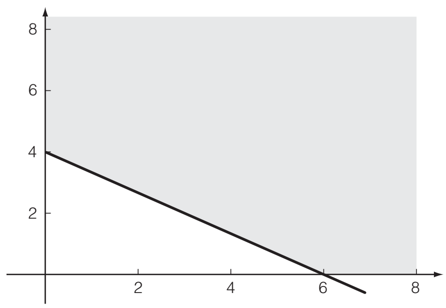
i) Falso. A partir de la desigualdad $x + y \leq a + b$ no es posible deducir desigualdades separadas para x y y

j) Falso. En el método símplex el elemento pivote siempre debe ser positivo

3.



5.



7. $Z_{\text{máx}} = 255$ si $x = 5$, $y = 15$

9. $Z_{\text{mín}} = -49$ si $x = 8$, $y = 5$

11. $Z_{\text{mín}} = -3$ si $x = 0$, $y = 3$; $Z_{\text{máx}} = 2$ si $x = 2$, $y = 0$

13. $Z_{\text{mín}} = 8$ si $x = 0$, $y = 4$; $Z_{\text{máx}} = 18$ si $x = 6$, $y = 0$

15. $Z_{\text{máx}} = 17$ si $x = 1$, $y = 3$

17. $Z_{\text{máx}} = 6$ si $x = 0.7313$, $y = 0$, $z = 2.6344$

19. $Z_{\text{mín}} = -8.2759$ si $x = 6.9310$, $y = 6.1034$, $z = 9.4138$

21. $Z_{\text{máx}} = 5.6$ si $x = 0.8$, $y = 2.4$, $z = 0$

23. El número de peces de la especie S es 40 y de la especie T es 120; el peso máximo es 520 libras

25. El plan óptimo no cambia, es decir, se deben producir 48 sillas y 28 mesas, con una ganancia de \$4020

27. Se debe invertir \$1.4 millones en bonos con poco riesgo y \$0.6 millones en bonos hipotecarios, lo que produce un rendimiento conjunto de \$118,000 anuales

29. Se deben enviar 1050 paquetes de medicinas y 3420 cajas con botellas de agua, lo cual ayudará a un total de 61,800 personas

CAPÍTULO 11

1. *a*) Falso. La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ *no* está definida en $x = 1$, pero $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$

b) Verdadero

c) Verdadero

d) Falso. La derivada de una suma de funciones derivables es igual a la suma de las derivadas

e) Falso. Si $f(x) = |x|$, entonces $f'(0)$ no existe

f) Falso. Si y es una función de x, entonces valor de Δy (el incremento de y) puede ser positivo, negativo o cero

g) Verdadero

h) Verdadero

i) Falso. La función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$, pero *no* es diferenciable en ese punto

j) Verdadero

k) Falso. Aunque la función $f(x)$ no esté definida en $x = c$, en algunos casos $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ puede existir

l) Verdadero

m) Falso. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe

3. 0.84

5. 35.5; 7.1

7. 0

9. No existe

11. $-\dfrac{3}{2}$

13. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, para $x \neq 0$

15. -23

17. No existe el límite

19. $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

21. $\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

23. $-\dfrac{2}{(x-1)^3}$

25. $\dfrac{5}{2}x^{3/2}$

27. $\dfrac{3x^2 + 4}{2x^{3/2}}$

29. $5p^4 - 6p^2 - 3$

31. $-\dfrac{u^2 + 1}{(u^2 - 1)^2}$

33. $\dfrac{y^3 - y - 10}{3y^3}$

35. $-\dfrac{3x^2 + 4x - 1}{2\sqrt{x + 1}(1 + x^2)^2}$

37. $10x$

39. $0.4x + 8$

41. $R'(x) = 80 - 0.16x$

43. $80 - 8.16x$

45. -35

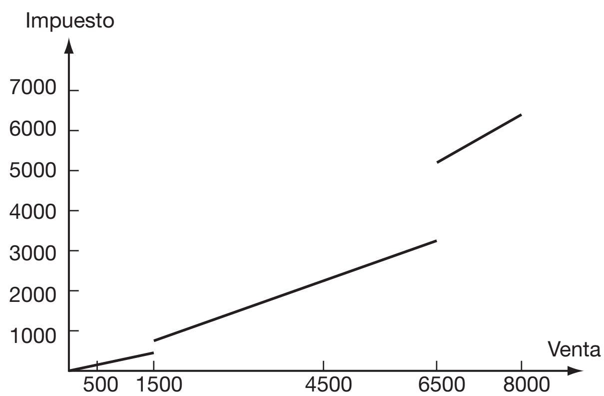
47. -2, cuando el precio sube de $p = 2$ a $p = 3$, la demanda disminuye aproximadamente en 2 unidades

49. No. Si $f(2) = \dfrac{1}{6}$, la función sería continua en $x = 2$

51. No

53. $f(-1) = 2$

55. $T(v) = \begin{cases} 0.03v & \text{si} \quad 0 \le v \le 1500 \\ 0.05v & \text{si} \quad 1500 \le x \le 6550 \\ 0.08v & \text{si} \quad x > 6550 \end{cases}$



$T(v)$ no es continua ni diferenciable para $v = 0$, 1500 y 6500

CAPÍTULO 12

1. *a*) Verdadero

b) Falso. La derivada de un cociente de funciones, f y g, es igual a $\dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

c) Verdadero

d) Falso. $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

e) Falso. $\dfrac{d}{dx}(x^e) = ex^{e-1}$

f) Falso. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{2}{x^3}$

g) Falso. Si la aceleración de un móvil es cero, entonces su velocidad es constante

h) Verdadero

i) Verdadero

j) Falso. $\dfrac{d}{dx}(\log(e)) = 0$

k) Falso. Si $y = u(x)$, entonces $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\dfrac{y'(x)}{y^2(x)}$

3. $-4x(1 + 2x^2)$

5. $\dfrac{e^x(x - 2)}{(x - 1)^2}$

7. $-\dfrac{(x + 2)(2x - 3)}{\sqrt{4x + 1}(x^2 + 3)^{3/2}}$

9. $\dfrac{5 - 3x - x^2 + 3x\ln(x) + 2x^2\ln(x)}{x[\ln(x)]^2}$

11. $x^x(1 + \ln x)$

13. $e^{x^2}x^2(3 + 2x^2)$

15. $-\dfrac{e^{-x}(x^2 - x + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}$

17. $-\dfrac{2e^x}{(e^x - 1)(e^x + 1)}$

19. $-\dfrac{2x}{(x^2 + 4)^{3/2}}$

21. $-e^{-2x}x^2(2x - 3)$

23. $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

25. $-\dfrac{1}{2x^{3/2}}$

27. $5x - 4y + 4 = 0$

29. $x - y = 0$

31. $2e^{x^2}(1 + 2x^2)$

33. $\dfrac{2(27 - x^2)}{9(9 + x^2)^{5/3}}$

35. $a - b - b\ln x$

37. $1.2 + \ln x\ \dfrac{-50 + x}{x^2}$

39. -5

41. $-5/3$, si el precio sube de \$2 a \$3 la demanda disminuye aproximadamente 5/3 unidades

43. 78,000 unidades de productividad por máquina, quiere decir que si se aumenta de 8 a 9 máquinas la productividad aumentará aproximadamente en 78,000 unidades

45. *a*) $v(t) = 49 - 9.8t$ *b*) $a(t) = 9.8$ *c*) En $t = 5$, la velocidad del objeto es igual a cero

47. Al inicio del año 24, ≈ 91.78; al inicio del año 36, ≈ 55.64. La población crece con mayor rapidez al inicio del año 24

49. *a*) Al inicio había 20 individuos enfermos,

b) $I'(t) = 200t^5e^{-t}(6 - t)$

c) 4,211.22 enfermos/semana

d) $-3{,}065.2$ enfermos/semana. Observe que en la semana 5, el número de enfermos aumenta, mientras que en la semana 7 está disminuyendo

CAPÍTULO 13

1. *a*) Verdadero

b) Verdadero

c) Falso; $f(x) = |x|$ es continua en $(-1, 1)$, pero no es derivable en $x = 0$

d) Falso; en un punto de inflexión, $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ *no existe*

e) Falso; la función $f(x) = x^6$ cumple $f''(0) = 0$ y $(0, 0)$ no es un punto de inflexión

f) Verdadero

g) Verdadero

h) Verdadero

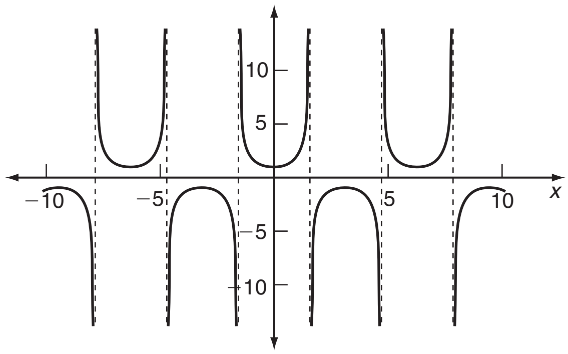
i) Falso; un ingreso máximo no necesariamente conduce a utilidades máximas

j) Falso; por arriba de cierto nivel, el costo de publicidad adicional disminuye el ingreso extra que genera

k) Verdadero

l) Verdadero

m) Falso; un valor mínimo local de una función puede ser mayor que un valor máximo local de la misma función. Analice los máximos y mínimos locales de la siguiente función



n) Verdadero

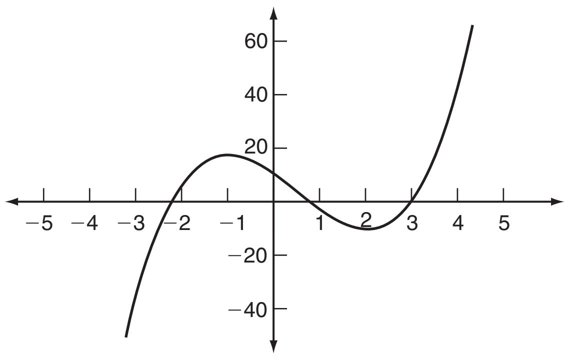
o) Falso; por ejemplo $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2 + 5x - 5}{x^2 - 7x + 8} = 2$ y $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2 + 5x - 5}{x^2 - 7x + 8} = 2$

p) Falso; por ejemplo $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{6x + 5}{\sqrt{4x^2 + 1}} = 3$ y $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{6x + 5}{\sqrt{4x^2 + 1}} = -3$

q) Verdadero

3. *a*) $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ *b*) $(-1, 2)$

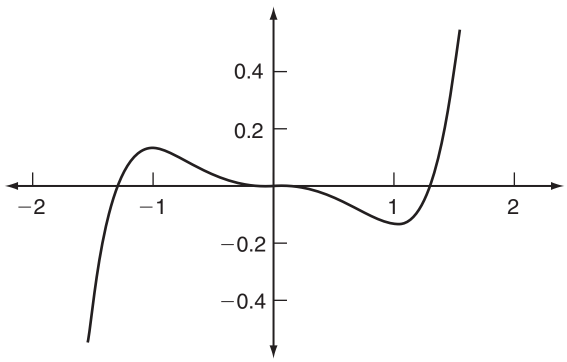
c) $(1/2, \infty)$ *d*) $(-\infty, 1/2)$



5. *a*) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ *b*) $(-1, 1)$

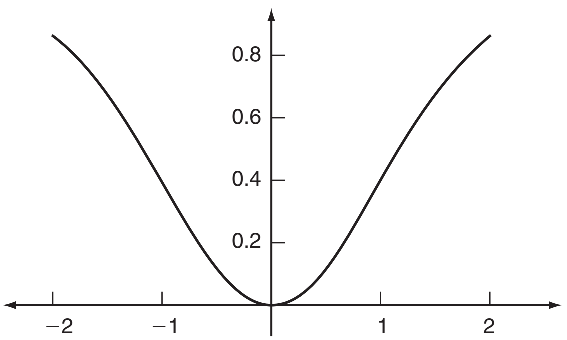
c) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \cup \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$

d) $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$



7. *a*) $(0, \infty)$ *b*) $(-\infty, 0)$

c) $(-1, 1)$ *d*) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$



9. $(20, \infty)$

13. Mínimo local en $x = 3$

15. Mínimo local en $x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{1/3}$

17. Mínimo local en $t = 1$

19. Mínimo local en $x = 0$

21. *a*) $k = -1$ *b*) $k = 3$

23. $a < 0$, los valores de b y c no importan

25. Mínimo absoluto 0, en $x = 0, 1$; máximo absoluto $9\sqrt[3]{4}$ en $x = 3$

27. Mínimo absoluto 0, en $x = 1$; máximo absoluto $\dfrac{1}{2e}$, en $x = \sqrt{e}$

29. *a*) $x = 6$ *b*) $\$(10/e) \approx \$3.68$

c) $R_{\text{máx}} = \$(60/e) \approx \$22.07$

31. *a*) dy/dt representa la tasa en que aumenta la proporción de población infectada

b) $t = 2$

c) Es creciente en $(0, 2)$ y decreciente en $(2, \infty)$

33. $3\sqrt[3]{4}$ pulgadas $\times$ $3\sqrt[3]{4}$ pulgadas $\times$ $3\sqrt[3]{4}$ pulgadas $\approx 4.76 \times 4.76 \times 4.76$ pulgadas

35. *a*) $t = 20/4.9 \approx 4.08$ segundos *b*) $h \approx 20.41$ metros

37. $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{9} r^3$

43. *b*) $Q = 2000$; $T_{\text{mín}} = \$10,250$ *c*) $\$10{,}256.25$

45. *a*) $x = \dfrac{4-t}{10}$; $p = \dfrac{104 + 4t}{10}$ *b*) $\dfrac{(4 - t)^2}{20}$

c) $t = 2$

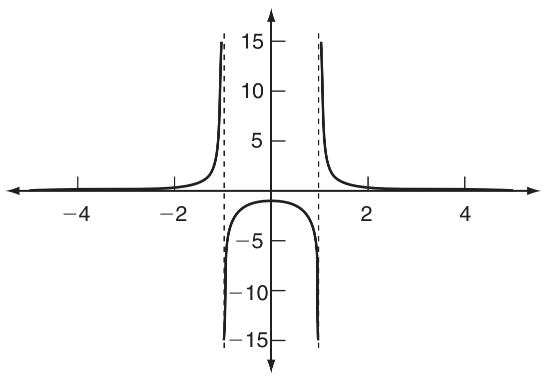
47. 9 meses

49. A:probabilidad de éxito a la larga; $p'(0) = A/B$

51. A una profundidad de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

53. 40 y 20

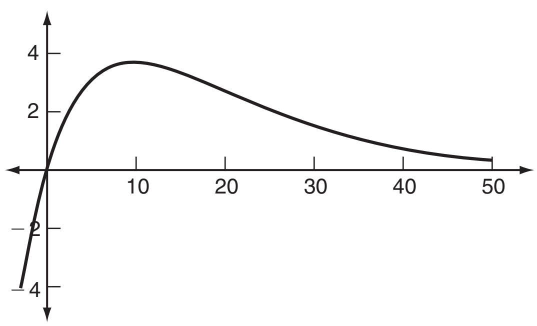
55.



Asíntota horizontal: $y = 0$

Asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = -1$

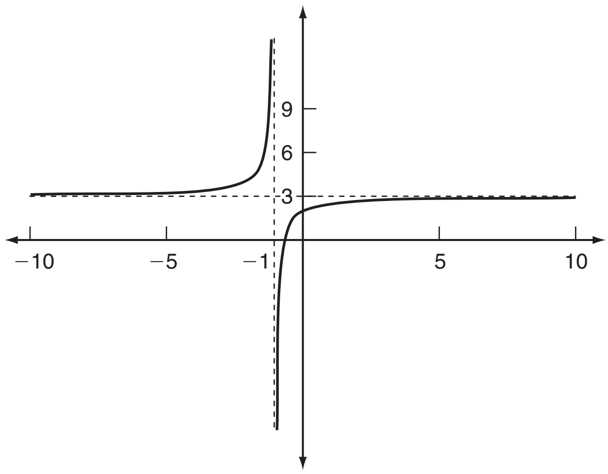
57.



Asíntota horizontal: $y = 0$

Asíntota vertical: No tiene

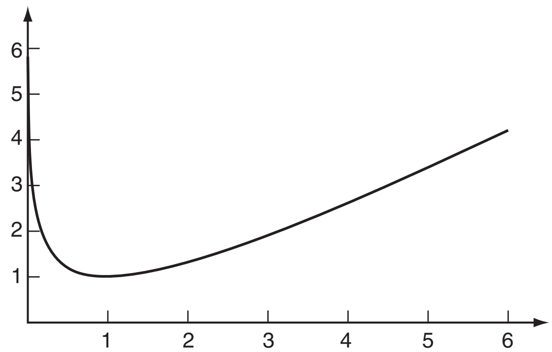
59.



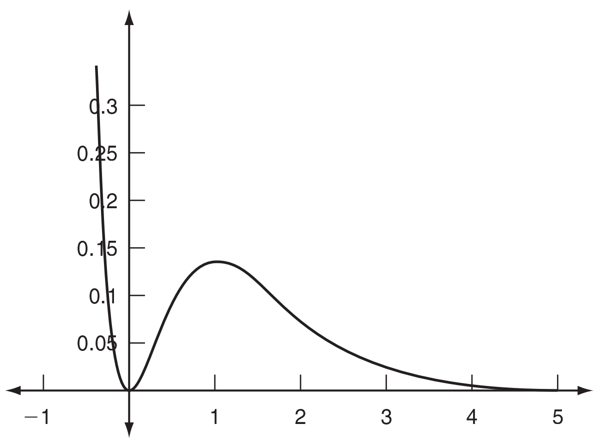
Asíntota horizontal: $y = 3$

Asíntota vertical: $x = -1$

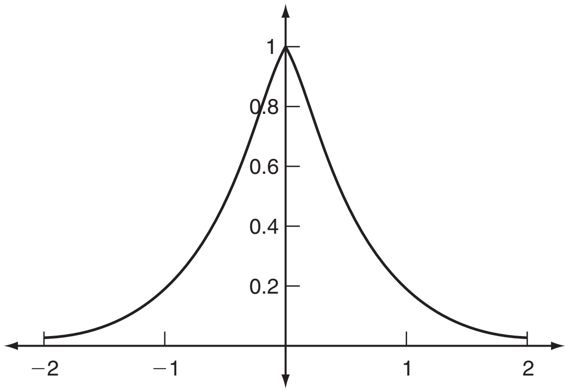
61.



63.



65.



CAPÍTULO 14

1. *a*) Falso. La diferencial de $3x^3$ es $9x^2dx$

b) Verdadero

c) Verdadero

d) Falso. La derivada logarítmica de x^x es $1 + \ln x$

e) Verdadero

f) Verdadero

g) Falso. En una relación implícita $f(x, y) = 0$, una de las dos variables es independiente y la otra es dependiente

h) La diferencial de la función lineal $f(x) = 4x + 1$ es $4dx$

i) Verdadero

j) Verdadero

k) Falso. *Si* $f(x) = x^2$, se puede esperar que df sea aproximadamente igual a Δf, pero siempre *menor* que Δf

l) Verdadero

m) Verdadero

n) Verdadero

3. $\dfrac{5 + 2t}{2\sqrt{t^2 + 5t}}\, dt$

5. 1

7. $\Delta y \approx 0.014374$, $dy \approx 0.014434$

9. 1.04

11. 0.2

13. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2t - 1}{3}$

15. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1 - x - 3xt^2}{2 + t + t^3}$

17. $y = 3$, la recta tangente es horizontal

19. $-\frac{1}{9}$

21. $y' = \frac{x^2 - 8x + 1}{2(x-4)^2}\sqrt{\frac{x-4}{x^2-1}}$

23. 0

25. $\frac{(\ln x - 1)dx}{(\ln x)^2}$, o bien, $\frac{x^2(x-y)}{y}\,dx$

27. *a*) $\frac{-9}{11}$ *b*) $\frac{-11}{9}$

c) -1

29. Elástica

31. Elástica

33. *a*) $p > \frac{c}{2b}$ *b*) $0 < p < \frac{c}{2b}$

c) $p = \frac{c}{2b}$

37. $50

39. $\eta = -1\backslash 3$; la demanda disminuye en aproximadamente 1.67%

CAPÍTULO 15

1. *a*) Falso; en muchos casos la integral de un producto de funciones se puede obtener mediante integración por partes

b) Verdadero

c) Falso; las antiderivadas de una función integrable difieren por una constante arbitraria

d) Falso; $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

e) Verdadero

f) Falso; si $f'(x) = g'(x)$, entonces, $f(x) = g(x) + C$, con C una constante arbitraria

g) Verdadero

h) Falso; $\int \frac{dt}{e^t} = -\frac{1}{e^t} + C$

i) Verdadero

j) Falso; $\int [g(x)]^n g'(x)dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1}$, $(n \neq -1)$

k) Falso; $\int \frac{dx}{x3} = \frac{-1}{2x^2} + C$

l) Falso; $\int e^n dx = e^n x + C$

m) Falso; $\int e^{x^2} 2x dx = e^{x^2} + C$

3. $x + x^3 + \frac{3x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + C$

5. $3e^{x/3} + C$

7. $xe^2 + C$

9. $\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C$

11. $\frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{10}}{10} + C$

13. $e^{x^2} + C$

15. $\frac{3}{4}(e^x + 1)(4/3) + C$

17. $e^{-1/t} + C$

19. $t^t + C$

21. $\frac{5}{3}(u-1)\sqrt{2u+1} + C$

23. $\frac{1}{6}\left[\sqrt{1-t^2} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right|\right] + C$

25. $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$

27. $\frac{-x + x\ln|x|}{\ln 2} + C$

29. $-e^{1/x} + C$

31. $\frac{1}{2}x^2(-1 + \ln x^2) + C$

33. $\frac{1}{2}\left[\sqrt{9+m^2} - 3\ln\left|\frac{3+\sqrt{m^2+9}}{m}\right|\right] + C$

35. $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{-5+\sqrt{5}-t}{5+\sqrt{5}+t}\right| + C$

37. $\frac{5}{6}\ln\left|\frac{u^2}{3+\sqrt{2u^4+9}}\right| + C$

39. $\frac{1}{6}[\ln x^2]^3 + C$

41. $f(t) = -t + t\ln|t| + 2$

43. 9

45. $8500

47. *a*) $0.1x - 0.001x^2 - 0.00001x^{2.5}$

b) $p = 0.1 - 0.001x - 0.00001x^{1.5}$

49. $9000

51. *a*) $C(x) = 50x + 0.02x^2 + 3000$

b) $14,250

53. *a*) 221 unidades *b*) 460 unidades

55. $3350 - \frac{8000(1 + \ln(x+25))}{(x+25)}$

57. $p = 26{,}000$

59. *a*) 15,750 automóviles *b*) 33,750 automóviles

61. *a*) $v(t) = 3t^2 + 2t + 50$ *b*) $d(t) = t^3 + t^2 + 50t$

63. $d(t) = 10t - \dfrac{5t^2}{2}$, cuando hace alto total el objeto habrá viajado 10 metros

65. $g(x) = e^{2x} + \sqrt{x}$

CAPÍTULO 16

1. *a*) Falso; $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

b) Verdadero

c) Falso; si $3a$ y b son constantes, entonces $\dfrac{d}{dx}\left[\int_a^b f(x)\right] = 0$)

d) Falso; la proposición es verdadera si $f(x)$ es *no negativa*

e) Falso; $\dfrac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$

f) Falso; $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ es válida para toda c número real

g) Verdadero

h) Verdadero

i) Verdadero

j) Falso; la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = py(m - y)$, con p y m constantes es una ecuación logística

k) Falso; la ecuación diferencial $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = y - x$ es de primer orden

l) Verdadero

m) Falso; la probabilidad de que una variable aleatoria con distribución normal tome un valor mayor que su media es 0.5

n) Falso; la función $f(x) = x^2$, si $0 \le x \le 1$ y $f(x) = 0$; en otro caso, no puede ser la función de densidad de una variable aleatoria continua, ya que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \dfrac{1}{3}$

o) Verdadero

p) Falso, si X es una variable aleatoria continua, entonces el valor esperado de X se calcula mediante $\int_a^b xf(x)dx$, en donde $f(x)$ es la f.d.p. y es tal que $f(x) = 0$ si $x \notin [a, b]$

3. $\dfrac{1}{4}(1 + 5e^6) \approx 504.54$

5. 4

7. $\dfrac{3(e-1)}{2e}$

9. 9

11. 847.69 horas-hombre

13. SC = 162 y SP = 48

15. $y(t) = t^3 + C$

17. $y(t) = Ce^{x - x^2/2}$

19. $-\dfrac{2}{t^2 - 2}$

21. $2e^{-\frac{t^4}{4} + \frac{x^4}{4}}$

23. $y(t) = \dfrac{100{,}000e^x}{9999 + e^x}$ en, aproximadamente, 9.21 semanas

25. $t = 4$ años; \$13.333 millones

27. No es f.d.p., ya que $\int_0^1 f(x)dx \neq 1$

29. Sí, es f.d.p.

31. $m = 2$

33. *a*) ≈ 0.61 *b*) ≈ 0.22 *c*) ≈ 0.63

35. *a*) $\dfrac{1}{3}$ *b*) $\dfrac{5}{12}$ *c*) $\dfrac{3}{4}$

37. \$11,662

39. 2.0935; 2.0941 (*Nota: el valor de la integral aproximado a cinco decimales es 2.09471*)

CAPÍTULO 17

1. *a*) Falso; a lo largo del eje y las coordenadas x y z son iguales a cero

b) Falso; en el plano xy, $z = 0$

c) Verdadero

d) Falso; el dominio de la función es todo el plano xy

e) Verdadero

f) Verdadero

g) Falso; si $h(x, y) = f(x) + g(y)$, entonces $\dfrac{\partial^2 h(x, y)}{\partial^2 y} = \dfrac{dg(y)}{dy}$

h) Verdadero

i) Falso; si todas las derivadas parciales de $f(x, y)$ existen y son continuas, entonces

$$\frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial y^2 \partial x^2}$$

j) Verdadero

k) Falso; si (a, b) es un punto crítico de $f(x, y)$ y f_{xx}, f_{yy} son positivas en (a, b) y además $f_{xx}\, f_{yy} - f^2_{xy} > 0$ en (a, b), entonces, en (a, b) se alcanza un mínimo local de $f(x, y)$

l) Verdadero

m) Verdadero

n) Falso; la recta obtenida por el método de mínimos cuadrados, no necesariamente pasa por los puntos

o) Verdadero

p) Verdadero

q) Verdadero

3. $D = \{(x, y)|x^2 \geq y\}\backslash\{(2, 0)\}$

5. $D = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

7. $-ye^{-xy};\ -xe^{-xy};\ xye^{-xy} - e^{-xy};\ y^2e^{-xy}$

9. $\dfrac{2x}{x^2 + y^4};\ \dfrac{4y^3}{x^2 + y^4};\ -\dfrac{8xy^3}{(x^2 + y^4)^2};\ \dfrac{2}{x^2 + y^4}$

$-\dfrac{4x^2}{(x^2 + y^4)^2}$

11. Los puntos de la curva de nivel $C(r, h) = 100$ representan las posibles combinaciones de dimensiones de la lata que producen una lata, cuyo costo es de \$100

13. $\eta_{pA} = \eta_{pB} = \dfrac{1}{2}$, así que $\eta_{pA} + \eta_{pB} = 1$

15. $\partial C/\partial p_A = 1.1 + 2.78p_A - 3.66p_B$

$\partial C/\partial p_B = 13.8 - 3.66p_A + 8.88p_B$; estas derivadas representan la tasa de cambio en los costos de fabricación con respecto a incrementos en los precios de los productos

17. Mínimo local en $(1, 0)$

19. Mínimos locales en $\left(\pm\dfrac{1}{2}, 0\right)$, punto silla en $(0, 0)$

21. *a*) $H(0, 5) = 917.752$

b) $\dfrac{\partial H(0, 5)}{\partial w} \approx 40.79,\ \dfrac{\partial H(0,5)}{\partial t} \approx -27.81$

c) Cuando la temperatura, t, es cero y la velocidad del viento w es 5 m/s, un *pequeño* aumento en la temperatura hará que *H disminuya* aproximadamente 27.81 veces ese cambio, siempre que la velocidad del viento se mantenga constante. Ahora, si la temperatura se mantiene constante en cero grados, y la velocidad del viento sufre un *pequeño* aumento, la razón de la pérdida de calor aumenta aproximadamente 40.79 veces ese cambio. Observe que si aumenta la razón de la pérdida de calor, quiere decir que uno sentirá más frío

d) Por los resultados de la partes *b*) y *c*), cuando $t = 0$ y $w = 5$, tiene mayor influencia, en la razón de pérdida de calor, un aumento de 1m/s en la velocidad del viento que una disminución de 1°C en la temperatura

25. *a*) $x = 28.18,\ y = 44.55,\ P = 7809.09$

b) $x = 28.04,\ y = 44.41$

27. $K = 7,\ L = 19$

31. $y = 11.179x + 75.936$, la estimación lineal es 154.2 contra 138.1 reportado por la Oficina de Censos de Estados Unidos

33. Las ecuaciones son:

$$a(x_1^4 + x_2^4 + \dots x_n^4) + b(x_1^3 + x_2^3 + \dots x_n^3) + a(x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2) = (x_1^2y_1 + x_2^2y_2 + \dots x_n^2y_n)$$

$$a(x_1^3 + x_2^3 + \dots x_n^3) + b(x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2) + a(x_1 + x_2 + \dots x_n) = (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots x_ny_n)$$

$$a(x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2) + b(x_1 + x_2 + \dots x_n) + nc = (y_1 + y_2 + \dots y_n)$$

Para el caso de los datos dados, las ecuaciones se reducen a

$$354a + 100b + 30c = 104.3$$

$$100a + 30b + 10c = 41.1$$

$$30a + 10b + 5c = 30.3$$

Cuya solución es $a = 0.0357,\ b = -2.09,\ c = 10.03$

Índice

C

D

E

F

N

Q

R

S

T

U

V

Z